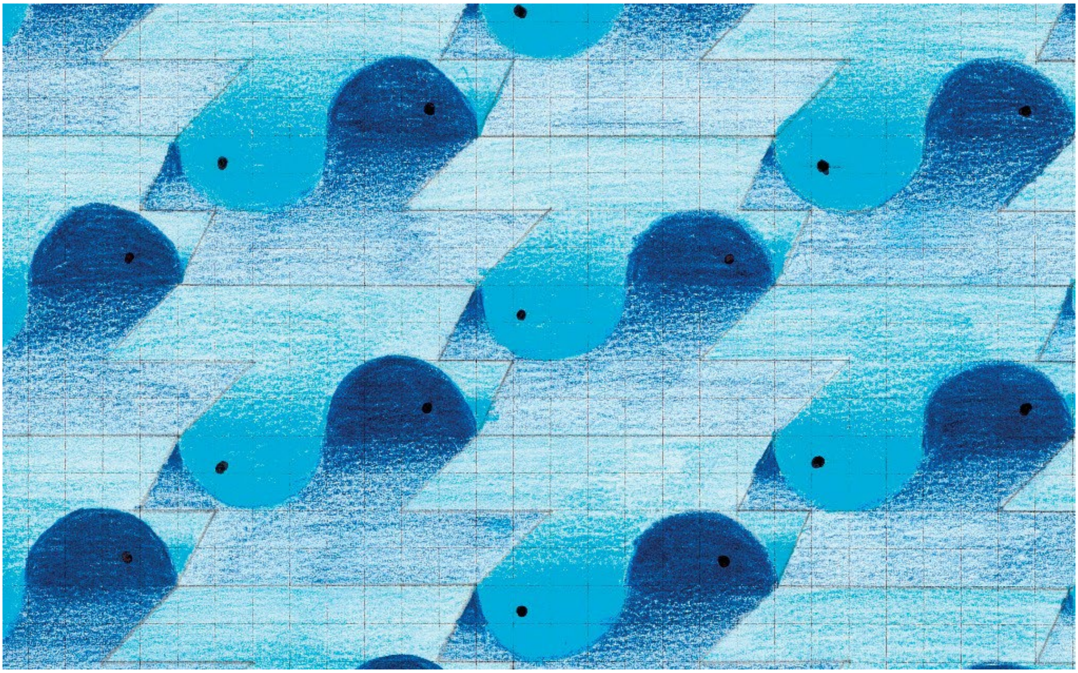
MATH-ÉCOLE

220

Novembre 2013



MATH-ECOLE

220
Novembre 2013

sommaire

Editorial 3
Céline Vendeira Maréchal

Répartitions des sièges en politique au système proportionnel 4
Augustin Genoud

Totems (5ème HarmoS) :
Une activité mathématique pour apprendre à développer des stratégies de recherche 9
Lucie Passaplan

Calculatrice et Plan d'Etudes Romand (PER)
De la décomposition des nombres à la simplification des fractions 14
Ruhal Floris

Le Kasan Kurosu ou le jeu des sommes croisées (Partie 2) 20
Valentina Celi

1/9801 évolution du milieu d'une division un peu particulière (Partie 1) 26
Christine Del Notaro

Le cas Richard 30
Céline Vendeira Maréchal

A propos des nombres décimaux (Partie 2) 33
André Scheibler

De la stratégie à la démarche, de la recherche au savoir 38
Julien Sourgens, Camille Batardon, Catia Castronuovo

Comparez, c'est gagné !
Grandeur, mesure et optimisation 44
Shaula Fiorelli Vilmart et Pierre-Alain Cherix

Labo-maths 49
Thierry Dias

Editorial

Céline Vendeira Maréchal

Math-Ecole et l'enseignement en contexte spécialisé

Depuis la reprise de la parution de la revue Math-Ecole en février 2012, vous avez pu constater que certains articles proposent une réflexion spécifique sur l'enseignement en contexte spécialisé. Comme le mentionne clairement la politique éditoriale de la revue, Math-Ecole propose des articles sur l'enseignement et/ou la didactique des mathématiques liés à l'enseignement à tous niveaux, dont l'enseignement spécialisé, pour lequel le manque de moyens d'enseignement et de propositions d'activités adaptées est souvent souligné par les professionnels.

Toutefois, vous verrez que, d'un numéro à un autre, l'offre peut passablement varier. Si nous regardons ce qu'il en est depuis le numéro spécial EMF de février 2012, nous constatons que 4 articles ont été consacrés aux questions de l'enseignement en contexte spécialisé dans le numéro 218 et 2 dans le numéro 219.

Nous proposons ci-après un bref résumé des articles déjà parus afin de vous encourager à les consulter en ligne à l'adresse : www.math-ecole.ch/mathecole

1. « Engager des élèves et des enseignants de classes spéciales dans des pratiques mathématiques » par J.-M. Favre. Cet article est paru en deux parties. La première (Math-Ecole 218) propose une réflexion pédagogique sur la façon d'aborder les mathématiques dans une classe qui accueille des élèves présentant une déficience intellectuelle et/ou des troubles de la personnalité, l'idée étant de s'interroger sur ce que peuvent être les mathématiques en classe spéciale et comment les aborder avec les élèves.

2. La deuxième partie (Math-Ecole 219) du même auteur propose la narration du déroulement d'une séance dans une classe spécialisée.

3. L'article de C. Cange « De l'expérience à la narration » dans le Math-Ecole 218, correspond à une narration d'expérience d'un enseignant spécialisé qui s'est laissé surprendre lors d'une expérience mathématique avec ses élèves.

4. L'article « Chansons, rythmes et comptage » de S. Dénervaud Ruchet (Math-Ecole 218) décrit une partie d'une recherche d'une étudiante en formation enseignement spécialisé à la HEP Vaud. Cette étude est réalisée dans une école spécialisée qui accueille des enfants présentant des troubles envahissants du développement et s'intéresse à la construction du nombre en musique.

5. L'article « Section du cube … en version géante » de Math-Ecole 218 de J. Serment décrit une séquence d'enseignement originale dans une classe ressource avec des élèves du secondaire 1. Il s'agit d'un travail sur des sections du cube en version géante, afin de travailler les propriétés des triangles et des quadrilatères en géométrie.

6. Le dernier article de C. Vendeira Maréchal dans math-Ecole 219 décrit quelques pratiques caractéristiques des enseignants spécialisés genevois.

Ainsi, bien que ce présent numéro 220 ne propose qu'un seul article sur la thématique spécifique de l'enseignement des mathématiques en contexte spécialisé, de nombreux articles suivront.

Et d'ailleurs, pourquoi ne pas partager vos expériences d'enseignant en proposant des articles pour notre revue ? Si vous êtes intéressés, vous pouvez vous référer aux rubriques « appel d'offres » et « soumission d'articles » sur notre site Internet. Si vous avez un projet de contribution et que vous avez besoin d'un coup de pouce pour le réaliser, le comité de rédaction est disponible, il suffit de nous écrire mathecole@ssrdm.ch.

Répartitions des sièges en politique au système proportionnel

Augustin Genoud[1]

En politique, la répartition des sièges lors d'une votation peut être faite de plusieurs manières : en utilisant la règle de la majorité, en répartissant les sièges proportionnellement aux nombres de suffrages obtenus ou encore en mixant système majoritaire et système proportionnel. Du point de vue mathématique, le système proportionnel est très intéressant. C'est celui qui fait l'objet de cet article qui présente les deux méthodes les plus souvent utilisées dans ce système ainsi qu'une troisième méthode, fruit de mon imagination. En fin d'article, quelques exercices permettront d'appliquer en classe le système proportionnel.

Trois méthodes de répartition

Répartir des sièges – donc des personnes – de manière proportionnelle aux nombres de suffrages obtenus est un véritable casse-tête mathématique (à part des cas rarissimes) car un siège ne peut être évidemment attribué qu'à une seule personne. Dès lors, les modes de répartition sont nombreux et ont tous leurs avantages et désavantages.

Faisons ici une petite parenthèse pour dire que si on élargit le sujet à toutes les votations (système proportionnel et majoritaire), cela va devenir très vite complexe comme le prouvent les trois liens donnés ci-dessous. On peut lire la suite de l'article sans passer par ces liens.

http://images.math.cnrs.fr/La-democratie-objet-d-etude.html

http://images.math.cnrs.fr/Et-le-vainqueur-du-second-tour-est.html

http://images.math.cnrs.fr/La-quete-du-Graal-electoral.html

1 *Augustin Genoud est l'auteur du livre « Les Clefs des Enigmes Mathématiques » paru en 2013. Ce livre ainsi que diverses curiosités mathématiques sont présentés sur son site : www.jeuxmath.ch*

Les deux méthodes les plus couramment utilisées pour répartir des sièges sont la méthode du **Plus Fort Reste** et celle de la **Plus Forte Moyenne** appelée aussi méthode du plus fort quotient. Dans ce qui suit, on ne tiendra pas compte du fait que, parfois, les partis n'ayant pas obtenu un pourcentage minimal de suffrages sont exclus de la répartition des sièges. D'autre part, les nombres en écriture décimale sont systématiquement arrondis au centième près. A l'aide d'un exemple, on va s'intéresser aux deux méthodes, en essayant de comprendre les enjeux mathématiques. Les règlements d'application de ces deux méthodes peuvent différer dans certains détails, généralement sans influence sur la répartition des sièges. Nous avons donc forcément fait des choix arbitraires. On découvrira ensuite une troisième méthode imaginée par l'auteur de l'article, appelons-la la méthode **Genoud**.

Neuf sièges doivent être attribués entre six partis A, B, C, D, E et F. Combien chaque parti va-t-il obtenir de sièges sachant qu'ils ont obtenu les nombres suivants de suffrages :

A : 8002 B : 4698 C : 3651

D : 2612 E : 1790 F : 1603

Dans les méthodes du Plus Fort Reste et de la Plus Forte Moyenne, la première répartition se fait de la même manière.

On effectue d'abord la somme totale des suffrages :

8002 + 4698 + 3651 + 2612 + 1790 + 1603 = 22356.

On cherche ensuite ce que l'on appelle le quotient électoral qui s'obtient en divisant la somme totale des suffrages par le nombre de sièges à distribuer. Dans notre exemple, le quotient électoral est 2484 (22356 : 9). Si ce quotient n'est pas un nombre entier, on prend la valeur approchée à l'unité, par excès.

Chaque parti va obtenir autant de sièges qu'il possède de fois le quotient électoral. C'est ainsi que dans une première répartition, on a ceci :

A 8002 : 2484 = 3,22 --> A obtient 3 sièges

B 4698 : 2484 = 1,89 --> B obtient 1 siège

C 3651 : 2484 = 1,47 --> C obtient 1 siège

D 2612 : 2484 = 1,05 --> D obtient 1 siège

E 1790 : 2484 = 0,72 --> E obtient 0 siège

F 1603 : 2484 = 0,65 --> F obtient 0 siège

On aurait pu obtenir la même répartition en faisant le tableau suivant :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	22356	9
A	8002	3,22
B	4698	1,89
C	3651	1,47
D	2612	1,05
E	1790	0,72
F	1603	0,65

Six sièges sur neuf ont été attribués. A partir de là, les méthodes diffèrent.

Méthode du Plus Fort Reste :

Cette méthode dit qu'il faut attribuer les trois sièges restants aux partis qui sont les plus proches d'avoir obtenu un siège supplémentaire, autrement dit, ce sont ceux qui ont les plus forts restes. A a un reste de 0,22, B de 0,89, C de 0,47, D de 0,05, E de 0,72 et F de 0,65. C'est donc B, E et F qui ont chacun un siège supplémentaire. Avec cette méthode, on obtient finalement :

A = 3 sièges	D = 1 siège
B = 2 sièges	E = 1 siège
C = 1 siège	F = 1 siège

Méthode de la Plus Forte Moyenne :

Les partisans de cette méthode tiennent le discours suivant : il faut que chaque élu représente le même nombre d'électeurs (donc de suffrages). Si le parti F a un siège avec 1603 suffrages (selon la méthode du Plus Fort Reste), il faut que le parti A en ait au moins 4 car 8002 : 1603 = 4,99.

Ils proposent alors d'attribuer les trois sièges manquants selon un procédé étonnant, en procédant à autant de répartitions qu'il reste de sièges à distribuer. Cette règle est importante, il faut absolument se la rappeler. A chaque répartition, comme chaque parti revendique un siège supplémentaire, on va diviser le nombre de suffrages de chaque parti par le nombre de sièges qu'il a obtenus jusque là, augmenté d'une unité. Celui qui aura le plus grand quotient aura un siège supplémentaire.

Deuxième répartition : (chaque parti voit son diviseur augmenter d'une unité)

A 8002 : 4 = 2000,5 --> A obtient 3 sièges

B 4698 : 2 = 2349 --> B obtient 1 sièges

C 3651 : 2 = 1825,5 --> C obtient 1 siège

D 2612 : 2 = 1306 --> D obtient 1 siège

E 1790 : 1 = 1790 --> E obtient 0 siège

F 1603 : 1 = 1603 --> F obtient 0 siège

C'est B qui a le plus grand quotient (2349). C'est lui qui obtient le siège supplémentaire.

Sept sièges sont attribués. On passe à une nouvelle répartition.

Troisième répartition : (seul B voit son diviseur passer de 2 à 3)

A 8002 : 4 = 2000,5 --> A possède 3 sièges

B 4698 : 3 = 1566 --> B obtient 2 sièges

C 3651 : = 1825,5 --> C obtient 1 siège

D 2612 : 2 = 1306 --> D obtient 1 siège

E 1790 : 1 = 1790 --> E obtient 0 siège

F 1603 : 1 = 1603 --> F obtient 0 siège

C'est A qui a le plus grand quotient (2000,5). C'est lui qui obtient le siège supplémentaire.

Huit sièges sont attribués. On passe à une nouvelle répartition pour l'attribution du dernier siège.

Quatrième répartition : (seul A voit son diviseur passer de 4 à 5)

A 8002 : 5 = 1600,4 --> A obtient 4 sièges

B 4698 : 3 = 1566 --> B obtient 2 sièges

C 3651 : 2 = 1825,5 --> C obtient 1 siège

D 2612 : 2 = 1306 --> D obtient 1 siège

E 1790 : 1 = 1790 --> E obtient 0 siège

F 1603 : 1 = 1603 --> F obtient 0 siège

C'est C qui a le plus grand quotient (1825,5). C'est lui qui obtient le dernier siège.

Tous les sièges sont maintenant attribués.

La technique utilisée pour répartir les sièges dans la méthode de la Plus Forte Moyenne est surprenante. Par contre, elle peut s'appliquer aisément, par un procédé qui ne demande quasiment aucune connaissance des mathématiques.

Parfois, dans cette méthode, le quotient électoral est obtenu en divisant la somme totale des suffrages par le nombre de sièges à distribuer, plus un. Dans notre exemple, il serait égal à 2236 (22356 : 10). Ceci ne change pas la répartition des sièges mais en diminue parfois le nombre de répartitions.

Pour bien comprendre les enjeux mathématiques de cette méthode, imaginons une autre manière de distribuer les sièges, jamais utilisée en politique. Les partisans de cette méthode prétendent que si 1603 suffrages ont suffi au parti F pour obtenir un siège, il faut que dans chaque parti, tout groupe de 1603 suffrages se voie attribuer un siège. Ils font alors la répartition suivante :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	1603	1
A	8002	4,99
B	4698	2,93
C	3651	2,28
D	2612	1,63
E	1790	1,12
F	1603	1

Avec un siège tous les 1603 suffrages, il faudrait 11 sièges en tout. Comme 1603 ne convient pas pour attribuer 9 sièges, il faut choisir un nombre supérieur à 1603 comme valeur étalon d'un siège de manière à ce que 9 sièges soient attribués. Il faut faire varier cette valeur étalon.

Supposons que la valeur étalon soit 1900. On a alors le tableau suivant :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	1900	1
A	8002	4,21
B	4698	2,47
C	3651	1,92
D	2612	1,37
E	1790	0,94
F	1603	0,84

Cette fois, il n'y a que 8 sièges attribués. Essayons alors avec 1800. On obtient :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	1800	1
A	8002	4,45
B	4698	2,61
C	3651	2,03
D	2612	1,45
E	1790	0,99
F	1603	0,89

Les 9 sièges sont maintenant attribués et on constate que chaque parti a obtenu le même nombre de sièges que par la méthode utilisée en politique.

En comparant les répartitions obtenues par les deux méthodes, on constate que la méthode du **Plus Fort Reste** favorise les petits partis tandis que les grands partis sont avantagés par la méthode de la **Plus Forte Moyenne**. On notera également qu'avec la méthode de la **Plus Forte Moyenne**, il arrive qu'un même parti se voie attribuer plusieurs sièges après la première répartition, ce qui n'est jamais le cas avec la méthode du **Plus Fort Reste**.

Je me suis demandé s'il n'y avait pas une autre méthode qui soit un compromis entre les deux méthodes précédentes. J'ai alors imaginé ceci :

Méthode Genoud

Elle consiste à classer les résultats des partis dans l'ordre décroissant des suffrages obtenus comme c'est déjà le cas dans notre exemple (A > B > C > D > E > F). Ensuite, on va comparer chacun des partis avec tous les partis ayant obtenu moins de suffrage.

1) A contre B + C + D + E + F, soit 8002 contre 14354 (4698 + 3651 + 2612 + 1790 + 1603).

2) B contre C + D + E + F, soit 4698 contre 9656 (3651 + 2612 + 1790 + 1603).

3) C contre D + E + F, soit 3651 contre 6005 (2612 + 1790 + 1603).

4) D contre E + F, soit 2612 contre 3393 (1790 + 1603).

5) E contre F, soit 1790 contre 1603.

Ainsi, le parti A qui a obtenu le plus de suffrages va se mesurer à tous les autres partis qui représentent 14354 suffrages :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	22356	9
A	8002	3,22
B+C+D+E+F	14354	5,78

A doit avoir 3 sièges et tous les autres 6 (car 5,78 est plus proche de 6 que 3,22 de 4). A aura 3 sièges et les autres partis doivent se répartir 6 sièges. Maintenant, B doit être confronté à tous les partis qui ont moins de sièges que lui :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	14354	6
B	4698	1,96
C+D+E+F	9656	4,04

B aura 2 sièges (1,96 est plus proche de 2 que 4,04 de 5) et les partis restants doivent se répartir 4 sièges. C doit être confronté à tous les partis qui ont moins de sièges que lui :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	9656	4
C	3651	1,51
D+E+F	6005	2,49

C aura 2 sièges (1,51 est plus proche de 2 que 2,49 de 3) et les partis restants doivent se répartir 2 sièges. D doit être confronté à tous les partis qui ont moins de sièges que lui :

Partis	Nombre de suffrages	Nombre de sièges
Total	6005	2
D	2612	0,87
E+F	3393	1,13

D aura 1 siège et les deux derniers partis doivent se répartir le dernier siège. C'est forcément E qui va l'avoir car il a plus de suffrages que F. Les 9 sièges sont attribués et on a finalement :

A = 3 sièges	D = 1 siège
B = 2 sièges	E = 1 siège
C = 2 sièges	F = 0 siège

Comparons les résultats :

Partis	Nombre de sièges (Plus Fort Reste)	Nombre de sièges (Plus Forte Moyenne)	Nombre de sièges (Genoud)
A	3	4	3
B	2	2	2
C	1	2	2
D	1	1	1
E	1	0	1
F	1	0	0

La méthode Genoud est bien un compromis entre les deux méthodes traditionnelles. Elle peut paraître un peu plus compliquée du point de vue mathématique mais, si nécessaire, un programme informatique pourrait facilement être créé pour effectuer les calculs[2].

Applications dans les classes

La répartition des sièges, en politique, au système proportionnel, est fort intéressante et peut être la source de multiples exercices. Voici quelques exemples :

1. Six personnes (A, B, C, D, E et F) doivent se partager 9 kilos d'or. Combien chacune va-t-elle recevoir de grammes d'or

2 Toutes les méthodes peuvent, exceptionnellement, conduire à une impasse. Dans ce cas, le législateur a prévu des règles particulières faisant appel parfois à un simple tirage au sort.

sachant que A, B, C, D, E et F ont droit respectivement à 8002 parts, 4698 parts, 3651 parts, 2612 parts, 1790 parts et 1603 parts ?[3]

2. Trois partis politiques A, B et C ayant obtenu respectivement 64, 31 et 15 suffrages doivent se répartir 5 sièges, dans un système proportionnel. Combien chaque parti va-t-il obtenir de sièges ?

3. En remplaçant, dans l'exercice 1, les personnes par les partis, les kilos d'or par des sièges et les parts par des suffrages, on obtient l'exercice qui nous a servi de modèle dans cet article. Une fois cet exercice résolu selon les trois méthodes, on peut demander de calculer le pourcentage de suffrages que compte chaque parti par rapport au nombre total de suffrages. Ensuite, on peut demander de calculer, selon les trois méthodes, le pourcentage de sièges obtenus par chaque parti par rapport au nombre total de sièges distribués.

4. Trois partis (A, B et C) ont obtenu respectivement 600, 400 et 200 suffrages pour 5 sièges à distribuer. Combien de sièges obtiendra chaque parti ?

5. Pourquoi, dans la méthode de la Plus Forte Moyenne, la méthode de la valeur étalon et celle utilisée par les politiciens conduisent aux mêmes résultats ?

6. Jules possède trois bouts de ficelle, de longueurs respectives 64 cm, 31 cm et 15 cm. Il souhaite les couper afin d'obtenir cinq morceaux d'égale longueur x. Il désire aussi que tous les bouts de ficelle restants (ceux qui ne font pas partie des cinq morceaux de même longueur) soient plus courts que x. Quelle longueur représente x ? Combien de morceaux de longueur x va-t-on obtenir avec chacun des trois bouts de ficelle ? Quel lien y a-t-il entre cet exercice et la répartition des sièges en politique ?

7. Quatre partis politiques A, B, C et D ayant obtenu respectivement 90'000, 7900, 1606 et 494 suffrages doivent se répartir 450 sièges, dans un système proportionnel utilisant la méthode du plus fort reste. Combien chaque parti va-t-il obtenir de sièges ? Combien chaque parti aurait-il obtenu de sièges s'il y avait eu 451 sièges à se répartir ?

Corrigé de cet exercice :

Somme des suffrages = 90'000 + 7900 + 1606 + 494 = 100'000.

Quotient électoral = 100'000 : 450 = 223.

A 90'000 : 223 = 403,59 --> A obtient 403 sièges

B 7900 : 223 = 35,43 --> B obtient 35 sièges

C 1606 : 223 = 7,20 --> C obtient 7 sièges

D 494 : 223 = 2,22 --> D obtient 2 sièges

Finalement, A obtient 404 sièges, B en a 36, C en reçoit 7 et D en acquiert 3.

447 sièges sont attribués. Au plus fort reste, ce sont les partis A, B et D qui obtiennent chacun un siège supplémentaire.

Reprenons nos calculs avec 451 sièges.

Quotient électoral = 100'000 : 451 = 222.

A 90'000 : 222 = 405,41 --> A obtient 405 sièges

B 7900 : 222 = 35,59 --> B obtient 35 sièges

C 1606 : 222 = 7,23 --> C obtient 7 sièges

D 494 : 222 = 2,23 --> D obtient 2 sièges

Finalement, A obtient 406 sièges, B en a 36, C en reçoit 7 et D en acquiert 2.

449 sièges sont attribués. Au plus fort reste, ce sont les partis A et B qui obtiennent chacun un siège supplémentaire.

Etonnamment, avec 451 sièges à répartir, D a un siège de moins que dans le cas d'une répartition de 450 sièges.

Cet exercice est une illustration du paradoxe de l'Alabama (une augmentation du nombre de sièges à distribuer peut conduire à perdre des sièges pour certains partis).

L'étude de la répartition des sièges au système proportionnel est riche d'enseignement et a permis de fructueuses discussions dans mes classes.

3 *Cet exercice a pour but de préparer l'exercice 3.*

Totems (5ème HarmoS) : Une activité mathématique pour apprendre à développer des stratégies de recherche

Lucie Passaplan

Etudiante à l'Université de Genève

Introduction

La résolution de problèmes au sens large (situation-problème, problèmes de réinvestissement…) occupe une place importante dans l'enseignement des mathématiques. De fait, le Plan d'Etudes Romand (PER) note comme visée prioritaire pour la discipline des mathématiques (MSN), dans le domaine de modélisation :

> *Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements […]*

Dans ce sens, les moyens d'enseignement romands s'appuient notamment sur des activités de résolution des problèmes ouverts, situations d'apprentissage qui font en effet travailler de multiples compétences, telles que chercher, faire des hypothèses, tester… Mais les savoirs en jeu dans ces situations sont difficiles à définir et l'absence d'indication pour mener la phase d'institutionnalisation, désignée par Brousseau (1998) comme étant « la prise en compte «officielle» par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître, de l'apprentissage de l'élève », semble induire une mise en place et une gestion délicates.

Dans le cadre d'une recherche pour l'élaboration de mon mémoire universitaire, je me suis intéressée à la thématique des problèmes ouverts en me questionnant sur la gestion d'une telle situation de résolution en classe, notamment par rapport à l'organisation du milieu didactique, ainsi qu'aux réels savoirs en jeu. L'expérimentation de Totems (Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1998, p. 118) a été organisée dans deux classes de division moyenne de 5ème HarmoS d'une école genevoise, gérées par des enseignantes en début de carrière. L'article ci-dessous propose un résumé de mon travail.

Activité proposée

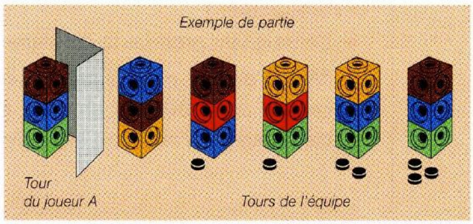
Totems figure dans les moyens d'enseignement de mathématiques de 3P, module 1 « Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement », qui a comme objectif d'« exercer [un] raisonnement au travers d'activités qui demandent de lire, mettre en relation, classer, organiser des informations et utiliser des représentations personnelles pour se rappeler ou communiquer des informations » (Gagnebin, Guignard & Jaquet, 1997, p. 31). Voici l'énoncé :

Totems

Règles du jeu pour 3 joueurs (A, B et C)

Matériel: environ 50 multicubes répartis en 5 couleurs, environ 20 jetons

- Sans le montrer, le joueur A fabrique une tour de 3 cubes de couleurs différentes.
- Les joueurs B et C forment une équipe. Ils doivent trouver la tour cachée. À chaque essai, ils fabriquent une tour de 3 cubes et la montrent au joueur A.
- Le joueur A compare cette tour à celle qu'il a cachée et indique à l'aide de jetons combien de cubes sont bien placés.



- Quand B et C ont trouvé, on compte le nombre de tours qu'ils ont dû fabriquer et on échange les rôles.

Le but est de trouver la tour cachée en fabriquant le moins possible de tours.

118

Le but de l'activité consiste donc à découvrir la combinaison de trois cubes de couleurs différentes parmi les cinq à disposition, en proposant des totems et en exploitant les rétroactions, celles-ci étant données par le constructeur du totem grâce à des retours sous forme d'un jeton pour chaque cube correctement placé. Il existe, selon cet énoncé, 60 totems différents constructibles (5 x 4 x 3).

Analyse a priori

Connaissances pré-requises et savoirs visés

Totems ne demande a priori que peu de pré-requis de la part des élèves. Faisant référence au PER quant aux savoirs et compétences utiles pour cette activité, ils doivent tout de même, afin d'être capables de résoudre la situation, se poser des questions et définir un cadre d'étude, imaginer et éventuellement utiliser des représentations visuelles (codes, schémas, …), identifier les invariants de la situation, trier et organiser des données, se confronter au concept du probable, ainsi que communiquer leurs résultats et leurs interprétations : c'est vraiment la recherche et la mise en œuvre d'une démarche qui sont testées. En outre, Totems mobilise les capacités transversales suivantes : la collaboration et la communication entre pairs, l'élaboration d'une stratégie d'apprentissage et la pratique d'une démarche réflexive. Je note donc que que cette activité, proposée déjà en 1998, répond tout à fait aux exigences du PER.

Description des variables didactiques

En étudiant l'activité, j'ai pu mettre en évidence certaines variables didactiques :

- le nombre n de cubes dans un totem,
- le nombre p de couleurs possibles,
- la possibilité ou non de répéter la couleur.

Selon les valeurs numériques des deux premières variables et l'option choisie pour la troisième, il est possible de déterminer le nombre de totems constructibles ; d'une part, s'il n'y a pas la possibilité de répéter une couleur, le nombre de totems possibles est p s'il n'y a qu'un cube, p(p-1) s'il y en a deux, et plus généralement p(p-1)…(p-n+1) pour n cubes et p couleurs quelconques avec $p \geq n$; d'autre part, s'il y a la possibilité de répéter une couleur, le nombre de totems possibles est p^n. Pour que l'activité soit jouable et compatible avec le niveau des élèves, il faut que le nombre de totems constructibles ne soit ni trop faible (au moins 20), ni trop élevé (pas plus de 150) ; de fait, les valeurs choisies dans les moyens d'enseignement romands satisfont aux critères cités.

En plus des variables nommées ci-dessus, je me suis intéressée à deux autres portant sur l'organisation didactique de l'activité ; premièrement, la forme des retours pour lesquels plusieurs valeurs sont envisageables :

- indiquer le nombre de cubes de couleurs correctement positionnés grâce à un ou des jeton(s), comme le stipule l'énoncé,
- indiquer la position de la couleur correcte, les élèves-constructeurs disposant d'une grille de position représentant les trois étages et plaçant le jeton sur l'étage correspondant,
- indiquer toutes les couleurs correctes présentes dans le totem, y compris les mal placées, avec des jetons de couleurs différentes,
- indiquer toutes les couleurs correctes bien et mal positionnées présentes dans le totem, ainsi que les positions grâce aux jetons de couleurs différentes et à la grille de position.

Deuxièmement, concernant l'organisation sociale : il faut au moins un élève-constructeur et un élève-chercheur. Il n'y a, a priori, pas de raison d'avoir plus d'un constructeur, sauf s'il s'avère utile de valider les retours. Concernant les chercheurs, l'organisation préconisée est de deux chercheurs et permet une verbalisation et une confrontation des procédures. J'ai aussi organisé la mise en place d'une partie collective (groupe classe vs enseignante) et d'une partie avec des équipes jouant simultanément les rôles de constructeurs-chercheurs.

Déroulement prévu de la 1ère séance

Afin de m'inscrire dans les moyens d'enseignement romands, j'ai repris les différentes phases décrites pour la résolution de problèmes ouverts dans les documents y relatifs (Gagnebin, Guignard & Jaquet, 1997), à savoir : la phase d'appropriation, avec comme objectif la lecture et la compréhension du problème par les élèves, ainsi que l'explication par l'enseignante de l'utilisation de la fiche de report[1]; la phase de recherche, dans le but de mettre en action les élèves, afin qu'ils agissent sur le milieu pour trouver des procédures de résolution; la phase de formulation, prenant place sous la forme d'une partie publique de Totems : ce moment collectif doit permettre la verbalisation de l'interprétation des jetons, l'explicitation et le partage de procédures pour donner des pistes d'action aux élèves. A la fin de ce moment, si aucune piste de codage n'est apparue, l'enseignante distribue la fiche comprenant l'ensemble des totems possibles, dont les couleurs sont codées par des lettres, qui doit permettre aux élèves de se représenter le champ des possibles et de visualiser la réduction des possibilités au fil des retours[2]. Puis, une nouvelle phase de recherche a lieu avec une partie deux contre deux, les élèves étant simultanément constructeurs et chercheurs; ce temps doit permettre aux élèves de réinvestir les stratégies expliquées précédemment et les inciter à trouver des méthodes de résolution plus rapides. A la fin de la séance est prévue une phase de validation au sens large du terme, avec une mise en évidence des procédures efficientes et du facteur chance, l'expression des erreurs ou des difficultés récurrentes.

Déroulement prévu de la 2ème séance

Après une courte phase d'appropriation pour rappeler les règles de l'activité, l'exercice Totems maudits[3] est introduit; la recherche se déroule en duo et il est prévu que les élèves contrôlent leurs réponses à l'intérieur du groupe. La séance prend fin avec une phase de formulation et validation qui sert à expliciter et justifier les procédures, marquer les différences entre Totems et Totems maudits et verbaliser ce que les élèves ont retenu (Annexe I).

---

1 Cette fiche, créée pour l'expérimentation, m'a permis de porter un regard sur l'ensemble des parties et d'analyser les procédures des élèves.

2 Il est bien entendu que cette représentation peut être matérialisée sous d'autres formes.

3 Cette fiche, créée par mes soins mais inspirée d'une activité existante dans COROME, comprend une subtilité avec la question : « Est-ce possible de trouver le totem caché au prochain essai? ».

Analyse a posteriori

Déroulement effectif de la 1ère séance

Après lecture de l'énoncé, certains élèves ont pu reformuler les données et le but de l'activité ; puis, la phase de recherche a débuté et duré environ 30 minutes. La partie publique qui suit n'a pas été gérée de la même manière par les enseignantes : l'une a demandé d'expliciter toutes les propositions en fonction des retours reçus, l'autre a laissé les élèves seuls responsables de la résolution et est revenue sur la partie une fois le totem trouvé. Les enseignantes ont ensuite introduit la fiche de codage et un autre moment de recherche est mis en place, avec une organisation deux contre deux : j'ai observé davantage de verbalisations entre les pairs, mais aussi que la fiche de codage n'a pas été utilisée à bon escient par les élèves, point sur lequel les enseignantes n'ont pas insisté. La dernière phase, celle de validation, n'a pu avoir lieu, faute de temps.

Déroulement effectif de la 2ème séance

Etant donné qu'aucune validation n'a eu lieu durant la première leçon, cette séance commence par une partie publique de Totems gérée de la même manière que la précédente. Suit un temps de validation avec le même objectif que lors de la première leçon et se déroulant très rapidement. Puis, comme prévu, les enseignantes introduisent la fiche Totems maudits et la recherche peut débuter. Si je me penche sur les réponses des élèves, ils ont, d'une manière générale, bien réussi à identifier les totems cachés. Toutefois, seuls deux groupes sont parvenus à détecter la subtilité en donnant les différentes réponses encore possibles ; en effet, la plupart des élèves se sont contentés de la première réponse trouvée. Après 30 minutes de recherche, une enseignante décide d'organiser une discussion sur la tâche, alors que l'autre, bénéficiant de plus de temps, choisit de corriger les totems et de conclure par un débat sur les stratégies pour les deux activités.

Stratégies observées de Totems

Il y a dans l'activité Totems une part de hasard irréductible, puisqu'il est possible que le premier totem proposé soit le bon. De fait, il n'est ni possible de définir une hiérarchisation stricte des stratégies, ni d'en désigner une gagnante, mais seulement de les comparer en termes de probabilités, de réduction du champ des totems possibles. J'ai ainsi pu dégager certaines procédures observées lors de l'expérimentation :

- procédures inefficaces : mettre de côté les totems recevant zéro jeton en retour, comme s'ils ne donnaient aucune information, ou ne jamais prendre en considération les jetons, ce qui conduit à proposer des totems au hasard,
- procédures passablement efficaces : tenir compte systématiquement de tous les retours,
- procédures efficaces : proposer des totems en regard des retours, c'est-à-dire lorsqu'il y a zéro ou deux jetons, les prendre en considération, mais lorsqu'il n'y en a qu'un, ne pas chercher à tout prix à identifier de quel cube il s'agit,
- procédures très efficaces, qui n'ont été que rarement observées : proposer un coup perdant, totem ne correspondant pas aux retours reçus ou avec répétition de couleurs[4]; il permet de confirmer la position d'un cube ou de définir les couleurs présentes dans le totem, données facilement mémorisables et directement exploitables.

D'une manière générale, les premiers retours ne donnent pas suffisament d'informations fiables pour conditionner les propositions de totems et il est donc judicieux de ne les considérer qu'à partir du 3ème ou 4ème essai.

Synthèse de l'expérimentation

Il n'est pas aisé d'extraire des résultats significatifs de cette expérimentation. Je note tout de même que la plupart des élèves ont été capables d'effectuer des hypothèses en organisant les données à leur disposition, mais que seuls certains d'entre eux ont démontré qu'ils étaient en cours de développement de la notion d'apodicticité, qui demande d'extraire les solutions à caractère nécessiteux[5], de rester dans le registre du rationnel en énonçant les solutions restantes ou en affirmant que le totem proposé était le dernier possible. De plus, aucun élève n'a trouvé un moyen de représenter les informations concernant le totem à découvrir.

L'activité Totems a un grand potentiel didactique qui, à mon avis, n'a pas été complètement exploité. Plusieurs raisons à cela : les élèves n'avaient peut-être pas, à ce moment de l'année, les compétences nécessaires pour démontrer une progression dans leurs procédures de résolution; quant aux enseignantes, je pense qu'elles sont restées dans une logique de jeu, avec une gestion difficile, dans le feu de l'action. Elles ont également manqué de conviction par rapport à la fiche de codage, dont elles n'ont, selon moi, pas évalué le gain; je peux de fait penser que l'introduction de cet outil leur demandait un important investissement pour l'intégrer dans la leçon ou peut-être estimaient-elles qu'il était trop éloigné de leur pratique ou des compétences des élèves.

Conclusion

Les savoirs en jeu pour la résolution de problèmes ouverts sont d'ordre méthodologique, chercher, effectuer des essais, formuler des hypothèses, argumenter et prouver, ainsi que transversal, correspondant plus à des habiletés sociales ; en plus du hasard et du manque de stratégie gagnante pour Totems, l'absence de savoir mathématique notionnel à institutionnaliser génère une gestion difficile pour les enseignants, qui proposent alors ces situations comme des activités à part, la mise en place s'évaluant par le niveau de participation des élèves et une certaine réussite superficielle des tâches. Pour améliorer ces pratiques, il me semble qu'une clarification des enjeux et un matériel didactique plus important permettant d'enrichir le milieu sont nécessaires pour favoriser, chez les élèves, de nouvelles stratégies de recherche.

4 *A noter que dans la consigne, aucune précision n'est donnée sur la composition des totems proposés.*

5 *« Si A est nécessairement vrai (au sens « il ne peut être autrement »), non A ne peut pas aussi être nécessairement vrai » (Hersant, 2010, p. 37).*

Références

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Livre de l'élève. Mathématiques 3P*. Neuchâtel : COROME.

Gagnebin, A., Guignard, N., Jaquet, F. (1997). *COROME : Apprentissage et enseignement des mathématiques : commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire,* Bienne : Ediprim SA.

Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en mathématiques. Mémoire complémentaire pour l'habilitation à diriger des recherches en Sciences de l'Education*, Université de Nantes.

httttp://www.plandetudes.ch/web/guest/mathematiques (consulté le 19.10.12)

Annexe I

Totems maudits

Voici les premiers essais d'une partie de « Totem ». On joue avec les règles suivantes :

- il y a 3 étages,
- il y a 5 couleurs possibles,
- on ne peut pas répéter la même couleur dans une tour.

Est-ce possible de découvrir le totem caché au prochain essai ? Si oui, désigne-le !

R = rouge V = vert J = jaune B = bleu O = orange

Totem A

R	R	B	J	V	
V	O	V	R	R	
O	V	J	B	O	
•	---	---	•	•	

Totem B

B	V	
J	J	
O	O	
••	••	

Totem C

O	R	O	
J	J	J	
V	V	B	
••	•	•	

Totem D

O	J	R	V	
J	V	J	J	
B	B	O	O	
•	---	••	••	

Totem E

J	O	R	O	O	
O	V	V	B	J	
R	B	O	J	V	
---	•	---	•	••	

Calculatrice et Plan d'Etudes Romand (PER[1]) De la décomposition des nombres à la simplification des fractions

Ruhal Floris[2]

Institut Universitaire de Formation des Enseignants de Genève

Ce texte inaugure une série d'articles ayant pour but de faire des propositions d'intégration de la calculatrice dans l'enseignement secondaire inférieur, en tenant compte du PER et des nouveaux moyens d'enseignement. Les sujets choisis ici concernent la 9ème et la 10ème année et font partie du thème NO, Nombres et Opérations. Dans un premier temps nous rappelons le contenu du PER et le mettons en lien avec une catégorisation des utilisations de la calculatrice proposées dans le curriculum genevois en vigueur avant le PER.

Nous présentons ensuite une analyse didactique de deux thèmes, décomposition des nombres et simplifications des fractions - fortement en lien l'un avec l'autre - et nous montrerons comment ils peuvent être l'occasion d'utiliser la calculatrice de façon intéressante.

Calculatrice et plan d'études

Notons tout d'abord que le PER prévoit dans les commentaires généraux la mise à disposition d'une calculatrice, sans préciser à quel moment, ni quel type de calculatrice[3]. Plus précisément, cette dernière est mentionnée dans le thème « Nombres » (MSN 32) où parmi les attentes fondamentales on lit :

Utilise les fonctions de base de la calculatrice (+;–; x ; ÷ ; racine ; puissance ; mémorisation ;…) et met en lien le résultat obtenu avec le résultat attendu.

Quant aux apprentissages mentionnés (pour les degrés 9 à 11, sans précision supplémentaire) ce sont :

- utilisation de la calculatrice dans des situations où l'aspect calculatoire est secondaire, pour vérifier le résultat d'un calcul ou pour effectuer des calculs complexes.
- acceptation ou refus d'un résultat par l'estimation de l'ordre de grandeur, la connaissance des opérations ou la confrontation au réel.
- connaissance et utilisation de diverses fonctions de la calculatrice : quatre opérations de base, parenthèses, mise en mémoire et récupération de valeurs, puissance, racine,…
- prise en compte de l'ordre dans lequel la calculatrice effectue les opérations.

Dans MSN 33 « Opérations », mention est faite parmi les objectifs du thème :

Résoudre des problèmes numériques et algébriques (…) en construisant, en exerçant et en utilisant des procédures de calcul (calcul réfléchi, algorithmes, calculatrice, répertoire mémorisé) avec des nombres réels.

Et les attentes fondamentales sont :

- utilisation de représentations et d'outils de calculs appropriés
- estimation et vérification de la pertinence du résultat

Il est intéressant d'effectuer une comparaison avec le Curriculum genevois 2003-2004 (DIP-Genève, 2003)[4], dans lequel figurait une partie explicite de trois pages concernant la calculatrice dans laquelle quatre types d'utilisation avaient été identifiés :

1) Permettre aux élèves de manipuler correctement une calculatrice.

2) Permettre aux élèves d'avoir un regard critique sur les résultats affichés par la calculatrice.

3) Décharger partiellement les élèves des

1 www.plandetudes.ch/web/guest/mathematiques

2 Ruhal.Floris@unige.ch

3 A Genève, la CEM (commission pour l'enseignement des mathématiques) fait une proposition de modèle sur la base d'un cahier des charges précis : le modèle actuel est la TI-30XS Multiview.

4 www.ssrdm.ch/ressources/doc_admin_utiles/PE_Math_CO_2003.pdf

calculs pour leur permettre de se consacrer plus à la réflexion et à la démarche mathématique.

4) Utiliser la calculatrice comme moyen participant à l'apprentissage de notions mathématiques.

Les trois premiers sont reformulés et repris dans le PER. Le quatrième ne l'est pas, il est inclus implicitement dans l'objectif de résolution de problèmes par différents outils. Nous donnerons quelques exemples dans cet article et les suivants.

La décomposition d'un nombre entier. Eléments mathématiques et didactiques.

L'écriture d'un nombre entier sous forme d'un produit de facteurs premiers permet de simplifier le travail sur les produits, les multiples et les diviseurs. Elle permet aussi de trouver des formes réduites pour des quotients ou des racines. Il s'agit d'initier l'élève à ce qu'on peut appeler la « pensée » algébrique, avec l'idée d'écrire différemment les nombres selon les propriétés que l'on veut mettre en évidence[5]. Cela permet de donner au signe d'égalité une nouvelle signification : ce n'est plus simplement le résultat d'un calcul. Nous retrouvons cette intention dans le PER (MSN 32) sous la forme suivante :

> *Connaissance et utilisation de différentes écritures d'un même nombre.*

D'un point de vue socio-culturel, la décomposition est à la base des modalités permettant l'identification de l'utilisation d'une carte bancaire. Certes, une connaissance détaillée du fonctionnement des systèmes que l'on utilise n'est pas indispensable, mais ce que l'on vise ici, c'est plutôt celle de leurs principes, de sorte qu'on comprenne pourquoi on peut leur faire confiance. Dans ce cas, c'est la difficulté de factoriser des grands nombres qu'il est judicieux de faire connaître. Bien entendu, la décomposition a également un intérêt pour la théorie des nombres, mais nous ne développons pas cet aspect ici.

Rappelons qu'il existe une technique de base « naïve » permettant d'obtenir la décomposition d'un nombre, consistant à le diviser par tous les nombres entiers successifs supérieurs à 1, dans l'ordre. Lorsque le quotient obtenu est entier, on recommence l'opération avec ce quotient, en repartant avec le diviseur trouvé. On s'arrête lorsque le quotient est égal à 1 (le diviseur est égal au nombre donné). Le produit des diviseurs ainsi déterminés est égal au nombre de départ et la décomposition est unique :

Nous désirons factoriser 9438.

9438/2 = 4719 sans reste donc 2 est un facteur.

Nous répétons l'algorithme avec 4719.

4719/2 = 2359,5 donc 2 n'est plus un facteur.

4719/3 = 1573 donc 3 est un facteur.

1573/3 = $524,\overline{3}$ donc 3 n'est plus un facteur.

1573/4 = 393,25 donc 4 n'est pas un facteur.

1573/5 = 314,6 donc 5 n'est pas un facteur.

De manière similaire jusqu'à

1573/11 = 143

Le nombre suivant qui divise 143 est à nouveau 11 :

143/11 = 13

13/11 = $1,\overline{18}$ donc 11 n'est plus un facteur

13/12 = $1,08\overline{3}$ donc 12 n'est pas un facteur

et 13/13 = 1. Stop !

En récapitulant, nous avons 9438 = $2\times3\times11\times11\times13 = 2\times3\times11^2\times13$

Figure 1 Décomposition de 9438 par la technique de base « naïve »

Les nombres obtenus sont tous premiers, par définition. En effet si on obtenait un nombre non premier, il serait produit d'au moins deux nombres entiers que l'on aurait obtenus précédemment puisqu'ils sont plus petits et que l'on procède dans l'ordre. Si on ne trouve aucun diviseur, on sait que le nombre de départ est premier.

Certes, ces considérations ne suffisent pas à prouver rigoureusement l'existence et l'unicité de la décomposition, mais elles permettent de s'en convaincre.

L'utilisation de propriétés arithmétiques

5 Par exemple 42=2x21 met en évidence que 42 est pair.

permet d'améliorer l'efficacité de la technique. Par exemple, si un nombre n est divisible par 9, il est divisible deux fois par 3. On aura donc déjà obtenu le facteur 3. Il n'est ainsi pas nécessaire de diviser par des nombres non premiers (cf. crible d'Eratosthène). De plus, puisqu'à chaque diviseur d obtenu correspond un autre diviseur tel que leur produit soit égal à n, lorsque cet autre diviseur est plus petit que d, on peut s'arrêter.

Cette technique peut être améliorée en utilisant certains critères de divisibilité, en particulier pour 2, 3 et 5. Sachant que pour n aléatoire il existe 50 % de chances que 2 soit un facteur de n, et 33 % de chances que 3 soit un facteur, et 20% de chances que 5 soit un facteur, cette amélioration sera en général importante. Il est également intéressant de savoir que 88 % de tous les entiers positifs ont un facteur inférieur à 100, et que 91 % ont un facteur inférieur à 1 000 (« Divisions successives », Wikipedia).

Nous désirons factoriser 9438.

Le nombre est pair donc 2 est un facteur. 9438/2 = 4719

Le nombre 4719 est impair, on passe au diviseur 3. La somme des chiffres est divisible par 3, donc 3 est un facteur. 4719/3 = 1573. La somme des chiffres n'est pas divisible par 3, donc 3 n'est plus un facteur.

1573 n'est pas pair donc 4 et tous les nombres pairs ne sont plus des facteurs.

1573 ne se termine ni par 0 ni par 5 donc 5 n'est pas un facteur.

On saute 6 car il est pair. 1573/7 = 224,71.. donc 7 n'est pas un facteur.

On saute 9 (=3x3), 8 et10, pairs, sont éliminés.

1573/11 = 143. Le nombre suivant qui divise 143 est à nouveau 11 :

143/11 = 13

13/11 = $1,\overline{18}$ donc 11 n'est plus un facteur et le quotient est inférieur au diviseur. Stop !

Figure 2 Décomposition de 9438 par une technique utilisant des propriétés numériques

L'utilisation du critère de divisibilité par 11 permet d'éviter le dernier calcul. Alors que la technique précédente demandait 16 divisions, 6 sont ici suffisantes. Nommons cette technique la technique standard. Cette technique est celle qui est présentée dans l'Aide-mémoire des moyens d'enseignement romands (CIIP, 2011) sous la forme bien connue d'un algorithme en deux colonnes ou, moins usitée, selon le développement d'un arbre.

Cependant, selon les nombres considérés, d'autres techniques sont plus efficaces. Pour les nombres en dessous de 90 ou pour certains carrés parfaits bien connus, on peut utiliser la table de multiplication :

49 = 7×7 ou encore 42 = 6×7 = 2×3×7

Lorsqu'un nombre proposé (impair) est absent de la table (au niveau des résultats) on peut conclure à sa primalité.

Pour des nombres plus grands multiples de 2, 3, 5, 10 on peut se ramener à effectuer la recherche pour un nombre plus petit. Par exemple, avec 84 une fois noté que 84=2×42 on peut ainsi se ramener à la technique précédente (de la table).

Idem pour 4200 = 42×100 = 6×7×10×10 = 2×3×7×2×5×2×5 = 2×2×2×3×5×5×7.

Ainsi, selon le type de nombre, certaines techniques seront plus efficaces que d'autres.

Quelles sont les techniques enseignées ?

Le PER indique, dans MSN32 (« Nombres »), les apprentissages suivants :

> *Critères de divisibilité, multiples et diviseurs communs (pour tous les niveaux); ppmc, pgdc, nombres premiers, produit de facteurs en 9ème pour les niveaux 2 et 3 et en 10ème pour le niveau 1.*

Et dans les attentes fondamentales, on trouve :

> *Décompose un nombre inférieur à 1000 en produit de facteurs premiers.*

Le plan d'études est cependant muet sur ce que serait une technique « officielle »[6]. La question est de savoir si l'on attend que l'élève sache décomposer n'importe

6 Dans le Curriculum genevois de 2003, page 14, on constate par contre que la décomposition fait explicitement partie des techniques à enseigner.

lequel de ces nombres, même 991 qui est premier et pour lequel au moins 10 divisions sont nécessaires ou encore 899 = 29×31. Un examen des moyens d'enseignement peut fournir des indices concernant le choix implicitement favorisé. A cet égard, l'exercice NO50 (9$^{\text{ème}}$ année) est intéressant :

Décompose les nombres suivants en un produit de facteurs premiers :

12; 49; 54; 84; 180; 525; 600; 4200; 4700; 150 000

On se rend rapidement compte que tous les items de cet exercice peuvent être traités par les techniques alternatives à la technique standard (présentée ci-dessus). Et en 10$^{\text{ème}}$ année, l'exercice NO15 propose :

Les nombres suivants sont-ils premiers ? Dans le cas contraire, donne leur plus petit diviseur différent de 1. 13 ; 18 ; 23 ; 27 ; 43 ; 81 ; 89 ; 101 ; 169 ; 319 ; 405

Il n'y a ici que deux nombres un peu « délicats » à traiter : 101, 319.

Ce qui précède nous permet de conclure que la technique standard n'est pas toujours enseignée, et que l'attente du PER concernant la décomposition de nombres au dessous de 1000 se limite à ceux qui n'ont pas plusieurs facteurs dépassant 10. Cette impression est renforcée par les valeurs proposées dans la fiche de fin de thème en 10$^{\text{ème}}$ « faire le point » : 36; 42; 180; 68 et par les commentaires pour le maître du livre de 10$^{\text{ème}}$ (Figure 3). Cependant, dans le PER il n'y a pas de restriction sur la valeur des nombres :

Identifier un nombre premier.

Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

En définitive, certains élèves pourraient retenir que le domaine des nombres que l'on peut décomposer et donc celui des nombres premiers que l'on peut déterminer est limité. Par la suite, le domaine des fractions simplifiables sera également limité et il ne sera pas évident pour l'élève que toute

NOMBRES DÉCIMAUX **COMMENTAIRES 10$^{\text{e}}$**

Nombres premiers, ppmc et pgdc LEp14

Cette balise permet aux élèves de Niveau 1 de découvrir les notions de nombres premiers, pgdc et ppmc. Elle offre la possibilité de réactiver ces connaissances abordées en 9$^{\text{e}}$ pour les élèves des Niveaux 2 et 3. (cf. « Progression des apprentissages différenciés » dans les commentaires du chapitre).

Les nombres premiers sont sources d'innombrables travaux, tant leur répartition et leurs propriétés ont fasciné les mathématiciens. Pour les élèves, l'enjeu principal à la connaissance des nombres premiers réside surtout dans le fait de connaître les plus petits d'entre eux (**NO14** à **NO16**) en vue de faciliter la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers (**NO20 Décompositions**) et éventuellement de calculer le ppmc et pgdc à l'aide de cette décomposition (**NO21** à **NO24**).

Les notions de ppmc et pgdc sont ensuite réinvesties dans des problèmes (**NO25** à **NO27**). Ces problèmes peuvent être proposés aussi bien aux élèves de Niveau 1 qu'à ceux des Niveaux 2 et 3.

Institutionnalisation

Au cours de cette balise il sera possible, pour les élèves de Niveau 1, d'institutionnaliser les notions de nombres premiers (*Aide-mémoire*, p. 16), ppmc (*Aide-mémoire*, p. 14) et pgdc (*Aide-mémoire*, p. 16). On peut aussi institutionnaliser une méthode de décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers (*Aide-mémoire*, p. 17).

Figure 3 Commentaires pour le maître, 10$^{\text{ème}}$

fraction peut être rendue irréductible. C'est ce que nous montrons dans la suite de l'article.

Et la calculatrice dans tout cela ?

Elle n'est certes pas nécessaire pour effectuer les décompositions demandées dans ces exercices, mais peut être employée pour les vérifier. Elle pourrait être introduite si l'exercice NO50 était complété par des items plus compliqués tels que 93960 = 2^3 x 3^4 x 5 x 29, en restant dans le domaine des techniques alternatives. Nous suggérons son utilisation pour introduire et motiver la technique standard en proposant des nombres comportant plus de deux facteurs premiers différents de 2, 3 et 5, tels que 203 = 7 x 29, 221 = 13 x 17, 3654 = 2 x 32 x 7 x 29, etc. Dans ce cas, il s'agit bien d'une utilisation de la calculatrice participant à l'apprentissage des mathématiques (4ème type d'utilisation, voir au début de l'article). On utilise l'efficacité de la calculatrice pour apprendre une technique générale sans effectuer trop de calculs « à la main », pour se rendre compte que l'on peut déterminer la primalité de nombres aussi grands qu'on veut, si on a le temps pour les calculs.

Discussion sur l'utilisation de la calculatrice

D'une part effectuer des décompositions sans calculatrice est rapidement coûteux en calculs et il est prévisible que l'on ne demandera pas à l'élève de décomposer des multiples de nombres premiers trop grands. On a souvent remarqué que les élèves ne continuent pas les recherches au-delà de la division par 11 ou 13. Avec la calculatrice, on peut proposer des cas plus complexes : 211, 221. Le désavantage est que dans ce cas, diviser étant devenu facile, l'élève ne soit plus poussé à utiliser des propriétés pour limiter ses essais et qu'il revienne à la technique naïve, de « pêche » aux réponses. Une telle conduite régressive est souvent observée lorsque le coût de calcul est faible (Weiss & Floris, 2008). Afin d'inciter les élèves à passer de la technique « naïve » à la technique standard en exploitant les critères de divisibilité, l'enseignant pourra prévoir d'organiser des défis « qui fait le moins de divisions ? » ,voire des phases de formulation, c'est à dire des défis entre groupes avec des phases de compétition entre un représentant de chaque groupe et des phases de concertation dans les groupes selon le schéma de Brousseau dans la course à 20 (Brousseau, 1998, pages 25-41).

Quel sens donner à la décomposition ?

Les activités, NO48 et NO49 sont proposées dans le livre de 9ème afin de donner du sens à la recherche de décompositions (selon les commentaires pour le maître). Nous suggérons une démarche alternative, plus ludique, avec une exploitation de la calculatrice, adaptable à tous les niveaux, à même de travailler l'objectif du PER. Il s'agit de « plus vite à zéro » activité tirée des travaux de Kieran, C., & Guzman, J. (2007) et mise en forme pour la semaine des mathématiques genevoise de 2007 (CEM, 2007)[7].

De la décomposition à la simplification des fractions

Les réflexions effectuées ci-dessus à propos des différentes techniques se retrouvent pour la simplification de fractions :

Pour la plupart des valeurs numériques en dessous de 100, les procédures de division sont facilitées car les élèves peuvent se baser sur les tables de multiplication

63/27 = (7x9/(3x9) = 7/3

Lorsque les valeurs choisies comportent dans leur décomposition uniquement (ou presque) des puissances de 2, 3, 5 voire 11 les divisions successives sont facilitées (utilisation de critères de divisibilité) :

128/512 = 64/256 = 32/128 = 16/64 = 8/32 = 4/16 = 2/8 = 1/4

ou 450/75 = 90/15 = 18/3 = 6

ou 588/126 = 294/63 = 98/21 = 14/3

Lorsque les valeurs choisies comportent dans leur décomposition en grande partie d'autres valeurs que des puissances de 2, 3, 5 voire 11, la décomposition est favorisée, voire unique possible :

7 *www.ssrdm.ch/ressources/activites_calc/Plus_vite_a_zero_7H13H.zip (versions doc et pdf) ou www.ssrdm.ch/ressources/activites_calc/Plus_vite_a_zero_7H13H.pdf*

$637/1183 = (7^2 \text{x} 13)/(7 \text{x} 13^2) = (7 \text{x} 7 \text{x} 13)/(7 \text{x} 13 \text{x} 13) = (7/7) \text{x} (7/13) \text{x} (13/13) = 7/13$

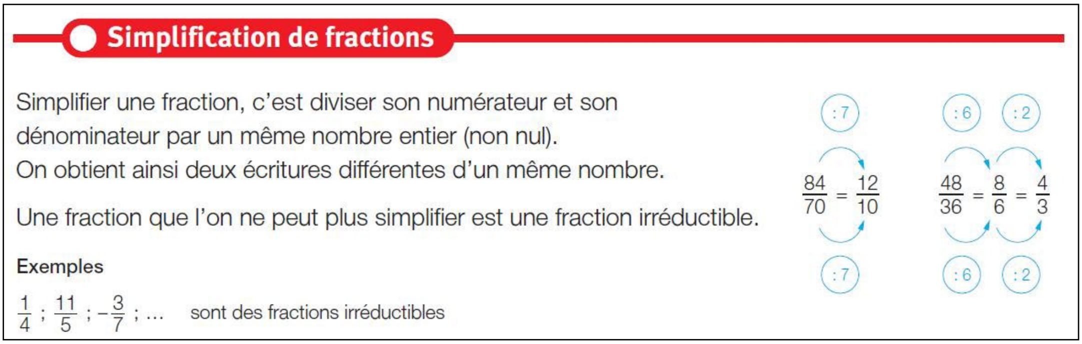
$588/826 = (2 \text{x} 294)/(2 \text{x} 413) = 294/413 = (2 \text{x} 3 \text{x} 7^2)/(7 \text{x} 59) = 42/59$[8]

(méthode mixte)

Lorsque l'une des valeurs choisies est un nombre premier connu ou obtenu dans une table, on peut immédiatement conclure à l'irréductibilité.

L'examen des exercices proposés dans le livre et le fichier de 10ème montre que la recherche de diviseurs communs peut se faire la plupart du temps sans exploiter la technique standard de décomposition. Une des conséquences de ce « choix » est qu'il n'est plus possible ainsi d'être sûr d'avoir effectivement obtenu une fraction irréductible et l'aide mémoire renforce cette ambigüité :

connaître ce que serait une technique officielle. C'est donc au maître de choisir, en déterminant précisément ses objectifs : s'il s'agit de conduire les élèves à savoir comment il est possible de décomposer n'importe quel nombre entier en facteurs premiers et à savoir le faire pour les nombres de 1 à 1000. Un travail sur la technique standard est incontournable, et la calculatrice est ici un outil permettant de se focaliser sur les mathématiques. Il en va de même à propos de l'irréductibilité des fractions. Du point de vue didactique, ce texte montre que selon les techniques que l'on utilise, et les propriétés qui les justifient, la conceptualisation mathématique peut être très différente.


Simplification de fractions

Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier (non nul).
On obtient ainsi deux écritures différentes d'un même nombre.

Une fraction que l'on ne peut plus simplifier est une fraction irréductible.

Exemples

$\frac{1}{4}$; $\frac{11}{5}$; $-\frac{3}{7}$; … sont des fractions irréductibles

$$\frac{84}{70} \overset{:7}{=} \frac{12}{10} \qquad \frac{48}{36} \overset{:6}{=} \frac{8}{6} \overset{:2}{=} \frac{4}{3}$$

Figure 4 Dans l'Aide-mémoire. Mais comment est-on sûr que l'on ne peut plus simplifier ?

De la même manière qu'avec la décomposition, la calculatrice peut être intégrée en l'associant à des valeurs numériques rendant inexploitables d'autres techniques que la technique standard, par décomposition complète d'au moins un des nombres

91/26 ; 637/1183 ; 588/826

En conclusion,

Nous avons mis en évidence différents types de techniques tant pour la recherche de nombres premiers et la décomposition de nombres entiers que pour la simplification de fractions. L'examen du PER et des ressources officielles ne permet pas de

Références

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CIIP (2011). *Aide-mémoire (Mathématiques 9-10-11)*.

DIP-Genève (2003). *CURRICULUM DE MATHÉMATIQUES 7ème 8ème 9ème*.

Weiss, L. & Floris, R. (2008). Une calculatrice pour simplifier des fractions : mise en évidence de techniques inattendues. *Petit x, 77*, 49-75.

www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/77/77x5.pdf

8 *Il est judicieux que l'enseignant réfléchisse à l'opportunité d'abolir une écriture telle que (588:2)/(826:2), écriture qui ne fait pas de lien avec la décomposition. Sa promotion dans l'Aide-mémoire (Fig. 4) est discutable.*

Le Kasan Kurosu ou le jeu des sommes croisées

(Partie 2)[1]

Valentina Celi

Université de Bordeaux - IUFM d'Aquitaine - LACES, E3D

Le Kasan Kurosu est un casse-tête qui, importé en 1980 des États-Unis, est toujours en vogue au Japon. Sous le nom de Kakuro, il n'est arrivé en Europe qu'en 2005. Dans ce texte, suite de l'article publié dans le n° 219 de Math-École (pp. 16-22), nous présentons quelques compléments. Après avoir rappelé les règles du jeu, nous proposons une variante et puis un exercice guidé ; nous terminons en offrant au lecteur quelques grilles à remplir.

Une curieuse symétrie (solution du numéro 219)

Dans l'article publié dans le n° 219 de cette revue, nous avons proposé au lecteur de déterminer toutes les séries possibles de deux cases (n=2) correspondant à N (entier naturel) qui varie entre 6 et 15[2].

Nous les présentons dans le Tableau 1 en complétant la liste avec N = 3, 4, 16, 17 à qui correspondent des séries uniques de deux cases.

Remarquons que cette liste présente une curieuse symétrie ! En effet, si l'on considère les séries (en termes de combinaisons), une symétrie analogue apparaît dans l'intervalle $2 \leq n \leq 7$[3].

N\n	2	
3	1-2	Série unique
4	1-3	Série unique
5	1-4 ; 2-3	Deux séries
6	1-5 ; 2-4	Deux séries
7	1-6 ; 2-5 ; 3-4	Trois séries
8	1-7 ; 2-6 ; 3-5	Trois séries
9	1-8 ; 2-7 ; 3-6 ; 4-5	Quatre séries
10	1-9 ; 2-8 ; 3-7 ; 4-6	Quatre séries
11	2-9 ; 3-8 ; 4-7 ; 5-6	Quatre séries
12	3-9 ; 4-8 ; 5-7	Trois séries
13	4-9 ; 5-8 ; 6-7	Trois séries
14	5-9 ; 6-7	Deux séries
15	6-9 ; 7-8	Deux séries
16	7-9	Série unique
17	8-9	Série unique

Tableau 1

Notamment, en désignant par N_n le nombre auquel correspond une série de n cases et par S_n le nombre de séries de n cases, nous indiquons dans le Tableau 2 ce que l'on obtient[4].

Les règles du kakuro : une variante

Pour remplir une grille de Kakuro, il faut respecter les deux règles suivantes :

Règle 1. Il s'agit de placer les nombres de 1 à 9 (le zéro est exclu) dans une série de cases blanches, un seul nombre par case. La somme de ces nombres est égale au nombre figurant dans la demi-case colorée correspondante[5].

Règle 2. Tous les nombres de 1 à 9 sont utilisables mais, dans une série, un nombre n'apparaît qu'une seule fois.

De plus en plus intriguée par le Kakuro, lorsque nous étions à la recherche de grilles

1 La première partie de cet article est parue dans le numéro 219.

2 Précisons qu'ici nous considérons les séries en termes de combinaisons. A partir de celles-ci, si l'on veut avoir tous les arrangements, on considère les permutations possibles de deux éléments.

3 Nous rappelons au lecteur que les séries de huit et neuf cases correspondant respectivement aux nombres 8 et 9 sont uniques. Ces séries ne rentrent pas dans le jeu de symétries mises en évidence, cela à cause du fait que, dans une série, les nombres (à un chiffre) sont non nuls et ne peuvent pas se répéter.

4 Comme nous pouvons le lire dans la partie 1 de l'article (Math-Ecole n°219), les séries de deux cases ne correspondent qu'aux nombres 3 à 17 ; les séries de trois cases ne correspondent qu'aux nombres 6 à 24 ; les séries de quatre cases ne correspondent qu'aux nombres 10 à 30 ; etc.

5 Par la suite, pour ne pas alourdir le texte, nous serons amenés à identifier la demi-case colorée avec le nombre figurant dans celle-ci.

N_2 (15)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18
S_2 (36)	1	1	2	2	3	3	4	4	4	3	3	2	2	1	1

N_3 (19)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
S_3 (84)	1	1	2	3	4	5	7	7	8	8	8	7	7	5	4	3	2	1	1

N_4 (21)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
S_4 (126)	1	1	2	3	5	6	8	9	11	11	12	11	11	9	8	6	5	3	2	1	1

N_5 (21)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
S_5 (126)	1	1	2	3	5	6	8	9	11	11	12	11	11	9	8	6	5	3	2	1	1

N_6 (19)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
S_3 (84)	1	1	2	3	4	5	7	7	8	8	8	7	7	5	4	3	2	1	1

N_7 (15)	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
S_7 (36)	1	1	2	2	3	3	4	4	4	3	3	2	2	1	1

Tableau 2

à remplir, nous en avons trouvé des nouvelles mais, dans ce cas-là, aux deux règles énoncées ci-dessus s'en ajoute une troisième, à savoir :

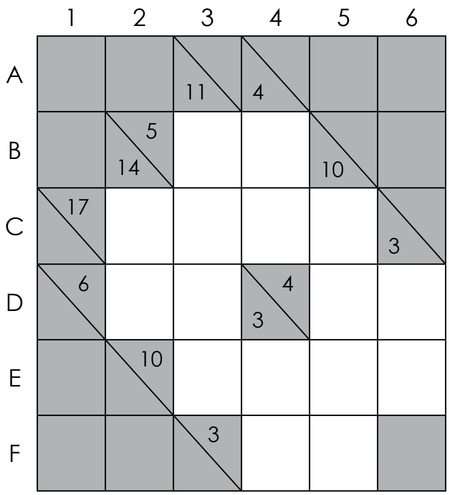
Règle 3. La même série de nombres n'est utilisable qu'une fois par grille.

Par exemple, pour remplir une série de deux cases correspondant à une demi-case colorée contenant le nombre 8, on peut utiliser 1 et 7 ou 2 et 6 ou encore 3 et 5. Supposons que, dans une grille, le 8 apparaît dans deux demi-cases colorées et que les deux séries correspondant sont constituées de deux cases. Si, dans l'une des deux séries, les nombres 1 et 7 ont déjà été utilisés, il ne reste que deux possibilités dans l'autre (soit, 2 et 6 soit, 3 et 5).

Considérons les grilles où, pour les compléter, on doit respecter simultanément les règles 1, 2 et 3 énoncées ci-dessus.

A. Dans une telle grille, combien de fois le 9 peut-il figurer dans une demi-case correspondant à une série de deux cases ? Et dans une demi-case correspondant à une série de trois cases ?

B. Compte tenu de l'existence de séries uniques, quelles conséquences sur la conception de telles grilles ? Par exemple, peut-on compléter la Grille 1 en respectant les trois règles[6] ?



Grille 1

6 *La Grille 1 apparaît aussi dans la partie 1 de cet article (Math-Ecole n°219, p. 17). La solution de la grille et les réponses aux questions sont fournies ici en Annexe I.*

Un exercice guidé : une grille à compléter

Avant de poursuivre la lecture, nous vous invitons à déterminer :

- toutes les séries possibles correspondant à 21 et 22 lorsque n=3 ;
- toutes les séries possibles correspondant à 33 lorsque n=5 ;
- toutes les séries possibles correspondant à 9 lorsque n=2 et n=3 ;
- toutes les séries possibles correspondant à 10 et 11 lorsque n=2.

Rappelons que le 15 correspond à la série de cinq cases unique 1+2+3+4+5 ; le 6 correspond à la série de trois cases unique 1+2+3.

Un joueur veut compléter la Grille 2 (6×4) suivante :

	21	6	10	9	22
15					
33					
11			9		

Grille 2

a) Dans deux demi-cases colorées, on a respectivement le 22 correspondant à une série de trois cases et le 15 correspondant à une série de cinq cases : dans leur case commune, pourquoi le joueur a-t-il placé le 5 ?

b) Dans deux demi-cases colorées, on a respectivement le 6 correspondant à une série de trois cases et le 33 correspondant à une série de cinq cases : dans leur case commune, pourquoi le joueur a-t-il placé le 3 ?

	21	6	10	9	22
15					5
33		3			
11			9		

Grille 2. 1

c) Après avoir complété la série correspondant à la demi-case colorée contenant le 22, le joueur place le 4 et le 9 comme indiqué dans la Grille 4. Expliciter le raisonnement qui conduit le joueur à placer ces deux nombres de cette façon et compléter cette série avec le nombre manquant.

	21	6	10	9	22
15	4				5
33		3			
11	9		9		

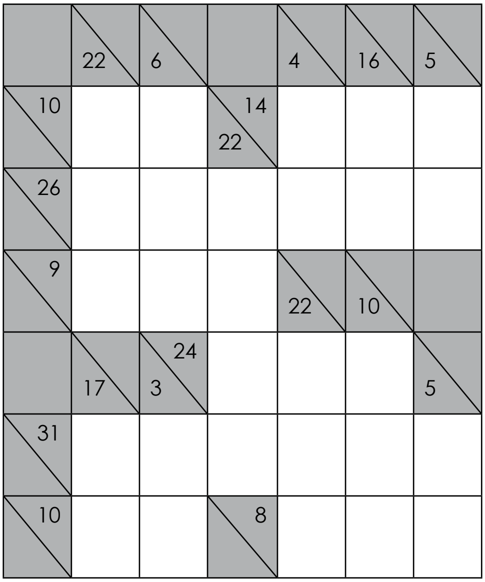
Grille 2. 2

d) Pour compléter la série correspondant au 33, il ne reste maintenant que deux nombres à placer. Lesquels ?

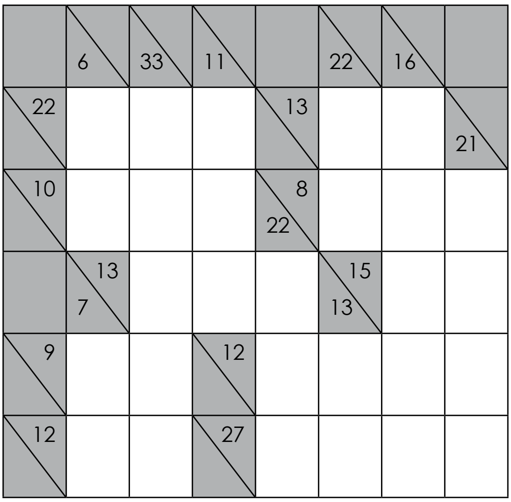
e) Terminer la grille avec les nombres manquants. Vous pourrez vérifier la solution en Annexe II.

Et maintenant, à vous de jouer !

Sans vous fournir d'aides, nous vous proposons ici deux grilles à compléter. Vous repérerez sans difficulté les détails permettant de distinguer les grilles où l'on n'utilise que les règles 1 et 2 de celles où l'on utilise aussi la règle 3. Les solutions se trouvent en Annexe III.



Grille 3 (7x7)

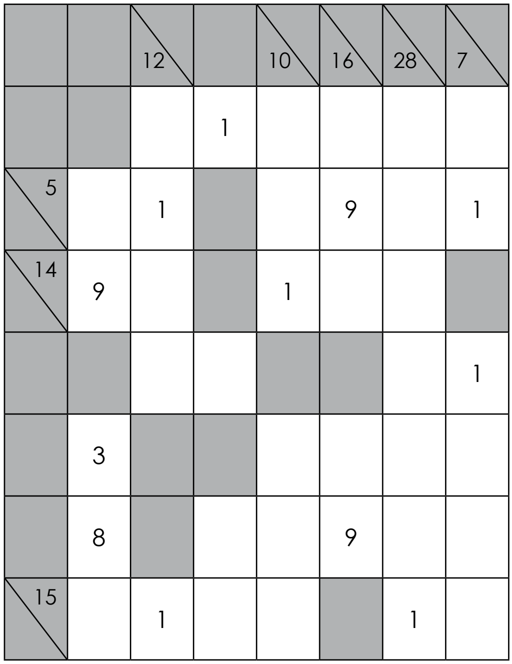


Grille 4 (8x6)

Un peu d'audace !

La ressemblance du Kakuro avec les mots croisés nous a encouragée à imaginer des grilles où des séries doivent être déterminées, d'autres sont partiellement données et – c'est là l'originalité ! – certains des nombres qui figurent dans les cases colorées sont aussi à trouver suivant des indices fournis.

En respectant les trois règles, nous vous proposons enfin de compléter la Grille 5 que nous avons créée dans sa totalité. La solution se trouve en Annexe IV.



Grille 5 (8x8 avec indices)

INDICES. En excluant les cases colorées de la première ligne (en partant du haut) et de la première colonne (en partant de gauche), parmi les onze cases colorées vides :

- une case reste complètement vide ;
- quatre cases sont remplies dans la partie supérieure et inférieure avec les nombres suivant : 3, 5, 11(2), 13(2), 17(2), 20(3), 21(6) et 22(4) ;
- quatre cases sont remplies dans la partie supérieure avec les nombres suivants : 4, 8(3) et 23(4), 25(5) ;
- deux cases sont remplies dans la partie inférieure avec les nombres suivants : 11(4) et 14(3).

A côté de chaque nombre supérieur ou égal à 6, le nombre entre parenthèse indique la longueur de la série qui lui correspond.

Annexe I - Solution Grille 1

	1	2	3	4	5	6
A			11\	4\		
B		14\5	2	3	10\	
C	\17	9	5	1	2	3\
D	\6	5	1	3\4	3	1
E		\10	3	1	4	2
F			\3	2	1	

A propos des grilles où l'on utilise les trois règles

Réponses aux questions A et B (p. 21)

A. Nous avons déjà vu que les séries de deux cases correspondant à 9 sont : 1-8, 2-7, 3-6, 4-5. Le 9 peut donc figurer quatre fois.

Les séries de trois cases correspondant à 9 étant trois (1-2-6, 1-3-5, 2-3-4), le 9 ne peut figurer que trois fois.

B. Dans des telles grilles, les nombres correspondant à des séries uniques ne peuvent figurer qu'une seule fois. La Grille 1 peut être complétée en respectant seulement les règles (1) et (2) car le 3, le 4 et le 10 figurent dans plusieurs demi-cases colorées alors qu'ils correspondent à des séries uniques.

Finalement, en imposant les trois règles, on peut concevoir des grilles dont la taille est moins importante que celle des grilles où l'on n'impose que les règles (1) et (2). Néanmoins, le recours aux trois règles peut représenter une aide. Dans une grille où le 5 figure dans deux demi-cases colorées, si la série 1-4 a déjà été utilisée, on saura que pour l'autre il faudra inévitablement utiliser la série 2-3.

Annexe II - Solution Grille 2

	21\	6\	10\	9\	22\
\15	4	1	3	2	5
\33	8	3	7	6	9
\11	9	2	\9	1	8

a) La série de cinq cases correspondant à 15 est 1-2-3-4-5 (série unique). Les séries de trois cases correspondant à 22 sont 5-8-9 et 6-7-9. Pour que ces deux nombres aient une case commune, il faut choisir la série 5-8-9 correspondant à 22 : les deux séries ont ainsi le 5 en commun.

b) Les séries de cinq cases correspondant à 33 sont : 3-6-7-8-9 et 4-5-7-8-9. La série de trois cases correspondant à 6 est : 1-2-3. Pour que ces deux nombres aient une case commune, il faut choisir la série 3-6-7-8-9 correspondant à 33 car, de cette manière les deux séries ont le 3 en commun.

c) Pour compléter la série correspondant au 22, il reste à placer le 8 et le 9 comme indiqué ci-contre. La case D6 est commune aux nombres 22 et 9 : parmi les séries de deux cases correspondant au 9 (1-8, 2-7, 3-6 et 4-5), seule la série 1-8 est possible.

Le 21 et le 15 ont une case commune (B2). Pour le 21, on peut utiliser l'une des séries suivantes : 4-8-9, 5-7-9 ou 6-7-8. Toutefois, pour le 15, il ne reste qu'à placer le 1, le 2, le 3 et le 4. Cela oblige à choisir la série 4-8-9 et à placer le 4 dans la case B2.

Le 21 et le 11 ont une case commune (D2). Les séries possibles pour le 11 sont : 2-9, 3-8, 4-7, 5-6. Pour compléter la série correspondant au 21, il ne reste qu'à placer le 8 et le 9. Si l'on plaçait le 8 dans la case D2, la série du 11 se compléterait avec un 3 dans la case D3, ce qui est impossible puisque, dans la troisième colonne le 3 apparaît déjà dans la case C3. Cela oblige à placer le 9 et le 8 respectivement dans les cases D2 et C2.

d) Pour compléter la série correspondant au

33, il ne reste qu'à placer le 6 et le 7. Dans la cinquième colonne, il faut compléter une série correspondant au 9 (A5) : si l'on plaçait le 7, elle se compléterait par deux 1, ce qui est impossible. Il faut donc placer le 7 et le 6 respectivement dans les cases D4 et D5.

f) (cf. ci-contre la grille complétée).

Annexe III - Solution Grilles 3 et 4

	22\	6\		4\	16\	5\
\10	7	3	22\14	3	9	2
\26	9	2	4	1	7	3
\9	6	1	2	22\	10\	
	17\	3\24	9	8	7	5\
\31	8	2	7	9	1	4
\10	9	1	\8	5	2	1

Grille 3

Dans ce jeu on tient compte des trois règles

	6\	33\	11\		22\	16\	
\22	5	9	8	\13	9	4	21\
\10	1	7	2	22\8	3	1	4
	7\13	3	1	9	13\15	6	9
\9	3	6	\12	5	4	2	1
\12	4	8	\27	8	9	3	7

Grille 4

Dans ce jeu on ne tient compte que des règles (1) et (2) : on utilise la même série de trois cases correspondant à 22 qui figure 2 fois dans la grille.

Annexe IV - Solution de la grille 5

		12\		10\	16\	28\	7\
	13\21	2	1	3	4	5	6
\5	4	1	\23	6	9		1
\14	9	5	\8	1	3	4	11\
	20\11	4	7	14\	17\3	2	1
	3		5\22	6	8	3	5
	8	\25	3	5	9	6	2
\15	9	11	2	3	\4	1	3

1/9801 ÉVOLUTION DU MILIEU D'UNE DIVISION UN PEU PARTICULIÈRE (PARTIE 1)

Christine Del Notaro

Université de Genève

Cet article est le premier d'une série de trois, visant à restituer une recherche menée auprès d'étudiants en formation en enseignement primaire et d'élèves de 12 ans (8ème HarmoS).

Tout a commencé par l'interpellation d'un enseignant me faisant part de sa surprise au sujet de la division 1/9801. Celle-ci ne tarde pas à devenir ma division de chevet, de par la cohorte de surprises qu'elle recèle. J'exhorte ici le lecteur à suspendre le cours de sa lecture et à se saisir lui-même d'une calculette pour effectuer cette division. Le résultat affiché sur une petite machine ne le satisfera peut-être pas, ainsi prendra-t-il une calculatrice en ligne, comportant plus de positions décimales ou tombera-t-il sur l'un de ces logiciels de calcul qui permettent de calculer des centaines de décimales. Dès les premiers affichages, il pressent que cette division l'emmènera sur un terrain mouvant, où beaucoup de choses sont possibles et dans lequel la porte pour l'exploration est grande ouverte. Je vous invite à vous laisser emporter par cet élan instinctif et à vous engouffrer dans le monde des nombres, si fascinant pour les élèves de l'école primaire à tout le moins.

Contexte

Je me rends une fois par semaine dans une classe pour travailler avec des groupes d'élèves ; c'est le fruit de plus d'une année scolaire d'expérimentations que je souhaite partager ici. D'un point de vue macroscopique, je travaille sur la distinction chiffre/nombre, initié dans mon travail de thèse (Del Notaro, 2010). Cette tâche s'inscrit dans ma problématique, pour les questions qu'elle permet de poser sur les mathématiques, à travers les productions de connaissances et les expérimentations des élèves. Je vais donc tenter de montrer comment le milieu d'une tâche évolue à travers un jeu de tâches proposé à des élèves, aussi bien qu'à de futurs enseignants primaires.

Dans l'ordre chronologique, j'ai proposé cette division en premier lieu aux étudiants de deuxième année du baccalauréat (BSEP2) en sciences de l'éducation à l'université de Genève, formation en enseignement primaire, ce qui me donna l'envie de la soumettre aux élèves, toujours dans une perspective interactive.

Sans entrer dans trop de détails, voici toutefois quelques lignes directrices du jeu de tâches[1]:

« Il s'agit d'un ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, sans être hiérarchisées pour autant. L'expérimentateur est un élément du milieu qui va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève. Cet ensemble de tâches procède d'un savoir mathématique et met en évidence les connaissances que les élèves ont accumulées et qui constituent leur expérience » (Del Notaro, 2011). Et encore : « Le jeu de tâches laisse une place importante à l'investigation du milieu en partant d'une tâche qui va s'enrichir, s'amplifier, se prolonger tout en résultant du savoir mathématique. Il procède donc d'une démarche de recherche axée sur l'investigation du milieu » (ibid., 2012).

Ce qui est à retenir pour cet article sont les notions d'investigation du milieu et d'interaction de connaissances.

Je commencerai par décrire mon propre jeu de tâches – mes cartes – et j'enchainerai avec celui proposé aux étudiants. Dans la 2e partie qui suivra dans un prochain numéro de Math-Ecole, je restituerai le jeu des élèves, pour terminer par la narration du dispositif interactif mis en place dans le but de voir ce qui ressort de la confrontation de ces deux milieux – tâche des élèves et tâche des étudiants.

---

1 Pour une définition plus complète de la notion de jeu de tâches, voir Favre (2008), Del Notaro (2011 ; 2012),

INVESTIGATION DU MILIEU DE 1/9801

Sans effectuer d'analyse a priori à proprement parler, je livre quelques constats autour de cette division, qui constituent la matière de mon jeu de tâches. Si l'on effectue cette division, l'une des premières surprises est le fait que les décimales s'organisent en une suite de 00 à 99, mais que cette dernière s'interrompt à un moment inattendu. Il faut, pour voir cela, un logiciel de calcul, sans quoi on passera à côté de cette curiosité ; le quotient obtenu est : 0,0001020304 0506070809101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596979900 puis la suite reprend : 010203… Il manque 98.

Si l'on navigue sur les différents sites web de mathématiques[2], on comprendra que cette absence s'explique par un effet de cascade de retenues, où le 8 disparait à la faveur du 9; il en va de même pour 1/998001, où, par groupes de 3 décimales, on obtient tous les entiers de 000 à 999, sauf 998. La suite de l'investigation porte à explorer d'autres nombres et à rechercher des absences de régularité ; on tombera alors rapidement sur les racines carrées de ces nombres (99, 999), qui nous permettent de considérer 9 et de constater que la division 1/81 a pour quotient la suite 0,012345679012345… dans laquelle le 8 est absent également. A ce point de l'investigation, nous avons déjà plusieurs cartes en mains : 1/998001 et la série qui en découle : 1/99980001, 1/81, etc. Ainsi que 1/9 (= 0,111…), et la série qui en découle : 1/99 = 0,010101…), 1/999, etc.

Ajoutons-en quelques-unes. Que peut-on se demander ensuite ? Ce qu'il advient si le dividende double ? Par exemple, 2/9801 = 0,0002040608101214 et 3/9801 = 0,00030609121518212427… ; on reconnait les multiples de 2 et de 3 dans la suite décimale. Est-ce que cela continue ainsi ? Avec 4/9801, le quotient est 0,00040812162024283236… On retrouve en effet les multiples de 4. Il en va de même avec la division 5/9801 (= 0,00051015202530354045…), où l'on voit les multiples de 5. Fixons encore 10 au dénominateur ; sans surprise, on trouve 0,0010203040506070… Le jeu sur les propriétés de la division pointe alors.

La suite du jeu de tâches se décline à partir de ces constats et après avoir continué mon exploration avec les multiples de 11 au dividende (11/9801 ; 22/9801, etc.), au vu de leurs curiosités, je m'embarque dans l'exploration de nombres moins attendus, s'il en est. Je prends, par exemple, 247/9801, ce qui donne: 0,02520151004999489847974696... Je constate à ce moment-là que je retrouve la question des retenues qui expliquent l'absence du 98 dans la division originale. J'obtiens les multiples de 247 dans les décimales de ce nombre, moyennant quelques soustractions successives. Ainsi, les premiers multiples de 247 = {247 ; 494 ; 741 ; 988 ; …} se retrouvent de la manière suivante : dans 0,0252, on peut voir 247, et il reste 5 (252-247). J'abaisse ensuite les deux chiffres suivants, 0 et 1, ce qui me donne 501 et je continue ainsi : à 501, je soustrais 494, il reste 7 ; j'abaisse 5 et 1 :

```
0,0252015100
   -247
 ----------
   00501
   -  494
 ----------
   reste 7
```

À 751, j'enlève 741, il reste 10. J'abaisse les deux zéros et j'obtiens 1000. 1000 – 988 = 12, et ainsi de suite.

Ce premier fait est intéressant et explique bien d'autres quotients, comme ceux explorés auparavant : prenons par exemple 33/9801, puisque j'ai parlé de curiosités précédement. Le quotient en est 0,003367003367003367… Considérons les M33 {33 ; 66 ; 99 ; 132 ;…} et effectuons les soustractions successives comme pour 247. On retrouve bel et bien les multiples de 33.

Au passage, remarquons que l'on pense « nombre » dans cet exemple.

Un deuxième fait a retenu mon attention lorsque le logiciel utilisé a mis les nombres en forme de la façon suivante : 0, 0252 0151 0049 9948 9847 9746 9645 9544… ; cela permet de faire un autre constat : ici, je pense « chiffres », si je lis le quotient en scandant

2 *Cf. webographie en fin d'article.*

(0,) 02-52-01-51-00-49-99-48 etc. ; d'autres régularités apparaissent. Je sais par expérience, que les élèves vont effectuer ce genre de constat, aspirés qu'ils sont par ce type de démarche.

J'ai suffisamment d'éléments en main pour proposer ce jeu de tâches en cours et pour me rendre sur le terrain ensuite. D'autres faits que je n'avais pas prévus se sont offerts à moi, alimentant ma réflexion autour de la question chiffre/nombre. J'ai alors une vision claire de mon dispositif, que j'exposerai dans un prochain numéro.

INTERACTION DE CONNAISSANCES AVEC DES ÉTUDIANTS EN DÉBUT DE FORMATION BSEP[3]

Une remarque de fond s'impose, à la fois banale et fondamentale lorsque l'on traite de questions numériques : rien n'est jamais trop simple et rien ne va jamais de soi. C'est un constat qui prévaut autant pour les élèves que les étudiants et, si j'osais, pour les formateurs d'enseignants ou les chercheurs… Nous verrons que des étudiants porteurs d'un bagage mathématique conséquent en viennent à reconsidérer des notions essentielles et à les reconstruire à la faveur de leurs expérimentations, se trompant même quelquefois. Ces faits d'expérience se révèlent, pour autant que l'on s'autorise à jouer avec les nombres, à tâtonner, chercher, se questionner ; c'est du moins le constat effectué au fil de mes propres expérimentations dans des classes.

J'ai consacré une période de 45 minutes à la fin des trois derniers cours de l'année académique 2011-2012, pour acculturer les étudiants d'une part à la notion de jeu de tâches et d'autre part, au fait que j'allais jouer ce jeu avec eux. Je me mets donc en interaction – et quelque peu en danger, ne pouvant tenir pour acquis, de maintenir l'interaction vive face à vingt-cinq étudiants – avec chacun de mes quatre groupes, une calculette prise sur le net et projetée pour effectuer les opérations qu'ils me diraient de faire, toujours à propos de la division 1/9801. Deux étudiants par groupe sont chargés de garder trace de ce qui se passe.

3 *Baccalauréat en sciences de l'éducation orientation Enseignement primaire.*

Jeu de tâches

Voici un jeu de tâches qui ressort de l'une de ces narrations :

« $1/9801=1{,}02030\text{x}10^{-4}$

$10/9801=0{,}00102030$

$100/9801=0{,}0102030$

$1000/9801=0{,}10203$

$10000/9801=1{,}0203$

$100000/9801=10{,}203$

1. A chaque fois qu'on ajoute un 0, on augmente d'une puissance de 10. Le numérateur est 10 fois plus grand. Le résultat sera donc toujours 10 fois plus grand. Nous avons une division qui est proportionnelle.

$2/9801=2{,}0406\ \text{x}10^{-4}$

$20/9801=0{,}0020406$

2. Le résultat sera le même pour 2, 20, 200. On aura toujours 2,0406… mais à des puissances de plus en plus grandes dès qu'on aura un numérateur plus grand.

3. Le rapport entre $1/9801=1.02030\text{x}10^{-4}$ et $2/9801 = 2.0406\text{x}10^{-4}$. Le résultat de 1/9801 et 2/9801 c'est que l'un est le double de l'autre. Si on a 4/9801 le résultat sera le double de 2/9801.

4. Si on multiplie le numérateur de la division 1/9801 par n'importe quel nombre le résultat sera ce nombre fois le résultat de la division 1/9801. $\text{ax}1/9801=\text{ax}1{,}1012\text{x}10^{-4}$ pour tout a.

5. Si on multiplie le dénominateur par 10 que se passe-t-il ?

$1/\ (9801\text{x}10)=1{,}1012\text{x}10^{-5}$

$1/\ (9801\text{x}100)=1{,}1012\text{x}\ 10^{-6}$

A chaque fois que le dénominateur est multiplié par 10 le résultat est lui divisé par 10.

6. Si on divise le dénominateur par 10 que se passe-t-ill ?

$1/(9801/10)=1{,}1012\text{x}10^{-3}$

$1/(9801/100)=1{,}1012\text{x}10^{-2}$

A chaque fois le dénominateur est divisé par 10 le résultat est lui multiplié par 10.

7. Si à présent on double le dénominateur ? $1/(9801\text{x}2)=2{,}04060\text{x}10^{-5}$

Le rapport entre $2{,}04060\text{x}10^{-5}$ et $1{,}1012\text{x}10^{-4}$ est….2. Donc si on multiplie le dénominateur par 2 le résultat sera divisé par 2. Et si on divise le dénominateur par 2 ? $1/(9801/2)=2{,}04060\ \text{x}\ 10^{-4}$ ce qui est la même chose que 2/9801, le résultat a donc doublé.

8. En général si on multiplie le dénominateur par n'importe quel nombre, le résultat sera divisé

par ce nombre. Si on divise le dénominateur par n'importe quel nombre, c'est comme multiplier le numérateur par ce nombre et donc multiplier le résultat par ce nombre. »

Résumé :

Si a vaut 10, 100, 1000, 1000…[4]

(ax1)/9801 la virgule du résultat est déplacée de autant de chiffres à droite que a possède de 0

(a/1)/9801 la virgule du résultat est déplacée de autant de chiffres à gauche que a possède de 0

1/(ax9801) la virgule du résultat est déplacée de autant de chiffres à gauche que a possède de 0

1/(9801/a) la virgule du résultat est déplacée de autant de chiffres à droite que a possède de 0

Le premier constat qui s'impose à la lecture de ce rapport est que des connaissances ont été activées et sont restituées par les étudiants, de manière méthodique. À la faveur de leur exploration, sont réétudiés notamment les liens entre le numérateur et/ou le dénominateur et le quotient. C'est fondamental et trivial à la fois. Nous verrons que les élèves réaliseront les mêmes constats. Toutefois, je fais l'hypothèse que ce n'est pas si banal pour les étudiants, si j'en juge par le dernier paragraphe intitulé résumé, qui trahit, si j'ose dire, leur re-découverte de certaines de ces propriétés, pourtant déjà décrites de manière précise et répétées au point 8. Ils ont trouvé sur un site web un résumé, qu'ils ont copié et collé dans leur rapport. Il est écrit de manière plus simpliste et moins scientifique que leur propre restitution, comme s'ils voulaient s'assurer que l'on comprenne bien.

Ces formules viennent soutenir leur pensée, et les rassurent.

La question chiffre/nombre prend peu à peu corps dans ces jeux de tâches qui sont l'occasion, en formation, de discuter certaines propriétés des nombres sans crainte de jugement ou d'évaluation. L'un des premiers ajustements s'est porté sur la lecture du quotient : lit-on « zéro virgule zéro zéro, zéro un, zéro deux, zéro trois ou : zéro virgule zéro zéro zéro, dix, vingt, trente ? » La question que je pose alors est : un nombre peut-il se lire de façons différentes ? Oui ? Non ? Ils ne savent pas, et vous, lecteurs ? Qu'en pensez-vous ? Les élèves sont plus hardis, prenant position et trouvant des lois qui leur permettent de continuer.

Face à une multitude de liens possibles, le jeu de tâches propose une manière de comprendre les relations et les expériences effectuées par les différents interlocuteurs.

La question qui m'occupe dès lors est de comprendre comment exporter ces trouvailles mathématiques dans un dispositif de formation d'enseignants, tout autant qu'auprès d'élèves de 11-12 ans. Les conditions nécessaires sont, avant tout, un savoir fort ainsi qu'un jeu de tâches révélateur de ce savoir, le tout, finement saupoudré de surprises.

Dans un prochain numéro, je ferai état des productions des élèves et de leur incroyable ingéniosité, pour terminer ensuite par l'exposé du dispositif interactif mis en place durant l'année suivante.

Références bibliographiques

Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées *Education et francophonie, 31(2)*, 82-102. Page consultée le 1er février 2011 : www.acelf.ca

Del Notaro, C. (2011). Le jeu de tâches, une interaction de connaissances particulière entre expérimentateur et élèves, *Actes du XXXVIIIe colloque COPIRELEM,* IREM de Dijon.

Del Notaro, C. (2012). La distinction chiffre/nombre dans un jeu de tâches chez des élèves de 11 ans, *Actes du XXXIXe colloque COPIRELEM,* IREM de Brest.

Favre, J.-M. (2008). Jeux de tâches. Un mode d'interactions dynamique pour aménager des expériences mathématiques aux acteurs de la relation didactique dans l'enseignement spécialisé, *Grand N, 82,* 9-30.

Références webographiques

http://serge.mehl.free.fr/exos/division9801.html

http://math.stackexchange.com/questions/102682/what-is-special-about-the-numbers-9801-998001-99980001

[4] *J'ai gardé les formulations qui suivent telles quelles, mal orthographiées.*

Le cas Richard

Céline Vendeira Maréchal

Université de Genève

Cet article propose la narration d'une expérimentation avec un élève poursuivant sa scolarité dans une institution spécialisée suisse romande. La narration vise à rendre compte des événements inattendus survenus lors d'une séance avec des élèves. L'idée étant d'être capable, dans l'après coup, de restituer ces moments inattendus repérés dans l'interaction. Comme il a été mentionné dans le numéro 218 de Math-Ecole, la narration est devenue une pratique privilégiée du groupe ddmes[1] : « Du point de vue de nos pratiques, nous considérons la narration comme une forme de représentation des événements qui parsèment nos expérimentations et qui est vouée à être rapportée ailleurs. La narration ne reste pas seulement cantonnée à une reprise indéfinie d'histoires narrées, mais débouche souvent sur de nouvelles actions et de nouvelles expériences » (Cange & Groupe ddmes, 2012, p.46). Certaines narrations ne restituent qu'une seule séance avec des élèves, voire même un moment précis d'une séance où quelque chose d'inattendu s'est produit, mais d'autres restituent des événements apparus dans plusieurs investigations successives. La narration présentée dans cet article reprend des événements qui se déroulent sur un grand nombre de séances avec un seul élève.

Narration

Dès nos premières interventions auprès de Richard nous découvrons son rapport au nombre avec étonnement. Il ne sait pas réciter la suite orale des nombres au-delà de 12, il peine aussi à distinguer 12 et 21 ou 20, 13 et 31, etc. Par contre, lorsqu'il doit dire combien il y a d'oreilles en tout dans la salle, il regarde discrètement les 4 personnes autour de lui et répond correctement, « 10 ». Lorsque nous proposons ensuite le nombre de dents, il ne pourra pas répondre, mais indique qu'il y en a plus que de doigts. Quand son enseignante enchaîne avec le nombre de cheveux, ça semble le faire rire et il déclare qu'il y en a encore plus. Les premières séances nous permettent donc de déterminer que Richard a une certaine représentation des grands nombres, alors qu'il est limité avec les petits nombres qu'il ne sait pas nommer.

Ces différents constats vont nous permettre de développer des jeux de tâches (Favre, 2008) allant dans diverses directions. Ainsi il nous paraissait important d'explorer différents axes relatifs à la compréhension des petits et grands nombres chez Richard. Dans cette narration nous ne présentons que certaines tâches impliquant un travail sur la numération écrite et le dénombrement de petites et grandes quantités.

Concernant la numération écrite :

Lors d'une séance, nous proposons à Richard de réaliser une bande numérique, ce qui nous amène à observer son aisance dans l'écriture de la suite des nombres jusqu'à au moins 35, nombre auquel nous nous sommes arrêtés.

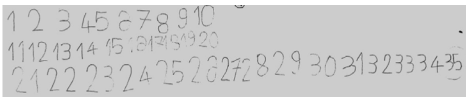


Figure 1

Nous verrons également par la suite qu'il ne rencontre aucune difficulté à ordonner des grilles de nombres de 0 à 3300 (figures 2-a et 2-b).

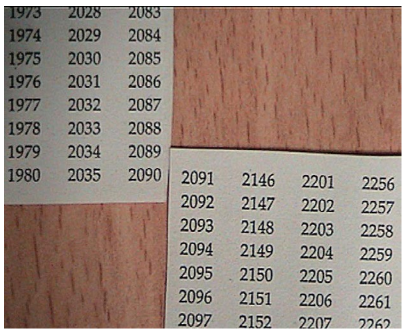


Figure 2-a

1 Le groupe de recherche ddmes (didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé) est composé de chercheurs, de formateurs et d'enseignants spécialisés des cantons de Genève, Vaud et Valais.

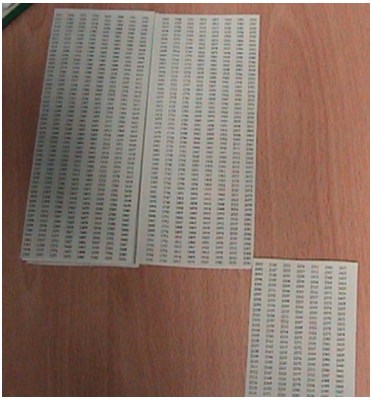


Figure 2-b

En effet, il observe d'abord le nombre de chiffres contenus dans le nombre, puis compare les chiffres des milliers, des centaines, des dizaines et des unités. Richard a donc bien conscience que c'est d'abord le nombre de chiffres qui est déterminant !

Une autre tâche va mettre en évidence sa bonne compréhension de la numération écrite des grands nombres. Nous demandons à Richard de tirer des cartes sur lesquelles figurent des chiffres entre 0 et 9. Il doit ensuite ordonner ces cartes afin d'obtenir le plus petit ou le plus grand nombre possible. Il réalise cette tâche avec facilité.

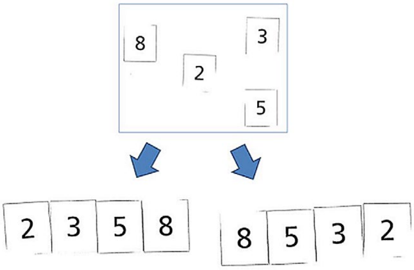


Figure 3

Concernant le dénombrement de petites quantités :

Une autre tâche proposée consiste à faire le maximum de croix sur une feuille en un certain laps de temps. Celui qui en réalise le plus gagne la partie. Au départ, nous laissons à peine dix secondes pour réaliser les croix, de sorte qu'il n'y en ait pas trop. Lorsque nous demandons à Richard qui a gagné, il se met à compter les croix. Après comptage, il indique en avoir 5 (au lieu de 6) et en compte 10 chez nous (au lieu de 11) (figure 4). Ce qui va nous interpeller, c'est qu'il ne compte pas en même temps qu'il pointe les croix, c'est probablement pourquoi il obtient des résultats erronés. De plus, il ne semble pas savoir organiser son dénombrement, ce qui peut l'amener à oublier des croix, voire à compter plusieurs fois la même. Ce sont donc ses difficultés d'énumération des 2 collections de croix qui vont l'amener à produire des erreurs. Or, l'énumération est une « connaissance nécessaire au comptage » (Briand et al, 2000, p.7).

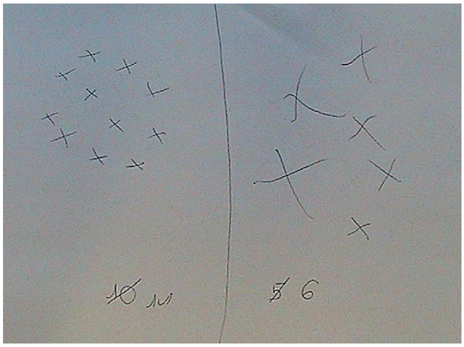


Figure 4

Suite à ce constat, nous choisissons, lors de la partie suivante, d'organiser nos croix en 4 lignes de 5 croix afin de pallier éventuellement aux soucis d'énumération que rencontre Richard. De son côté, Richard continue à dessiner des croix sur tout l'espace de sa feuille sans aucune organisation particulière (figure 5). Nous lui demandons ensuite s'il peut dire combien nous avons fait de croix « sans les compter ». A notre grand étonnement il écrit alors « 20 » sur la feuille, correspondant à la bonne réponse. Il semble donc que Richard ait une représentation de la quantité 20, mais qu'il ne sait pas comment nommer ce nombre ! Comment a-t-il alors procédé ? A-t-il fait 5 + 5 + 5 + 5 = 20 ou 4 fois 5 = 20 ? Nous lui demandons alors s'il peut aussi évaluer ses propres croix sans les compter. Il dit que non, car « c'est n'importe quoi », ce qui signifie que sa collection n'est pas organisée. Il compte alors oralement ses croix et obtient 12 (résultat correct), mais inscrit 20 sur la feuille. Cet événement est inattendu et met en doute nos interprétations précédentes qui ne lui attribuaient pas de difficulté particulière en numération écrite, alors qu'ici il ne semble pas gêné d'écrire 2 fois « 20 » alors qu'il indique que c'est nous qui avons obtenu le plus de croix.

Concernant le dénombrement de grandes quantités :

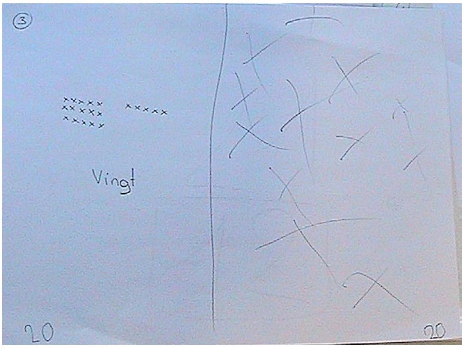


Figure 5

La tâche suivante va se révéler très intéressante, car Richard montre qu'il est capable de détourner ses difficultés (dénombrement de quantités au-delà de 12) afin de répondre à notre question. Pour cette tâche, nous avons pioché une poignée de jetons rouges dans un sac, puis une autre de jetons jaunes et avons demandé à Richard « où est-ce qu'il y en a le plus ? » (figure 6). A cet effet, il réalise des lignes de 4 jetons avec les jetons rouges. Nous lui proposons de faire la même chose de notre côté avec les jetons jaunes, mais avec des lignes de 5 jetons (et non de 4) !

Figure 6

Richard dit aussitôt que ça ne va pas jouer, qu'il faut faire pareil. Ainsi Richard procède en organisant identiquement deux collections afin de comparer leur quantité sans devoir passer par le dénombrement, mais par la correspondance terme à terme.

Une fois terminé, il vérifie en avançant ses mains simultanément ligne par ligne dans la collection de jetons jaunes et de jetons rouges en disant pour chaque ligne « quatre, quatre,… ». Il termine les jetons rouges avant les jaunes et en déduit qu'il y a plus de jaunes !

Au fil des séances, nous allons de surprises en surprises avec Richard. La narration pourrait donc se poursuivre bien au-delà de ces quelques lignes. Ce que nous pouvons mettre en évidence à ce stade, c'est que l'expérience suscitée par les jeux de tâches que nous avons proposés nous permet de révéler des connaissances chez Richard que nous n'aurions pas imaginées à priori. Cette citation nous semble conclure parfaitement cette expérience « Il est important de rendre visible pour les enseignants le fait que leurs élèves sont susceptibles de développer des capacités et des motivations qui vont souvent bien au-delà de ce que l'on peut envisager a priori » (Dias, 2007).

Références

Briand, J., Lacave Luciani, J.-M., Harvouët, M., Bedere, D., Goua de Baix, V. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. Grand N, 66, 7-22.

Dias, T. (2007). Expérimentation en Mathématiques dans le contexte de l'enseignement spécialisé, Etude des apports d'un dispositif de type «rallye» mathématiques, Actes du colloque de la COPIRELEM, Troyes 2007.

Christian Cange et le groupe ddmes (2012). De l'expérience à la narration. Math-Ecole, numéro spécial EMF 2012, 46-49.

Favre, J.-M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. Grand N, 82, 9-30.

A propos des nombres décimaux (Partie 2)[1]

André Scheibler

Les nombres décimaux dans l'ère de la théorie des ensembles

Considérons la présentation culturelle et classique des ensembles des nombres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Comment pourrions-nous y glisser quelque part $\mathbb{D}$? Deux possibilités s'offrent à nous, si nous considérons $\mathbb{D}$ comme l'ensemble des nombres décimaux limités : $\mathbb{D}$ va se situer entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, donc il faut proposer soit une extension de l'ensemble $\mathbb{Z}$ pour faire $\mathbb{D}$, soit une restriction de $\mathbb{Q}$ pour faire $\mathbb{D}$.

Faisons d'abord un petit rappel concernant l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Cet ensemble peut se définir comme une extension de $\mathbb{Z}$, comme suit :

$\mathbb{Q} = \{a/b \;/ a;b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, a/b est une écriture utilisant deux nombres de $\mathbb{N}$, a et b placés l'un au-dessus de l'autre et séparés par une barre horizontale. Il faut tout de suite une manière de traduire cette écriture en écriture décimale : ce sera le résultat de la division de a par b. A ce stade, il est donc nécessaire que cette opération de division soit définie. Quel est donc l'avantage d'écrire ces nombres uniquement à l'aide d'entiers, et de créer ainsi l'écriture fractionnaire qui exigera, en contre partie, un nouvel apprentissage des opérations de calcul avec cette écriture ? C'est certainement qu'avec elle, l'opération de division s'avère d'une extrême simplicité !

Mais revenons à nos décimaux, et commençons par les décrire par une restriction de $\mathbb{Q}$:

(1) $\mathbb{D}=\{x \in \mathbb{Q} / \exists p \in \mathbb{N} / x.10^p \in \mathbb{Z}\}$

Traduisons cette formule : $\mathbb{D}$ égale l'ensemble des nombres x appartenant à $\mathbb{Q}$ tels qu'il existe un nombre p (au moins un) appartenant à $\mathbb{N}$ tel que si l'on multiplie x par 10^p, le résultat est un nombre entier.

Ce qui est très économique mais assez expéditif, puisque cette définition en fait ne montre rien de ces x particuliers si on ne les connaissait déjà. Une autre définition apportera plus d'informations :

(2) $\mathbb{D}=\{a/b \in \mathbb{Q}$ avec (a;b) premiers entre eux$/\exists\, n;m \in \mathbb{N} \;/ b=2^n \bullet 5^m\}$

Traduction : $\mathbb{D}$ ce sont toutes les fractions rationnelles et réduites de $\mathbb{Q}$ dont le dénominateur se décompose en produits de facteurs uniquement égaux à 2 et/ou 5. C'est déjà plus opérationnel. La division de a par b est alors une division exacte, dont le reste est 0. Par exemple, la fraction 39/960 qui se réduit en $13/920 = 13/(2^6 \bullet 5^2)$ qui correspond, après division, à 0,040625.

Si l'on recherche maintenant une deuxième définition de $\mathbb{D}$, mais cette fois par extension de $\mathbb{Z}$, il suffit de se ramener aux propositions de Stevin (exposées dans le Math-Ecole 219 et que nous rappelons) :

> *...chaque nombre de Disme étant en fait déterminé par un couple d'entiers, le premier formé de tous les chiffres utilisés, dans l'ordre, sans omettre de zéro en cas de défaillance d'un signe, le second étant le signe du dernier chiffre. 8(0)9(1)3(2)7(3) est traité comme le couple (8937 ; 3).*

Une autre définition en extension, plus formelle, est proposée dans l'Annexe I.

Quelques commentaires à propos des différentes définitions de $\mathbb{D}$

1. Stevin vise, en imposant des rompus tous égaux à la dixième partie, une uniformisation de l'écriture des nombres pour la plupart des corps de métier, et par là une grande facilitation du calcul. Lebesgue veut définir une écriture de tous les nombres associés à la mesure de longueur de tout segment, et c'est une procédure de cette mesure qui définit le nombre. Les définitions plus formelles enfin disent les propriétés des nombres qui sont décimaux parmi les nombres rationnels $\mathbb{Q}$.
2. La numération en base 10 est responsable de la singularité de cet ensemble. La présence de 10^p dans la première formule et celle de $2^n \bullet 5^m$ dans la deuxième expriment bien cette singularité.
3. La décomposition de b, le dénominateur

[1] *La première partie de cet article est parue dans le numéro 219.*

de a/b, en produits de facteurs premiers strictement égaux à 2 ou 5 donne du grain à moudre à toute méthode qui voudrait faire une place aux décimaux dans un enseignement. La décomposition en produits de facteurs du dénominateur fournit une méthode élégante, au détriment d'une division de a par b qui de temps en temps "finit", et de temps en temps (mais quand ?) ne "finit" pas[2].

4. Les définitions des mathématiciens ensemblistes nous apparaissent ici très abstraites. Elles sont aussi le fruit d'une époque, qui s'est appelée « mathématiques modernes », dans laquelle la théorie des ensembles a pris une place importante. L'étude des ensembles de nombres, et l'ambition d'en faire LA base de tout l'édifice mathématique – l'enseignement de la géométrie d'Euclide a même failli disparaître à ce moment-là - sont les causes d'une distance volontairement marquée avec un côté pratique de l'usage des mathématiques, et des nombres en particulier. Alors que Stevin insiste sur ce côté pratique, et Lebesgue ici fait d'une procédure de mesure de segments une définition, qui correspond à la définition de nombre réel apparue dans la version actuelle de l'aide-mémoire des ressources d'enseignement romand :

Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture décimale possède un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule. C'est le quotient d'un nombre entier par une puissance de dix.

5. Je laisse enfin le soin au lecteur d'aller rechercher dans les ressources qu'il utilise dans son enseignement, ou dans sa démarche personnelle de traiter les différentes écritures des nombres, la place qui y est faite ou non à l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. L'objectif de cet article est de l'aider dans cette démarche.

Calculs avec les nombres décimaux

Je ne traiterai ici que de l'opération de division, parce qu'elle joue un rôle clé dans l'étude des nombres décimaux. Le lecteur démontrera facilement qu'additionner, soustraire ou multiplier deux nombres décimaux donne un décimal. Ce n'est pas le cas de la division.

La division euclidienne dans $\mathbb{D}$ existe-t-elle ?

Il est fréquent, dans l'enseignement et dans les méthodologies utilisées, de traiter en parallèle l'ensemble des décimaux $\mathbb{D}$ et celui des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Cet ensemble est présenté souvent comme l'ensemble des fractions où a et b sont des nombres entiers puisés dans $\mathbb{Z}$ avec b différent de 0. L'isomorphisme de $\mathbb{Q}$ en écriture fractionnaire avec les nombres décimaux illimités dits rationnels (ou nombres périodiques) exige un algorithme de passage d'une écriture à l'autre, et c'est bien sûr la division qui va remplir ce rôle. Revenons alors sur la définition de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$:

Soit (a ; b), $(a;b)\in(\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)(b\neq 0)$

Alors il existe $(q,r) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ tel que $a=b\bullet q+r$ et $0 \leq r < b$

q est appelé quotient et r reste de la division euclidienne.

Il faut relever que la division euclidienne n'est pas une opération comme les autres, puisque sa réponse n'est pas un nombre, mais deux. Et ces deux nombres sont soumis à deux conditions, qui exigent les définitions de deux opérations, + et • , et l'existence d'une relation d'ordre total.

Au premier abord, on se dit que cela ne va pas poser de problème dans $\mathbb{D}$, puisque nous avons ces définitions et cette relation d'ordre. Il va suffire de transposer l'algorithme connu sur $\mathbb{N}$. C'est bien ce que la plupart des calculateurs font, en invoquant un théorème démontré facilement sur $\mathbb{Q}$:

Si l'on multiplie dividende et diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas.

En prenant plus de précaution :

Soit $a,b,f \in \mathbb{Q}$, b et f non nuls,

$$\text{alors } (a/b) = (a\bullet f)/(b\bullet f)$$

La démonstration complète dans $\mathbb{Q}$ va évidemment faire appel à la définition de cet ensemble, et aux règles dites de simplification de fractions.

Le problème est que, si l'on veut définir une

2 *Cf par exemple un cas tel que a=1 et b= 97.*

division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on peut bien faire usage du théorème ci-dessus, valable dans $\mathbb{Q}$, mais ce théorème ne dit rien du reste !

Pour cette division, on propose donc souvent aux élèves de multiplier dividende et diviseur par la bonne puissance de 10, afin qu'ils deviennent tous deux des entiers, et d'effectuer la division. Le nombre d'unités du quotient trouvé, on « continue », en ajoutant un zéro à droite du dividende, pour figurer la décimale suivante. Les élèves, lancés dans cette opération, posent souvent la question : « On s'arrête quand, Madame? » Ayant obtenus réponse (mais que leur répondez-vous ?) ils fournissent quasiment dans tous les cas le dernier nombre entier obtenu « quand on s'arrête », comme reste de la division. Par exemple :

0,7 divisé par 0,3

7	3
6	2,33
10	
09	
010	
009	
001	

Réponse : quotient =2,33 ; reste 1

Or :

$0,3 \cdot 2,33+1 \neq 0,7$ et 1 n'est pas compris entre 0 et 0,3.

Tous les enseignants et les lecteurs attentifs ont bien entendu reconnu l'erreur, r = 0,001 et les deux conditions sont vérifiées pour 0,7 divisé par 0,3. Pour définir donc notre division euclidienne, il faut un élément supplémentaire, celui qui répond à la question des élèves : « Quand s'arrête-t-on ? ». Il faudra alors définir ce que l'on pourrait appeler la « décimalité » d'un nombre de $\mathbb{D}$.

Cette « décimalité » peut être le dernier signe non nul que Stevin attribue à l'écriture de ses nombres. Par exemple, 3 serait la décimalité de 8(0)9(1)3(2)7(3) (en notation actuelle : 8,937).

Cette « décimalité » peut être intégrée dans l'algorithme de division, en fixant a priori l'arrêt, par exemple à 10^{-3}. Il serait également nécessaire de noter la décimalité à chaque étape une fois terminé la partie de l'algorithme dans les entiers.

Dans l'Annexe III, nous proposons des éléments formels qui peuvent permettre de fonder l'élargissement de la division euclidienne à $\mathbb{D}$, l'ensemble des décimaux.

Infiniment petit, infiniment grand

A celui qui s'intéresserait à la définition d'ensembles de nombres et à leurs différentes écritures, ce qui vraisemblablement le conduirait à des questions concernant l'infiniment petit ou l'infiniment grand, je propose la lecture du livre « La notion d'infini » de Thérèse Gilbert et Nicolas Rouche.

Cet ouvrage, tout à fait abordable pour un non spécialiste en mathématiques, propose une excellente approche de la notion d'infini, illustrée par de nombreux textes historiques. Le lecteur pourra constater que de virulents échanges jalonnent toute l'histoire à propos de la nature des objets mathématiques. Les auteurs mettent très bien en évidence des paradoxes concernant ces objets, paradoxes qui d'une certaine manière subsistent encore aujourd'hui, d'un point de vue philosophique.

Cette approche de la notion d'infini est particulièrement bien adaptée pour des enseignants. Ils vont constater que des questions fondamentales, comme par exemple : peut-on fabriquer une droite avec des points ? Y-a-t-il du vide entre les points ? Comment se touchent-ils ? etc., questions qu'ils se posent peut-être eux-mêmes, et qui pourraient occuper de temps à autre les pensées de leurs élèves, et bien ces questions ont été aussi celles de grands savants. Cette approche ne prend pas la forme sèche d'un discours historique, elle est essentiellement alimentée de problèmes. En voici un exemple (p. 225-226) pour conclure, qui nous fait revenir au fameux nombre 0,999..., qu'Henri Lebesgue excluait de ses nombres décimaux illimités :

Que pensez-vous des arguments intervenant dans le dialogue suivant ? Imaginez-en la suite.

LE PROFESSEUR. Le nombre s'écrivant 0,999..., avec une infinité de 9, est égal à 1.

L'ETUDIANT. Non, ce n'est pas possible ! Ce sont deux nombres différents. Cela se voit :

ils ont des écritures différentes.

PROF. S'ils sont différents, donnez-moi leur différence.

ET. La différence est le nombre 0,000...1, avec une infinité de zéros avant le 1.

PROF. Mais il y a une infinité de zéros, vous n'arriverez jamais à la dernière décimale, à savoir 1.

ET. C'est comme pour votre 0,999..., vous n'arriverez jamais au bout de votre infinité de 9. Donc le dernier 9 n'apparaissant pas, 0,999... ne sera "jamais" égal à 1.

PROF. Moui... Autre chose : si ces deux nombres sont différents, vous devez pouvoir trouver un nombre entre les deux, et même une infinité de nombres...

ET. Il suffit, par exemple, de calculer la moyenne des deux. Leur somme valant 1,999..., la moyenne sera 0,999...5, avec une infinité de 9 avant le 5. En effet :

1,9/2 = 0,95 ; (1,99/2) = 0,995, etc.

Sur quoi se basait ce professeur pour lancer son affirmation ? Probablement sur cette démonstration :

10•0,999…=9,999…

1•0,999…=0,999…

Donc 10•0,999…-1•0,999…=9

Donc 9•0,999…=9 alors 1•0,999…=1

Cela semble lui donner raison. Mais les arguments de l'étudiant ne sont-ils pas pertinents ?

Bibliographie

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques,* Grenoble : La pensée sauvage.

Gilbert, T. & Rouche, N. (2001). *La notion d'infini*, Ellipses, Paris.

Goldstein, C. (2012). *Les fractions décimales : un art d'ingénieur ?* HAL : hal-00734932, version 1 cf http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=dhb78dii8ggjg8u43uq2lqhn23&view_this_doc=hal-00734932&version=1

Lebesgue, H.-L. (1915). *Sur la mesure des grandeurs,* A. Kundig, Genève.

Le Lionnais, F. et al.(1979). *Dictionnaire des mathématiques,* Paris : PUF.

Stevin, S. (1585). *La Disme,* http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10sme.html

CIIP (2011). Aide-mémoire (Mathématiques 9-10-11).

Annexe 1 : définition ensembliste de $\mathbb{D}$

Considérons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ la relation d'équivalence ~ suivante :

$$(a,n)\sim(b,p) \text{ ssi } a\cdot 10^p=b.10^n$$

La classe (a,n) est notée $(a/10^n)$

Alors $\mathbb{D}$ est l'ensemble-quotient

$$\mathbb{D} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim$$

Il nous faudra un petit effort pour comprendre toutes les subtilités de cette définition. D'abord les objets ainsi présentés ne ressemblent pas à nos nombres habituels, avec une virgule, mais ce sont des couples de nombres entiers. La notation $(a/10^n)$ permet heureusement de nous ramener à des choses plus connues. Reste bien entendu à définir les opérations + et • avec de tels objets. Nous laissons au lecteur le soin d'étudier un peu cet ensemble de couples qui ne sont constitués que par des entiers, de chercher à écrire un ensemble de couples équivalents selon la relation d'équivalence ~, de définir les couples qui sont résultats d'une opération d'addition et de multiplication.

Annexe II : division euclidienne généralisée

Lorsque, de façon plus générale, nous cherchons à étendre la division euclidienne sur d'autres ensembles que $\mathbb{N}$ comme $\mathbb{D}$ bien sûr, mais aussi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathrm{K}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans un corps K, et enfin tout ensemble possédant une structure d'anneau, il va falloir introduire une nouvelle fonction, que l'on appelle stathme.

Soit A un ensemble ayant une structure d'anneau. Le stathme de A est une fonction de A* dans $\mathbb{N}$ permettant d'y introduire une nouvelle relation d'ordre (il n'y en a a priori pas sur l'ensemble des polynômes $\mathrm{K}[x]$ par exemple). Deux éléments de A seront alors ordonnés selon l'ordre de leurs images par la fonction stathme. Voici quelques exemples :

- 1) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$: le stathme de $\mathbb{Z}$ est tout simplement la fonction :

$$\varphi:\mathbb{Z}^*\rightarrow\mathbb{N}$$

$\varphi(a)=/a/$ l'image de a est la valeur absolue de a.

On peut alors définir une division euclidienne sur $\mathbb{Z}$:

Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, , alors il existe un couple $(q,r)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que $a=b\bullet q+r$ et $\varphi(r)\leq\varphi(b)$soit $/r/</b/$

(le reste peut être négatif dans une division euclidienne dans $\mathbb{Z}$).

2) Division euclidienne dans l'ensemble des polynômes à une lettre x à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[x]$:

Les polynômes réduits sont ordonnés par valeurs décroissantes des degrés des monômes, le stathme d'un polynôme sera alors évidemment son degré. Le degré du reste sera strictement plus petit que le degré du diviseur. Si le degré du dividende est plus petit que le degré du diviseur, le quotient égale 0 et le reste est égal au dividende.

Mais au fait, les nombres décimaux peuvent aussi s'écrire comme des polynômes ordonnés par valeurs décroissantes ! Hélas, on ne pourra pas diviser de tels polynômes avec les mêmes règles que dans $\mathbb{Q}[x]$, les coefficients étant des entiers. Et si vous divisez un entier par un entier...

Annexe III : algorithme de division euclidienne avec décimalité

Nous proposons ici des éléments qui peuvent permettre de fonder l'élargissement de la division euclidienne à $\mathbb{D}$, l'ensemble des décimaux. Pour cela, il faut bien entendu fixer la décimalité du quotient.

Soit un triple (a ; b ; n) où $(a;b)\in \mathbb{D}\times\mathbb{D}^*$ et $n\in\mathbb{N}$.

Alors il existe un unique couple tel que :

$(q,r)\in \mathbb{D}\times\mathbb{D}$ tel que $a = b\bullet q + r$

avec décimalité de $q=n$ et $0\leq r<b/10^n$, la décimalité du reste étant égale à la décimalité de b + n.

Reprenons notre exemple : 0,7 divisé par 0,3 décimalité de q =2 : alors la décimalité du reste sera égale à 1 + 2 = 3 et r est compris entre 0 et $0{,}3/(10^2)= 0{,}003$.

On le constate, cette définition s'écarte un peu de la stricte définition de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$. Il a fallu introduire une nouvelle fonction, la décimalité. Et si nous avons maintenant une définition, il reste encore à adapter l'algorithme de division pour déterminer q et r correctement. Le lecteur s'en chargera s'il ne veut pas abandonner à la calculette seule ce type d'opération. Mais que fait réellement la calculette ?

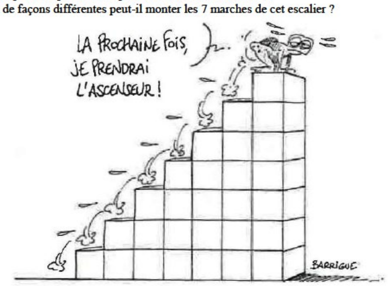
De la stratégie à la démarche, de la recherche au savoir

Julien Sourgens, Camille Batardon, Catia Castronuovo

Etudiants à l'Université de Genève

Dans le cadre du séminaire de recherche en didactique des mathématiques, après avoir effectué une analyse a priori nous sommes allés observer l'activité « Le crapaud » (page 82 du livre élève), présentée ci-dessous, dans une classe de 8ième HarmoS (solution du livre de l'enseignant en annexe).

20. Le crapaud(LE)
Ce crapaud ne parvient pas à sauter plus de deux marches à la fois.
De combien de façons différentes peut-il monter les 7 marches de cet escalier ?



A la suite de cette observation, nous avons décidé de nous intéresser à la façon avec laquelle un enseignant peut mener ses élèves de la stratégie à la démarche, de la recherche au savoir ; ceci constitue notre question de recherche. Cet article présente un bref résumé et l'analyse des deux leçons, la retranscription de deux discussions entre l'enseignant et ses élèves et la réponse à notre question de recherche.

Réalisation de l'activité

Contexte

L'activité s'est passée dans une classe de 8PH de 19 élèves, d'une grande école de ville. Dans cette classe, le niveau des élèves est hétérogène. L'activité s'est déroulée en deux parties différentes, sur deux leçons de 50 minutes.

Synthèse des échanges avec l'enseignant

Nous avons eu plusieurs discussions avec l'enseignant au sujet de notre leçon prévue. Au fil de la discussion, il nous a expliqué que, selon lui, notre leçon prévue n'allait aboutir à aucun savoir ; il n'y aurait que de la recherche. Autrement dit, notre analyse a priori lui semblait réductrice par rapport au potentiel de l'activité, et peu porteuse de sens pour les élèves. Donc, nous avons revu notre planification et préparé une seconde leçon dans une perspective nouvelle : première introduction de la suite de Fibonacci.

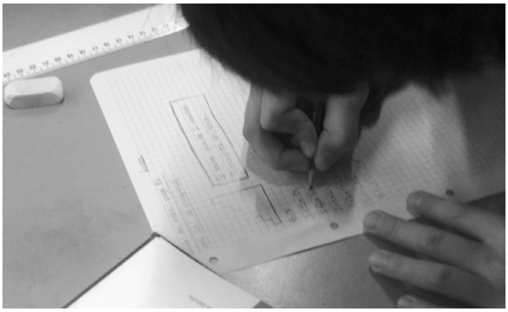
Nous définissons le terme recherche comme un processus de questionnement et d'expérimentation ayant comme point de départ l'exercice proposé. De plus, nous estimons que le terme stratégie se réfère aux différentes manières d'aborder le problème. Par les stratégies, les élèves peuvent prendre conscience des enjeux de l'activité et de la future démonstration. La perspective est d'aboutir à une démarche que l'on définit par un ensemble de solutions ; nous considérons que la démarche, contrairement aux stratégies qui sont propres à l'activité donnée, a un aspect reproductible puisqu'elle peut être réutilisée dans d'autres recherches. Le savoir qui découle de la démarche est l'aboutissement de la recherche.

Récit chronologique de l'activité

1ère leçon

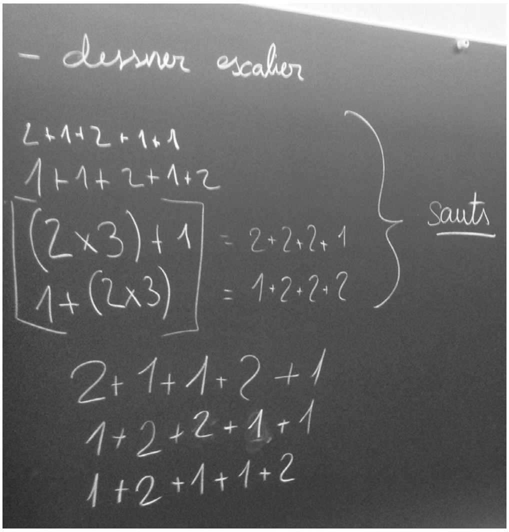
L'enseignant a expliqué ce que les élèves allaient faire. Il leur a demandé de lire individuellement la consigne dans le livre de l'élève et a ensuite constitué des duos hétérogènes ; ce choix a été effectué selon son appréciation, de manière à ce que les élèves puissent s'apporter mutuellement leurs connaissances.

La consigne a été relue par l'enseignant et reformulée par un élève. Puis, il a posé différentes questions, comme par exemple « le crapaud peut-il sauter une marche ? Deux marches ? Trois marches ? » pour s'assurer de la compréhension des élèves. Par cette question, il s'assure du fait que les élèves ont bien compris que le crapaud peut monter l'escalier en combinant différents sauts, de une ou deux marches. Les élèves se sont ensuite mis à la tâche.



Recherche de stratégies par un élève

Après 20 minutes de travail en duo, l'enseignant a procédé à une mise en commun ; il a posé la question « Avez-vous une stratégie, une façon de faire qui pourrait aider les autres à avancer dans leur recherche ? » et plusieurs duos ont proposé leur façon de faire ; par exemple, ils ont proposé de faire une liste ou d'autres de dessiner les escaliers. L'enseignant a alors demandé aux élèves comment il faudrait s'organiser ; quelques élèves ont répondu en donnant les stratégies les plus efficaces selon eux. Le terme de démarche a été émis par un élève.



Propositions de stratégies faites par les élèves

L'enseignant a ensuite discuté avec les élèves sur ce qu'était une démarche et sur les caractéristiques qu'elle avait. Il a demandé comment était celle-ci et les élèves ont expliqué que la démarche était systématique. A la suite de cela, le titulaire de la classe a demandé aux élèves de se remettre au travail en listant les différentes possibilités tout en évoquant une construction par une stratégie systématique. L'enseignant a questionné ses élèves sur leur stratégie et les a comparées, en faisant émerger la solution du tableau ou de la liste. Il a commencé ensuite, à l'aide de ses élèves, à lister les possibilités en les écrivant au tableau.

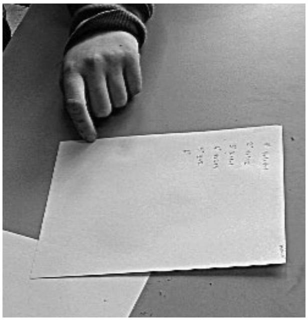
2ème leçon

Tout d'abord, l'enseignant a effectué un rappel de l'activité réalisée la semaine précédente ; il a demandé aux élèves ce dont ils se rappelaient et comment ils s'étaient organisés. Les élèves ont parlé du problème « d'escalier ». Ils ont rappelé l'activité et l'enseignant a donné la solution finale par oral pour sept marches.

Il a demandé ensuite quelle organisation de travail était la plus adéquate. Les élèves ont répondu que la liste était optimale car elle allait plus vite et permettait une meilleure organisation.

Après cela, l'enseignant a demandé comment il était possible de caractériser cette organisation et a amené les élèves à dire que celle-ci était systématique, qu'il y avait une logique (régularité), que l'on ne se perdait pas.

Ensuite, il a lancé les élèves sur une recherche du nombre de possibilités pour un escalier de 4 marches. Les élèves ont rapidement trouvé le bon nombre de possibilités. Il leur a demandé ensuite de rechercher pour 5 marches. L'enseignant a dessiné un tableau récapitulatif de deux lignes et a demandé aux élèves quelle était son utilité; les élèves ont répondu que l'on pouvait comparer et savoir où l'on en était. Ils ont ensuite rempli ce tableau avec les éléments déjà connus. L'enseignant leur a ensuite demandé de rechercher le nombre de possibilités pour trois marches.



Elève en train d'élaborer une liste de solutions pour 4 marches

A la suite de cela, il a demandé si c'était possible de trouver le nombre de possibilités pour 6 marches sans faire de liste ; il a rappelé que l'on peut comparer en s'aidant du tableau rempli. Un élève a proposé les écarts entre le nombre de possibilités et un second a proposé l'addition des deux possibilités précédentes. L'enseignant a validé cette réponse et les élèves ont montré et expliqué celle-ci. Il a demandé de combien était le nombre de marches travaillé la semaine dernière et un élève a répondu et prouvé le nombre de possibilités avec l'addition. Ils ont ensuite recherché pour 8, 9, 10, 20, 50 et 1'000 marches.

Enfin, l'enseignant a effectué une institutionnalisation en demandant aux élèves quelle était l'idée savante derrière ce problème de recherche. Un élève a répondu qu'il fallait « additionner le nombre des deux possibilités de marches précédentes pour trouver la suivante ». Cette règle a été écrite au tableau noir et copiée dans le cahier.

Traitement de la question de recherche

En prenant l'activité-même, nous considérons que celle-ci ne permet pas aux élèves de trouver directement le savoir complexe de la suite de Fibonacci : tout terme de cette suite est la somme des deux termes qui le précèdent.

En effet, les élèves effectuent uniquement de la recherche et ne perçoivent que peu de sens dans l'activité. En d'autres termes, la première partie de notre activité – ici, la recherche de solutions – permet de construire une palette de stratégies. Néanmoins, nous estimons qu'aucun savoir ne peut émerger avec la recherche d'un seul nombre de marches, en vertu de l'absence d'autres éléments comparables, puisque pour exister la suite de Fibonacci requiert la présence de différents termes[1] consécutifs. Nous considérons que des aménagements de la part de l'enseignant sont donc nécessaires pour donner du sens à l'activité aux élèves afin de les mener de la situation de recherche au savoir savant : la suite de Fibonacci. Ainsi nous avons décidé avec l'enseignant d'effectuer une troisième leçon concentrée sur l'acquisition du savoir. Cette seconde partie a donc permis aux élèves de passer de la stratégie à la démarche, grâce aux remarques, indications et questions de l'enseignant.

Il est vrai que l'organisation sociale de la seconde partie n'était pas identique à la première : les élèves se sont retrouvés face à l'enseignant et seuls dans leurs recherches.

Durant la première partie (deuxpremière leçons), les élèves étaient confrontés à euxmêmes et à leurs camarades ; des incertitudes ont donc émergé et étaient dues au groupe et aux différentes discussions inter élèves. Dans la seconde partie, les discussions ont été guidées par l'enseignant, qui savait exactement où il voulait mener ses élèves ; il y avait donc très peu d'incertitudes et s'il y en a eu, celles-ci ont été amenées par l'enseignant.

Constatons-le à présent avec une retranscription partielle d'extraits vidéo enregistrés lors de la seconde partie :

1er extrait :

ENS : « Notre recherche, elle est comment ? »

E1 : « Heu… organisée ? »

ENS : « Oui, mais… on a utilisé un terme plus précis, quand ça revient tout le temps … »

E1 : « ben… régulier. Ah non, systématique »

ENS « Oui, voilà ! D'ailleurs, ce qui est intéressant quand on fait des recherches systématiques, c'est qu'on peut regrouper ces résultats, ça donne une récapitulation des résultats. Est-ce que ça peut être intéressant une récapitulation des résultats ? Pourquoi ? Pourquoi c'est intéressant si je fais

1 Dans notre activité, il s'agit du nombre de marches.

sous forme de tableau ? »

E2 : « Ben… ben on peut comparer les différentes réponses »

ENS : « Oui, juste. Les autres, qu'en pensez-vous ? Que faudrait-il faire maintenant ? »

E3 : « Heu… il faudrait trouver certaines possibilités et après on pourrait comparer »

2ème extrait :

ENS : « Est-ce que l'on pourrait trouver pour 6 marches sans forcément faire de liste et de calculs ? »

(L'enseignant montre qu'il a fait un tableau récapitulatif et lit à nouveau la remarque du début « on peut comparer »). « Alors, quand on compare, on peut faire quoi aussi ? »

E1 : « ben on peut trouver les possibilités pour 6 marches sans faire la liste ! »

ENS : « Très bien. Mais que faut-il faire alors ? »

E2 : « ben il faut regarder le tableau et après réfléchir »

L'enseignant écrit au tableau : en observant et en réfléchissant, on peut peut-être trouver.

ENS : « et ça va nous permettre quelque chose ? »

E3 : « ben on pourra aller plus loin et plus vite »

Dans le premier extrait, lorsque l'enseignant dit aux élèves « […] on a utilisé un terme plus précis, quand ça revient tout le temps […] » , celui-ci induit aux élèves le terme « systématique » ; nous estimons qu'il leur permet de se rappeler de ce mot.

De plus, lorsque l'enseignant dit « D'ailleurs, ce qui est intéressant quand on fait des recherches systématiques, c'est qu'on peut regrouper ces résultats, ça donne une récapitulation des résultats. Est-ce que ça peut être intéressant une récapitulation des résultats ? Pourquoi ? Pourquoi c'est intéressant si je fais sous forme de tableau ? », nous considérons qu'il ne permet pas aux élèves de réfléchir quant à l'utilisation possible des recherches systématiques en une récapitulation des résultats ; le fait de construire un tableau récapitulatif est annoncé par l'enseignant. Ceci est une preuve selon nous que la spontanéité des élèves est altérée et qu'ils sont énormément guidés. De plus, après avoir constitué le tableau, il demande ce qu'il faut faire avec et donc nous estimons que l'enseignant ne permet pas aux élèves de réaliser que quelque chose peut être fait avec ce tableau.

Par ailleurs, dans le deuxième extrait, lorsque l'enseignant donne la consigne, il rappelle tout de suite ce qui avait été remarqué par les élèves au début de la leçon (« Alors, quand on compare, on peut faire quoi aussi ? »). Les réponses des trois élèves de cet extrait constituent une suite logique qui montre qu'ils sont guidés par l'enseignant. En effet, L'élève 1 répond en reformulant la question « ben on peut trouver les possibilités pour 6 marches sans faire la liste ! » L'élève 2 propose une stratégie après que l'enseignant ait demandé « Mais que faut-il faire alors ? » ; nous estimons que cet élève avait compris qu'il y avait quelque chose à effectuer à travers la question de l'enseignant. Pour l'élève 3, nous considérons que la question de l'enseignant lui a permis de comprendre les avantages d'utiliser le tableau directement.

Nous estimons que ces deux extraits reflètent entièrement le niveau de guidage de l'enseignant vis-à-vis de ce qu'il attend, puisqu'il pose toujours des questions impliquant des réponses directes et brèves. Ces questions ne permettent pas aux élèves de donner des réponses longues. Il y a peu de spontanéité de la part des élèves.

On remarque dans ces deux extraits que la présence de l'enseignant n'est pas à négliger, elle est même le noyau de la construction du savoir. En effet, celui-ci attend des réponses très précises ; ses questions dirigent les réponses des élèves vers un mot, un terme ou une phrase.

De plus, nous estimons aussi que durant la deuxième partie, les élèves n'ont plus effectué d'expérimentation de stratégies, puisque celle de faire une liste avait été choisie et intégrée par tous en début de leçon.

En d'autres termes, la liste et le tableau ont été intégrés par toute la classe et les élèves ne sont plus revenus dessus ; le travail n'était plus une question de stratégie, mais une question de démarche, qui permet d'aboutir au savoir savant, ici la suite de Fibonacci.

Après l'analyse de ces deux parties, nous considérons qu'elles étaient très différentes. La première a permis aux élèves de fixer une stratégie en manipulant, en cherchant, en se confrontant à différentes idées et stratégies de leurs camarades. La seconde a utilisé la recherche effectuée et une discussion menée par l'enseignant, ce qui a abouti à un constat qui a permis aux élèves de définir une démarche. Nous estimons donc que les deux parties étaient complémentaires pour arriver au savoir. Ainsi la règle de la suite de Fibonacci a été le fruit de la recherche des élèves et de l'étayage de l'enseignant.

Si l'on se concentre sur l'objectif final de notre analyse a priori : *comment mener les élèves à la suite de Fibonacci ?*, notre analyse précise aussi qu'il est nécessaire pour tout enseignant de savoir à l'avance où il souhaite mener les élèves, afin de poser les bonnes questions et faire les relances.

Dans cette activité, nous considérons que le savoir savant, la suite de Fibonacci, ne pouvait pas être atteint avec les élèves sans les relances de l'enseignant. Les questions posées par l'enseignant guidaient les élèves ; ceux-ci ne pouvaient pas partir dans de mauvaises directions de réflexion et de recherche. Lorsqu'un élève était perdu ou répondait de façon erronée, l'enseignant demandait aux autres élèves d'expliquer et s'assurait que l'élève en question avait mieux compris et/ou réussi en lui demandant de reformuler. De plus, les élèves devaient produire des constats qui étaient notés au tableau noir.

Bien que ce soit les élèves qui aient énoncés les idées des constats, ils étaient écrits par l'enseignant. On peut voir ceci avec les remarques dans l'extrait n°2 présenté ci-dessus ; en effet, les élèves expriment les différents éléments du constat et l'enseignant l'écrit au tableau noir avec une phrase comprenant les éléments proposés par les élèves.

Par ailleurs, la question posée lors de la deuxième partie, constituant une modification de la consigne, « est-ce que l'on pourrait trouver pour 6 marches sans forcément faire de liste et de calculs » a permis aux élèves de réaliser qu'il y avait une règle derrière les différentes propositions. Nous considérons que sans cette remarque, les élèves auraient continué à faire des expérimentations pour tous les autres nombres de marches et n'auraient pas atteint seuls la suite de Fibonacci.

En conclusion, nous estimons que l'objectif visé par cette activité a été atteint par l'enseignant. En effet, celui-ci a guidé les élèves de manière précise et ordonnée en sachant exactement où il voulait les mener.

Concernant notre question de recherche, nous pouvons dire que la construction du savoir chez les élèves s'est effectuée grâce à la planification précise de l'activité, qui était réfléchie à l'avance. Ceci lui a permis de poser les questions précises lors de la seconde leçon. Il est vrai que certains élèves ont eu des difficultés, mais avec les différentes répétitions verbales de l'enseignant et les différentes expérimentations d'autres données, ces élèves ont pu atteindre le savoir.

Référence :

Chastellain, M. (2002). *Mathématiques sixième année, Livre élève*. Neuchatel : Corome.

Chastellain, M. (2002). *Mathématiques sixième année, Méthodologie - Commentaires*. Neuchatel : Corome.

Dans un premier temps, les élèves procèdent par un dénombrement non structuré qui n'aboutit pas, vu les 21 possibilités relatives à l'escalier de 7 marches.

C'est alors que la nécessité d'organiser les résultats se fait sentir et que le recours à un tableau se révèle utile.

Lorsqu'un groupe est bloqué, le maître peut jouer sur la variable didactique «nombre de marches» et l'encourager à déterminer le nombre de possibilités relatif à d'autres escaliers de 2, 3, 4, ou 5 marches.

Les élèves seront alors conduits à élaborer un autre tableau:

Annexe

<table>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td>1</td></tr>
</table>

Nombre de marches d'escalier	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Nombre de façons de monter l'escalier	1	2	3	5	8	13	21	34	...

Les nombres obtenus constituent la suite de Fibonacci: à partir du troisième terme, chaque terme est la somme des deux qui le précèdent:

$$3 = 2 + 1$$
$$5 = 3 + 2$$
$$8 = 5 + 3$$

Comparez, c'est gagné ! Grandeur, mesure et optimisation

Shaula Fiorelli Vilmart[1] et Pierre-Alain Cherix[2]

Université de Genève

Qu'est-ce que les pavages, les suites de nombres, la calculatrice et le pliage ont en commun ? Bien sûr, on peut remarquer que ces thèmes sont tous liés peu ou prou aux mathématiques, mais à Genève, ces sujets ont un autre lien plus précis : ce sont les thèmes choisis pour les Semaines des Mathématiques qui ont eu lieu en 2004, 2005, 2007 et 2010.

Mais au fait, c'est quoi une Semaine des Mathématiques?

C'est un événement organisé par la Commission genevoise de l'enseignement des mathématiques (CEM). Cette commission regroupe des représentants des quatre ordres d'enseignement, de l'école enfantine à l'enseignement supérieur et offre un lieu d'échange pour les acteurs de l'enseignement des mathématiques à Genève. Un de ses buts principaux est de décloisonner les mathématiques vues dans les divers ordres d'enseignement en offrant des possibilités de rencontre pour des enseignants intéressés. C'est dans cette optique que la Semaine des Mathématiques a été pensée.

Il s'agit, durant une semaine, de faire travailler des élèves de tout ordre sur un thème commun, dans le but de promouvoir la cohérence de l'enseignement des mathématiques durant toute la scolarité, du primaire à l'université, en optant pour une problématique commune. Ce travail sur un thème identique permet de mieux percevoir l'unité des mathématiques, la nécessaire continuité de leur enseignement, et devrait contribuer à resserrer les liens entre les différents acteurs de l'enseignement.

1 shaula.fiorelli@unige.ch

2 pierre-alain.cherix@unige.ch

Comment participer

En pratique, les enseignants qui le désirent pourront, durant leurs heures de mathématiques, proposer des activités spécialement conçues[3] avec lesquelles les élèves pourront (re)découvrir le sens de notions mathématiques, débattre de la validité de leurs propositions, et développer et entraîner des techniques nécessaires à la résolution de problèmes.

Nous proposons comme date pour cette Semaine des mathématiques la première semaine d'enseignement après les vacances de Noël, à savoir du **6 au 10 janvier 2014**.

Le Thème de cette édition

Pour cette 5ème édition, le thème retenu est Grandeur, Mesure et Optimisation. L'utilisation des mathématiques dans la vie courante correspond souvent à mesurer une certaine grandeur. Par exemple, dans bien des situations, nous sommes confrontés à des questions du genre : « Quel est l'objet le plus grand/lourd/rapide/ cher/… que je puisse obtenir ? ». Pour répondre à cette question, nous devons nous demander : « Qui est plus grand/lourd/rapide/cher/… que… ? ». Cette démarche nous permet de choisir parmi une famille de situations données, celle qui répond le mieux à notre besoin. Mais pour gagner, nous sommes obligés de comparer.

Le but de cet article est de présenter quelques unes des activités développées pour cet événement. Nous en avons choisies quatre qui nous semblent bien refléter la diversité des notions de grandeur et de mesure. Mais au préalable nous devons préciser ce que nous entendons par ces deux mots.

Grandeurs et Mesures? Définitions

Dans le langage courant les notions de grandeur et de mesure peuvent sembler assez similaires, malgré tout elles ne coïncident pas exactement. Essayons d'expliciter leurs différences. Plusieurs auteurs s'y

3 Les activités sont disponibles sur le site

http://icp.ge.ch/dip/maths/spip.php?rubrique146 sont essayés, en particulier R. Charnay et M. Mante (2008), N. Rouche (1994) et bien d'autres. Ils mettent en avant le fait que la mesure se réfère à un nombre réel positif, alors que la grandeur ne décrit qu'une caractéristique d'une famille d'objets similaires pouvant plus ou moins être comparés.

Essayons d'être un peu plus précis. Dans un document de travail distribué lors de formations continues, Eric Burdet, se référant à Charnay et Mante (2008), écrit :

> **Grandeur** *: caractère (attribut, caractéristique, propriété) d'un objet ou d'un phénomène susceptible de variations (chez cet objet ou d'un objet à l'autre).*

En ce sens, une grandeur n'est rien d'autre qu'une fonction allant d'un espace d'objets (ou de situations) dans un autre ensemble. Cela nous semble peut-être un peu trop large, en effet dans l'idée de grandeur, il nous semble percevoir au moins informellement la possibilité de comparer deux valeurs obtenues, même si cela se fait sur des critères non objectifs.

L'exemple donné par R. Charnay d'une grandeur est la gentillesse d'une personne. On dit facilement qu'une personne est plus gentille qu'une autre, mais cela n'a rien d'absolu, puisque cela dépend de l'appréciation de la personne qui émet ce jugement. On préfère évidemment avoir des moyens de comparaison mieux définis. C'est ce qui amène à l'idée de grandeur repérable.

Une grandeur repérable est une grandeur dont l'espace d'arrivée est un espace totalement ordonné dans lequel la comparaison se fait sur l'ordre de l'espace d'arrivée. Si, comme c'est le plus souvent le cas, cet espace est celui des nombres, alors on peut dire précisément qu'une situation est « trois fois plus… » qu'une autre.

Comme exemple de grandeur repérable on donne souvent la température, puisqu'on peut comparer la température de deux objets et déterminer lequel est le plus chaud en regardant effectivement sur un thermomètre lequel montre la valeur la plus élevée.

Petite question de réflexion : Est-ce que la couleur des yeux est une grandeur repérable ?

Revenons à l'exemple de la température. Nous venons de dire qu'il s'agit d'une grandeur repérable ; est-elle aussi mesurable ?

Mathématiquement, dans l'idée de mesure s'ajoute la notion d'additivité. Autrement dit, si deux objets disjoints ont chacun une mesure, on veut que la mesure des deux objets pris ensemble corresponde à la somme des deux mesures des objets pris isolément. Ceci n'est pas valable dans le cas de la température.

Une grandeur mesurable est donc une grandeur repérable pour laquelle il est possible de donner un sens au fait que la mesure de deux (ou d'une famille finie d') objets disjoints est égale à la somme des mesures des objets pris isolément.

Les exemples de telles mesures sont nombreux (au moins dans des échelles de valeurs raisonnables) puisqu'on trouve, l'aire, le volume, la longueur, la vitesse, la masse, le temps, et bien d'autres.

Implicitement, dans cette définition, le choix d'une échelle a été fait, puisque l'on peut admettre que la valeur 1 est atteinte. Néanmoins, la mesure d'une grandeur se réfère souvent non seulement au choix d'une grandeur mesurable, comme la longueur, mais aussi au choix d'une longueur de référence (le mètre, le pied, l'inch,…).

La mesure d'une grandeur est donc la donnée d'une grandeur mesurable et d'un objet étalon. Ainsi, dans le même document Eric Burdet, toujours en se référant à Charnay et Mante (2008) écrit :

> *Mesurer, c'est déterminer la valeur d'une grandeur (la longueur d'un segment, l'aire d'une surface, le volume d'un solide, la masse d'un objet, ...) par comparaison avec une grandeur unité de même espèce, prise comme référence.*

Mathématiquement, la seule notion bien définie est celle de mesure qui englobe effectivement la notion d'additivité, mais laisse implicite le choix de l'unité de mesure. Il s'agit par contre d'arriver à donner un sens mathématique précis à la notion « deux objets pris ensemble ». Si nos objets initiaux sont des ensembles, alors les « deux objets initiaux pris ensemble » se traduit comme la réunion des deux ensembles initiaux, pour autant que celle-ci soit aussi un objet initial.

Souvent dans la pratique, on parlera de réunion des deux objets, sans nécessairement avoir défini clairement ce que l'on entend par là. Heureusement dans la plupart des cas, il n'y a pas d'ambigüïté.

Des exemples d'activités

Grandeur sans mesure

Mathématiquement, la notion de grandeur n'est pas définie, puisque celle-ci est souvent liée à une mesure associée. Il semble néanmoins avéré qu'il est important pour les enfants de s'approprier l'idée de grandeur avant de l'associer automatiquement à sa mesure, c'est-à-dire à un nombre. En pratique, nous comparons souvent des objets sans les mesurer ; par exemple, si nous voulons comparer la taille de deux personnes, nous les mettons dos à dos pour voir laquelle est la plus grande, sans nécessairement mesurer leur taille respective.

Parmi les activités proposées aux petits degrés, trois d'entre elles répondent plus particulièrement à ce besoin : « Problème de poids », « Les enfants se comparent... » et « Les arbres ». Dans cette dernière, il s'agit justement de déterminer quel est le plus gros arbre d'un parc.

Quel est le plus gros arbre du parc?

Le but principal de cette activité est de permettre aux élèves de prendre conscience de ce qu'est une grandeur en trouvant des moyens de comparer les arbres entre eux.

Un second but est de faire remarquer que « gros » n'est pas bien défini et qu'ils doivent choisir une définition commune de ce mot. Ce deuxième but n'apparaîtra pas nécessairement, mais pourrait émerger au cas où des définitions différentes amèneraient à des classifications distinctes.

La Vitesse, grandeur ou mesure ?

Une autre activité développée pour l'école primaire, « Course à pied », demande à plusieurs groupes d'enfants ayant participé à plusieurs courses de durée fixée de déterminer lequel d'entre eux a couru le plus loin.

Pour les plus grands, il s'agit de plus de répondre à la question « qui a couru le plus vite ? ». Ceci les oblige à ramener les distances parcourues sur des temps différents à un même temps de référence. Cette activité confronte les enfants à deux grandeurs : le temps et la distance et leur permet d'aborder la notion de vitesse.

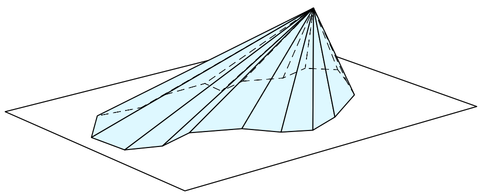
Une Grandeur pour trouver une mesure

Il est aussi intéressant de voir que l'utilisation astucieuse du volume et de son invariance par découpe (équidécomposabilité) permet de trouver des propriétés de la mesure du volume.

Voyons un exemple. Il s'agit sans doute, historiquement parlant, de la première justification théorique du fait que le volume d'un tétraèdre régulier s'exprime selon la formule[4] :

$$\text{Volume} = \text{base} \bullet \text{hauteur} /3$$

Parmi les formules décrivant le volume de polyèdres simples, la première qui pose un vrai problème semble être celle d'objet de type pyramide. C'est-à-dire un objet constitué de l'ensemble des segments de droite reliant tout point d'une base plane donnée à un sommet donné (souvent supposé hors du plan contenant la base)



Un objet de type pyramide

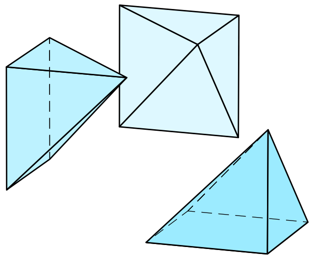
Pour ce type d'objet, la formule est toujours la même :

4 Noter que par « base » on entend l'aire de la base.

Volume = base • hauteur /3 ,

mais comment expliquer le 1/3.

S'il existe une décomposition d'un cube en trois pyramides identiques à base carrée, Max Dehn (1902) a démontré qu'il n'existe aucune décomposition d'un tétraèdre régulier en un cube. La preuve de cette formule pour le tétraèdre régulier (n'utilisant pas le calcul intégral) est donc particulièrement intéressante.



La décomposition d'un cube en trois pyramides identiques à base carrée

La preuve de cette formule pour le tétraèdre régulier est due à Eudoxe (voir à ce sujet l'excellent article de Jean Itard (1950)) et est accessible à tout élève connaissant le volume d'un parallélépipède rectangle pour autant qu'il admette les présupposés naturels d'Eudoxe. Une activité basée sur cette preuve permet donc non seulement de démontrer cette formule qui donne la mesure du le volume du tétraèdre régulier en utilisant les propriétés de la grandeur, à savoir son invariance par découpe, mais permet aussi d'entraîner et d'utiliser la résolution algébrique d'équations dans un contexte très différent de ceux habituellement rencontrés par les élèves.

Conséquences paradoxales d'une mesure

Une dernière activité, le paradoxe de Simpson, montre que l'idée de mesure permet d'expliquer, ou au moins de faire apparaître, des phénomènes qui semblent à première vue paradoxaux.

Pour comprendre cet exemple, il faut se rappeler que lorsqu'on parle d'une probabilité (ou qu'on la calcule), on compare des mesures. En effet, on cherche à calculer la probabilité qu'un événement E se produise avant que celui-ci n'ait lieu. Ainsi, face à une expérience à venir, si nous pouvons déterminer tous les résultats possibles qu'on peut obtenir, nous pouvons choisir ceux qui réalisent l'événement E.

Si une partie de l'expérience est déjà connue, ou si une information supplémentaire nous est donnée, cela restreint l'univers des résultats possibles, ainsi que, peut-être, l'ensemble des résultats induisant E. La probabilité de E sachant cette nouvelle information doit être recalculée en tenant compte de ces restrictions. C'est ce qu'on a appelé une probabilité conditionnelle.

Pour les plus âgés de nos élèves, on peut ainsi mettre en avant certains phénomènes étonnants, voire paradoxaux, liés à cela. Le paradoxe de Simpson est un tel phénomène. Imaginons que nous voulions comparer l'efficacité de deux traitements contre les calculs rénaux. Et que nous connaissions non seulement des statistiques de guérison suite aux deux traitements sur un échantillons de 700 patients, mais aussi que nous connaissions la taille des calculs de chaque patient, alors l'évaluation du traitement va dépendre dramatiquement de la prise en compte ou non de la taille des calculs rénaux (voir Annexe).

On remarque qu'on ne peut pas se contenter d'observer des résultats triés de manière arbitraire pour en déduire des conclusions (méthode inductive). Il est nécessaire d'avoir une théorie a priori, qui donne les catégories pertinentes dans lesquelles doivent être répartis les résultats de l'expérience que l'on va réaliser (méthode déductive).

Ceci étant dit, rien ne nous assure que la prise en compte d'un autre paramètre (par exemple le poids, l'âge, le sexe etc.) ne modifierait pas à nouveau les conclusions.

Il est troublant de rencontrer ce type de paradoxes, mais cela nous oblige à garder un esprit critique face à nos résultats[5].

En conclusion, nous voyons au travers de ces exemples que les idées de grandeur et de mesure, bien que prenant des formes très variées, admettent des méthodes et des approches similaires. L'additivité de

5 Pour en savoir plus sur le paradoxe de Simpson, vous pouvez lire l'article de Jean-Paul Delahaye (2013).

la mesure est la propriété fondamentale donnant sa force à cette notion. Faire des mathématiques revient en fait à réaliser qu'une propriété commune apparaît dans des situations apparemment différentes, et que c'est cette propriété sous-jacente qui permet une résolution similaire des questions soulevées dans les situations observées. Le prix à payer pour cette unification est l'abstraction de la notion. C'est la diversité des exemples de mesures, et par conséquent la grande variété d'activités que l'on peut proposer aux élèves, qui a fait que ce thème a été choisi pour cette nouvelle Semaine des Mathématiques.

Références

Charnay, R., Mante, M., (2008). *Mathématiques - Tome 1*. Hatier, Collection Hatier concours.

Dehn, M. (1902). Über den Rauminholt. *Math. Ann.* 55, 465-478.

Delahaye, J.-P. (2013). L'embarassant paradoxe de Simpson. *Pour la science 429*, 80-85.

Rouche, N. (1994). Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil epsitémologique. *Reperes-IREM, 15*, 25-36.

Itard, J. (1950). *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, Tome 3*(3) 210-213.

Annexe

Deux traitements principaux sont possibles contre les calculs rénaux : une chirurgie classique (traitement A) et une chirurgie endoscopique (traitement B). Un hôpital procède à une étude statistique comparée et obtient les résultats suivants :

Taux de guérison (succès/total)

Traitement A	Traitement B
78% (273/350)	83% (289/350)

Sur la base de ces observations seules, on peut en déduire que le traitement B est plus efficace que le traitement A.

Pour les mêmes 700 cas de calculs rénaux, un assistant propose une nouvelle interprétation des résultats, en rajoutant une donnée concernant la taille des calculs rénaux, il obtient les résultats suivants :

Résultats en fonction de la taille des calculs

Petits calculs		Gros calculs	
Traitement A	Traitement B	Traitement A	Traitement B
93% (81/87)	87% (234/270)	73% (192/263)	69% (55/80)

On observe que le traitement A est plus efficace que le B dans les deux cas. En rajoutant cette observation, on en déduit donc que le traitement A est plus efficace que le traitement B, soit la conclusion inverse !

Labo-maths

Thierry Dias

HEP Vaud

L'objectif de cette rubrique « labos-maths » est de proposer aux enseignants des situations de recherche mathématiques à partir d'un contexte (ici celui des dés à jouer) afin qu'ils puissent conduire de véritables explorations avec leurs élèves. Il ne s'agit donc pas de faire « faire des problèmes » au sens où on l'entend habituellement. Ainsi, si le contexte de la recherche est imposé (sous forme d'un jeu avec quelques règles), les questions à poser et les démarches de travail envisagées peuvent être diverses et donc adaptées à plusieurs niveaux de classe. Il n'y a pas systématiquement de consigne imposée qui laisserait entendre qu'il existe une réponse attendue relativement unique. Les situations proposent en effet des recherches qui peuvent conduire à une multiplicité de découvertes et donc de « réponses ».

La formulation d'un ou plusieurs résultats prend également ses distances avec une traditionnelle « phrase réponse ». Nous engageons plutôt les enseignants à faire produire à leurs élèves de petits récits racontant leurs recherches tant dans les moments de découvertes que de doutes. Nous préférons l'emploi de la terminologie de *résultat* ou *découverte* en lieu et place de celle de *réponse*.

La rubrique propose des situations d'investigations pour lesquelles il n'est pas non plus fourni d'*analyse a priori*. Nous entendons cette terminologie d'investigation en référence à la diversité des processus de raisonnement convoqués : inductif, déductif et expérimental. Nous engageons donc les enseignants à faire faire des expériences et des découvertes mathématiques à leurs élèves en parcourant parfois des chemins inattendus, parfois des impasses provisoires. Toute action menée par les élèves est en effet susceptible de révéler leurs connaissances. Il s'agit de privilégier des espaces de recherche dans lesquels les élèves se sentent suffisamment autonomes pour mener de véritables expériences personnelles avec les objets; qu'il s'agisse d'objets sensibles ou d'objets de pensée. On peut en effet imaginer que des expériences conduites par exemple sur les nombres ne nécessitent pas forcément l'emploi de jetons ou de cubes.

L'enseignant doit privilégier un rôle d'accompagnateur de la résolution, en essayant de ne pas prendre de responsabilité directe dans les choix mis en œuvre par les élèves. Il pourra lui aussi être surpris des découvertes mais sera avant tout un témoin privilégié du potentiel de ses élèves à construire des connaissances mathématiques.

La finalité de la rubrique tient également dans la possibilité d'une communication entre les enseignants. Nous proposons effectivement à celles et ceux qui le souhaitent de témoigner de leurs expériences en racontant leurs découvertes, leurs surprises et les difficultés rencontrées. Ainsi un enseignant peut expliquer comment il a posé le problème, avec quelle(s) consigne(s) et pourquoi il a choisi certaines questions et pas d'autres. Il pourra également témoigner de sa réflexion sur le travail de ses élèves, analyser le dialogue en classe ou présenter les perspectives qui résultent de ses expériences mathématiques.

Les problèmes de cette rubrique « labomaths » peuvent se résoudre collectivement au sein de véritables petits laboratoires de mathématiques[1]. Ils ne doivent pas donner lieu à une compétition quelle qu'elle soit, ce sont plutôt des occasions de mener des recherches collaboratives.

1 Voir : Dias, T. (2012). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Magnard. Paris.

Les dés sont au coin !

La recherche

Image 1

Dans le coin de cette pièce, trois dés sont empilés selon une règle simple : les faces des dés qui sont l'une sur l'autre doivent comporter les mêmes constellations.

Il faut aussi rappeler que les faces opposées d'un dé font toujours une somme de 7 quand on ajoute les constellations.

Ainsi, dans l'installation proposée dans l'image 1, la face opposée du sommet du cube rouge[2] vaut 3 (car 4+3=7), et la face du sommet du cube vert vaut donc 3 elle aussi.

La recherche est basée sur l'observation d'une somme particulière : celle des points des sept faces visibles. Dans cet exemple on trouve 21

$$\underline{4 + 6 + 2} + \underline{5 + 1} + \underline{2 + 1} = 21$$

Votre premier défi consiste à faire chercher par les élèves une installation de 3 dés superposés dans le coin d'une pièce, de sorte que la somme des faces visibles soit par exemple 18. Ce choix de valeur n'est pas forcément imposé à tous les chercheurs, on peut commencer en ouvrant davantage la situation en demandant aux élèves de faire leurs propres recherches de sommes ou en proposant plusieurs valeurs de sommes.

2 *Le dé rouge est celui du dessus, le dé vert est celui du milieu et le dé jaune est celui du dessous.*

Vous pouvez ensuite proposer la recherche d'une autre somme, ou de plusieurs autres sommes en variant ou non le nombre de dés :

- obtenir 26 avec deux dés seulement,
- obtenir 11 avec trois dés.

Toutes les recherches de sommes sont intéressantes, mais prenez bien le soin de vérifier à l'avance qu'un assemblage est possible pour l'obtenir. Provoquer les élèves en proposant des sommes impossibles à obtenir est aussi une tâche intéressante, mais elle ne doit venir que dans un deuxième temps. Il sera alors question de chercher les arguments qui permettent d'affirmer que telle ou telle somme est impossible a priori. On ne peut pas obtenir une somme de 6 avec 3 dés puisque l'on additionne 7 faces par exemple !

Vous pouvez également proposer des recherches plus exhaustives mais aussi plus longues en laissant les élèves faire l'inventaire des sommes possibles avec 3 dés (ou 2) en leur demandant d'essayer d'organiser leurs résultats.

Pour faire des recherches amusantes, vous pouvez également proposer les énigmes suivantes :

- Quelle est la plus petite somme que l'on peut obtenir avec 2 dés ? Et avec 3 dés ? Et avec 4 dés ?
- Quelle est la plus grande somme que l'on peut obtenir avec 2 dés ? Et avec 3 dés ? Et avec 4 dés ?
- Pour chaque recherche précédente, existe-t-il des solutions d'assemblage pour tous les nombres compris entre le minimum et le maximum des sommes ?
- Avec 3 dés, peut-on passer d'une somme de 37 à une somme de 11 sans changer les cubes de place et en tournant seulement les cubes sur eux-mêmes ?

En augmentant le nombre de dés on permet d'engager des recherches plus compliquées sur le plan mathématique. Avec 5 dés ou plus, les combinaisons possibles deviennent par exemple plus nombreuses, et la recherche d'une somme particulière plus complexe. La probabilité de tomber sur cette somme par hasard étant très faible, les élèves devront s'appuyer sur des raisonnements plus élaborés. La mise en mots de ces arguments sera alors l'occasion d'un moment de débat dans la classe.

Pilotage de la classe

Vous pouvez bien entendu permettre à vos élèves de travailler en petits groupes, mais vous êtes libre de choisir les dispositifs qui vous conviennent le mieux. Dans un premier temps, un travail individuel peut très bien être adapté à cette recherche.

Laisser les élèves s'organiser comme ils le souhaitent, mais conseillez leur de bien prendre des notes (ou des photos) de leurs différents essais ainsi que de leurs découvertes. Ces traces de recherche seront en effet essentielles pour partager les résultats entre chercheurs.

Un élément important consiste à fournir aux élèves le matériel nécessaire, c'est à dire des dés. Le plus agréable consiste à proposer des dés d'assez grande dimension pour faciliter les manipulations et les constats visuels. Concernant le coin pour l'empilage, les angles de la classe peuvent bien entendu être mis à profit, mais vous pouvez également envisager une petite construction avec trois morceaux de carton simulant un coin.

Prenez le temps nécessaire à discuter des consignes de ce problème avec les élèves qui n'entrent dans aucune action susceptible de révéler leurs connaissances. Il n'est en effet jamais souhaitable qu'un élève reste en situation d'échec prolongé quelle que soit l'activité qui est proposée. Cet étayage langagier vous donnera également l'occasion de vous assurer qu'aucune difficulté de compréhension (sémantique ou syntaxique) ne vient nuire inutilement au lancement de la recherche mathématique.

Nous vous rappelons cependant qu'il faut toujours éviter d'induire un résultat en privilégiant des étayages laissant une liberté suffisante à l'expression des connaissances des élèves.

Quand les élèves commencent le problème, chaque assemblage trouvé nourrit la recherche et leur donne des idées pour trouver d'autres solutions. Laissez-leur un temps d'exploration suffisant pour qu'ils puissent dépasser les configurations les plus évidentes. Ils sauront sans aucun doute trouver de nouveaux assemblages intéressants même s'ils pensent parfois être « bloqués » un certain temps pensant qu'il n'y a plus rien à trouver. Si certains de vos élèves sont en difficulté avec la prise de notes nécessaire à la compilation des essais et des découvertes, vous pouvez fournir une fiche comportant des dessins d'assemblages de cubes en perspective, ou mieux encore permettre la prise de photos.

Pensez à recueillir le travail des élèves, prenez des notes sur les interactions qui ont eu lieu, sur la variété des approches des élèves que vous avez observées dans votre classe. Toutes ces informations peuvent toujours être utiles pour mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves mais aussi pour évaluer leurs connaissances et leur potentiel à apprendre en mathématiques. Dans votre réflexion sur votre expérience avec ce problème, gardez par exemple à l'esprit les questions suivantes :

- Quelles difficultés ont eu les élèves dans la compréhension du problème ?
- Comment les élèves ont-ils abordé cette tâche ?
- Quelles stratégies les élèves ont-ils essayées ?
- Y a-t-il des réponses d'élèves ou des interprétations qui vous ont surpris ?

Où sont les maths ?

Les connaissances mathématiques utiles pour effectuer les recherches proposées dans ce problème sont diverses et concernent essentiellement le domaine du nombre entier et des opérations du champ additif. Nous rappelons cependant à cette occasion en citant le Plan d'Étude Romand que :

> *« Les mathématiques sont plus qu'une collection de concepts et de compétences à maitriser. Il s'agit plutôt d'un ensemble complexe d'idées incluant des méthodes d'investigation et de raisonnement, les techniques de communication et les questions de contexte. »*

Ainsi cette recherche concerne-t-elle davantage les objectifs relatifs aux éléments pour la résolution de problèmes tels qu'ils sont énoncés dans le plan d'étude. On peut retenir ici par exemple :

- *La mise en œuvre d'une démarche de résolution* en évaluant par exemple les critères suivants : est-elle explicite, adaptée, cohérente ?
- *L'ajustement d'essais successifs*, puisque les recherches consistent à construire des procédures se basant sur la mise en lien de résultats intermédiaires et temporaires.
- *La vérification puis la communication d'une démarche*, car les différentes étapes des recherches peuvent être plus ou moins superposées et que leur communication nécessitera souvent une mise en forme spécifique.

Quelques enjeux en termes de notions mathématiques sont également sous-jacents dans la résolution des problèmes suscités par l'énigme. Ils sont adaptés même aux premiers niveaux de l'enseignement primaire et concernent les domaines du nombre (comptage et dénombrement, comparaison, classement) et des opérations (outils de calcul : répertoires, calculatrice, éventuellement algorithmes).

Partagez vos expériences

Savoir comment vos élèves répondent à ce problème nous intéresse beaucoup. Nous sommes également curieux de connaître les explications, les justifications et les raisonnements que font vos élèves. Si vous le souhaitez, nous serons donc ravis de recevoir vos idées et vos réflexions.

Vous pouvez ajouter à votre envoi toutes les informations concernant la manière (ou les manières) dont vous avez choisi de poser le problème, des travaux d'élèves et même des photos montrant vos petits chercheurs en action. Envoyez vos résultats en indiquant votre nom, le niveau de votre classe, ainsi que les coordonnées de votre établissement à l'adresse suivante :

Math-Ecole,

Pavillon Mail, Université de Genève/FAPSE,

Boulevard du pont d'Arve, 40

1204 GENEVE

ou par mail à : mathecole@ssrdm.ch

Avec votre accord, quelques-uns de vos envois seront publiés dans un numéro ultérieur de la revue Math-Ecole. Vos noms et coordonnées d'établissement seront bien entendu indiqués dans l'article correspondant.

Math-Ecole, pour ceux qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques !

Ce numéro de Math-Ecole est le deuxième numéro électronique. Il devrait être suivi par de nombreux autres numéros.

Chacun est invité à propposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques.

Les articles doivent parvenir en version électronique, par email adressé à la rédaction (mathecole@ssrdm.ch). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Contact : mathecole@ssrdm.ch

Site internet :

http://www.math-ecole.ch/mathecole/

Pour commander d'anciens numéros de Math-Ecole vous pouvez adresser vos demandes à mathecole@ssrdm.ch

- CHF 5.- de n° 150 à 218 (n° 136, 152, 153, 178,179 et 186 épuisés)
- CHF 3.- de n° 1 à 149 (nombreux numéros épuisés)

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 50 depuis la rubrique *Consultation en ligne*.

Couverture

Détail d'un oeuf géométrique pavé réalisé par Alessia, Collège de Delémont.