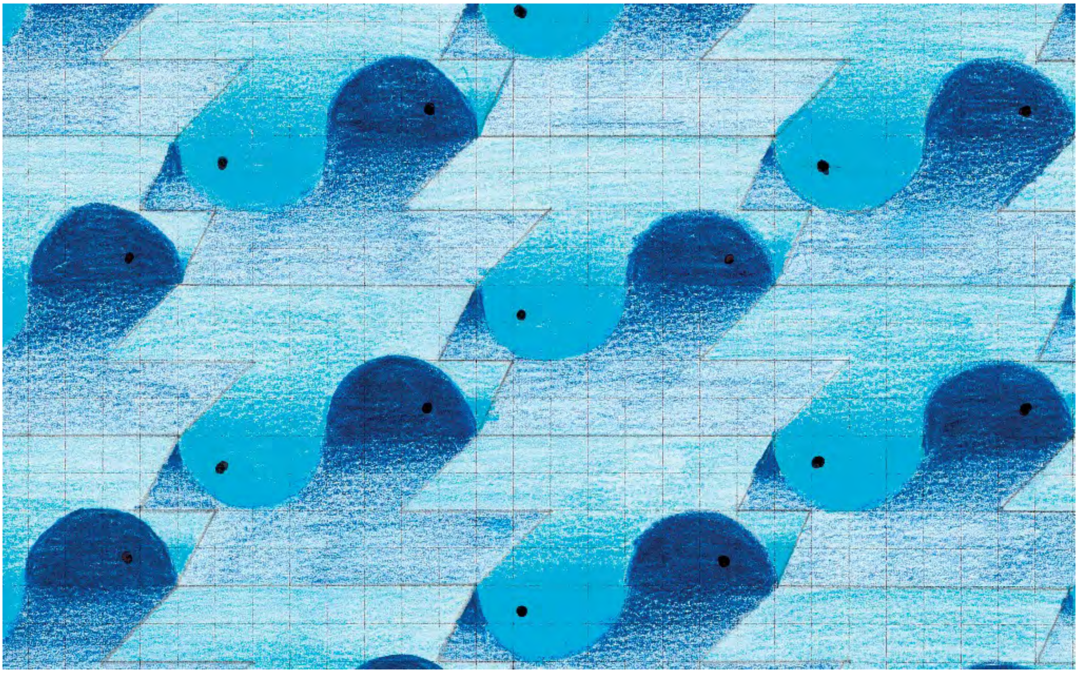
MATH-ÉCOLE

223

JUIN 2015



Math-École (web)
ISSN 2296-715X

MATH-ECOLE

223
Juin 2015

sommaire

Éditorial

Sylvia Coutat

Université de Genève

Le précédent numéro de Math-École *Enseignement de la géométrie* publié en version papier a rencontré un joli succès. Trois articles ont fait l'objet d'une présentation lors du colloque Math-École 222 organisé par la SSRDM. Après cette attention focalisée sur la géométrie, la revue retrouve sa grande diversité d'articles à travers des publications numériques.

Cette diversité de problématiques se retrouve dans ce nouveau numéro. Les 9 articles présentés recouvrent les 4 axes thématiques Plan d'Étude Romand (PER) pour le sous-domaine des mathématiques, ainsi que l'axe modélisation. Les différents ordres d'enseignement sont aussi représentés. Les articles traitent de l'enseignement spécialisé et de l'enseignement « ordinaire » avec pour ce dernier les trois cycles d'enseignement représentés. Un article s'étend même jusqu'au post-obligatoire.

La revue Math-École ambitionne d'acquérir un statut de ressource pour les enseignants. Les ressources pour l'enseignement des mathématiques en Suisse romande ne sont en effet pas réduites aux moyens et manuels d'enseignement mis à disposition des enseignants et au PER. Dans la réalité, les ressources investies par les enseignants dépassent souvent largement documents officiels. Les formations continues, les ouvrages pédagogiques et didactiques, les ressources en ligne participent à l'enrichissement des ressources utilisées par les enseignants. En outre, ces ressources initialement matérielles se convertissent progressivement en ressources numériques. Les nouveaux moyens d'enseignement pour le secondaire 1 en sont un parfait exemple. Les ressources de l'élève sont diffusées sous la forme de livres, alors que pour l'enseignant elles sont numériques. Il semble qu'il en sera de même pour les prochains moyens d'enseignement pour le primaire. Toute fois un basculement vers une ère uniquement numérique n'est pas encore envisageable ni souhaitable ! De nombreuses recherches défendent la nécessité de la manipulation aussi bien pour les élèves des petits degrés que pour les plus grands. Les articles de ce numéro sont là pour vous en convaincre. On ne peut cependant pas lutter contre la croissance exponentielle des offres du numérique pouvant enrichir les pratiques des enseignants en particulier dans les ressources qu'ils s'approprient. Pourquoi vouloir lutter quand l'alliance numérique mastériel est indiscutable ? Numériques ou matérielles, les ressources des enseignants doivent avant tout répondre à leurs besoins.

C'est dans cet esprit que Math-École se veut une ressource pour l'enseignant. La revue se doit d'être adaptée à ses besoins du quotidien à travers l'étude de situations d'enseignement. Mais elle doit aussi pouvoir alimenter sa réflexion de professionnel de l'enseignement. Il nous semble qu'au vu des nombreuses thématiques des articles de la revue, son statut de *Ressource pour l'enseignant* n'est plus à prouver.

Aussi, pour que la pertinence de la revue perdure nous comptons sur vos prochaines propositions d'articles !

Bonne lecture

Première rencontre « problématique » avec Pythagore

Jean-Marc Ellwanger & Nebih Sliman

Étudiants, Université de Genève

Selon le Plan d'Etude Romand (PER), le théorème de Pythagore peut être introduit en 10e Harmos[1] (pour les niveaux 2-3) ou 11e Harmos[2] (pour le niveau 1). Toujours selon le PER, ce théorème est l'un des plus importants. La première rencontre avec ce savoir peut se faire par une approche qualifiée de « monumentale », c'est-à-dire l'enseignant présente le savoir de manière magistrale, unilatérale aux élèves (Chevallard, 2002). L'approche « balisée » peut également être utilisée. Elle correspond à la conquête du nouveau savoir pas à pas. Chaque étape est construite de telle sorte que l'élève puisse la franchir seul, sans encombre.

Dans ce qui suit, nous proposons une première rencontre par problématisation. Dans cette approche, le théorème de Pythagore n'est ni exposé d'emblée ni dévoilé au compte-goutte. Le théorème reste caché – idéalement on ne mentionne pas que l'on introduit un nouveau savoir ni même que ce savoir porte le nom de théorème de Pythagore. Le théorème apparaît indirectement comme la clé permettant à deux frères de se réconcilier.

L'approche que nous présentons revêt deux aspects : une première partie testée en classe avec des 10e LC[3] puis une seconde partie qui correspond à des idées d'amélioration de l'activité au vu de l'analyse des productions des élèves.

1 Elèves de 13-14 ans.

2 Elèves de 14-15 ans.

3 Langues vivantes et Communication.

Énoncé du problème

Une maison construite sur un terrain en forme de triangle est bordée de 3 jardins de forme carrée :

- le jardin A d'aire a^2,
- le jardin B d'aire b^2 et,
- le jardin C d'aire c^2.

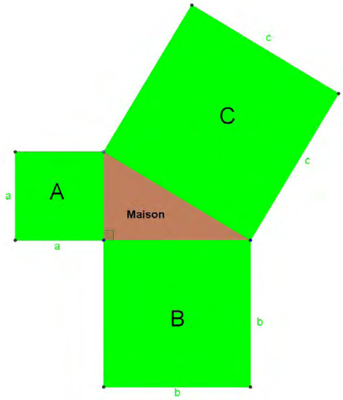


Figure 1 : Maison avec les 3 jardins A, B et C

Dans son testament, le propriétaire de la maison et des jardins lèguent ses jardins à ses deux fils, Zébulon et Archibalde. Il écrit :

> *[…] Chacun recevra assurément une part identique de mes 3 jardins, néanmoins je ne souhaite pas voir ces beaux jardins partagés en deux. Ainsi Zébulon recevra l'entier des jardins A et B, et Archibalde recevra l'entier du jardin C.[…]*

Figure 2 : Extrait du testament

Chez le notaire, les deux frères sont perplexes à la lecture de ce passage. Ils comprennent que leur père veut leur léguer la même surface mais qu'il ne voulait pas partager les jardins en deux. S'en suit une dispute. Zébulon pense que son frère a reçu plus que lui. Archibalde pense exactement le contraire.

Peux-tu aider le notaire à interpréter le testament en lui indiquant lequel des deux frères obtient finalement le plus grand jardin ?

Explicitation de l'énoncé

Le problème décrit ci-dessus s'appuie sur trois parties facilitant la mise en activité des élèves.

1. Tout d'abord, l'histoire du partage de surface entre deux frères ainsi que sa mise en relation avec un croquis devraient sus-

citer l'intérêt des élèves. Ces histoires sont certes banales mais font appel à des souvenirs lointains de contes et de légendes.

2. On pose une **énigme**. En effet, le père lègue bien la moitié des jardins à ses fils mais ne veut pas que l'on partage les jardins en deux. Il y a là une attitude, à priori, contradictoire du père. On ne comprend pas bien ses intentions. La question qui se pose à chaque élève : pourquoi le père dit-il vouloir léguer la moitié à chacun de ses fils mais qu'il ne le fait pas ? Pourquoi ne pas simplement dire « je lègue A et B à Archibalde et C à Zébulon » ?
3. On parle d'un **conflit entre deux frères** et de la possibilité pour l'élève d'aider à sa résolution.

En termes d'intentions didactiques, on introduit les aires algébriques a^2, b^2 et c^2, puis on établit visuellement un lien entre le triangle et ses carrés adjacents.

Procédures de résolution observées

Dans la situation telle que présentée jusqu'à là, nous avons pu observer que les élèves de ce niveau scolaire « se précipitent » sur une procédure de résolution en particulier. Ils sortent leur règle et mesurent les côtés du triangle. Ils aboutissent à une approximation des aires et concluent que l'un des deux frères aura légèrement plus que l'autre.

A titre illustratif, nous avions construit une situation avec $a = 2$ cm et $b = 4$ cm. On sait alors que $c = 4.472135...$ cm (la racine de 20). Nos élèves n'ont alors eu aucune peine à mesurer a puis b, par contre ils ont dû mesurer c par approximation. Ils ont obtenu soit 4.45 cm soit 4.50 cm pour c. Selon leur approximation, ils diront que Zébulon reçoit moins que son frère ou alors exactement le contraire.

Il ressort de cette illustration qu'il est important, en termes de variables didactiques, de ne pas avoir un triplet pythagoricien du type (3,4,5) lorsque l'élève sort sa règle, mais bien un nombre irrationnel pour l'hypoténuse. En effet, nous souhaitons qu'il découvre le théorème de Pythagore et non qu'il en calcule un cas particulier en occultant ainsi, de fait, une possible généralisation.

Nous avons observé que sur une classe d'une vingtaine d'élèves après récolte des réponses au tableau noir, une demi-douzaine d'élèves s'est retrouvée partagée en deux camps comme Zébulon et Archibalde. Ils auraient pu ainsi constater les limites de cette procédure de résolution. De plus, ils auraient pu se rendre compte que la différence est très faible. En effet, $2^2 + 4^2$ vaut 20 ce qui est proche de 19.8025 ($= 4.45^2$) ou de 20.25 ($= 4.50^2$). Dans notre cas particulier, ce ne fut pas le cas. Les élèves sont restés arc-boutés sur leur résultat en argumentant que l'autre groupe avait mal mesuré l'hypoténuse. Il a fallu l'intervention de l'enseignant pour **caractériser** l'écart minime entre les résultats des deux groupes et pour susciter chez les élèves un questionnement plus global des résultats : « est-ce que le résultat ne pourrait être simplement 20 ? ».

Relance

Nous pensons que suite à ces observations nous pourrions structurer l'activité à ce moment-là avec une relance de l'enseignant sous la forme d'un prolongement du problème.

On pourrait être tenté ici de dire que l'on quitte la problématisation pour revenir à une sorte de balisage. Ce n'est absolument pas le cas. Les élèves ont résolu individuellement le problème mais collectivement l'obstacle n'a pas été franchi.

Énoncé du problème (suite)

Le notaire se souvient alors que le défunt propriétaire avait à l'époque gribouillé quelque chose sur deux cartons de forme carrée au sujet de ce partage. Il se souvient de les avoir consignés dans une enveloppe. Après de longues minutes de recherche dans le dossier, il retrouve cette fameuse enveloppe et en sort les deux cartons suivants :

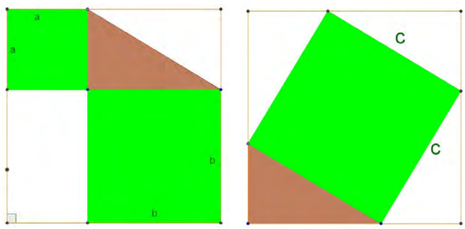


Figure 3 : Croquis des deux cartons

Explicitation de l'énoncé

Nous pensons qu'il serait opportun de distribuer cette suite d'énoncé aux élèves avec une vraie enveloppe pour chacun d'eux dans laquelle on retrouverait ces deux cartons.

L'intérêt de la relance est de garder vive l'attention des élèves. La suite du problème comporte ainsi la mise à disposition d'un indice. L'élève deviendrait détective et, tel Sherlock Holmes, il « mènerait l'enquête ».

Les intentions didactiques seraient de permettre à l'élève de franchir l'obstacle constaté précédemment en restant dans un contexte de problématisation. A cette fin, nous choisirions en termes de variables didactiques de reprendre sur les deux cartons les couleurs précédentes pour les jardins (vert) et la maison (brun). De plus, les cartons devraient être de dimensions a+b (6 cm dans le cas de notre illustration) et surtout ne pas comporter de marges. En effet, bien que les découpages soient assez naturels (ils séparent en deux le bien dévolu à Archibalde d'avec celui dévolu à Zébulon), un bord autour des grands carrés découpés donnerait une touche artificielle, voire une piste un peu trop évidente. Nous préférerions ainsi avoir un découpage implicite en triangles et rectangle, qui semblerait résulter de la forme des cartons et non d'une intervention de l'enseignant.

Procédure de résolution attendues

Dans ce cas-ci, la procédure consistant à mesurer à la règle ayant déjà été utilisée « sans succès », les élèves seraient vraisemblablement amenés à considérer une autre procédure. Nous en détaillons deux ci-après, l'une géométrique (par découpage), l'autre algébrique.

Pour faciliter la compréhension du lecteur, nous nommons chacun des découpages des deux croquis. Nous gardons la même lettre M pour la surface brune correspondant à la maison.

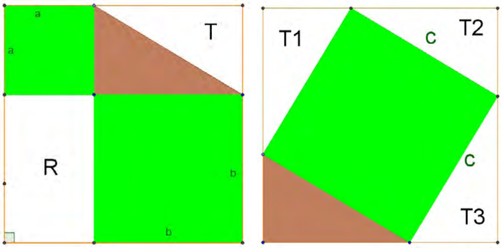


Figure 4 : carré 1 et carré 2 du croquis

Par découpage

En premier lieu, les élèves constatent visuellement que les deux grands carrés cartonnés sont de même aire. Ils procèdent ensuite par découpage. En premier, le triangle M a la même surface sur les deux croquis. Deuxièmement, T et T2 ont également la même surface. Finalement, le regroupement de T1 et T3 donne le rectangle R.

Ils en déduisent que la surface des jardins A et B est égale à la surface du jardin C, et que donc : $a^2 + b^2 = c^2$.

Algébrique

En premier lieu, les élèves constatent visuellement que les deux grands carrés cartonnés sont de même aire et vérifient que leurs côtés respectifs valent a+b. Ils modélisent algébriquement les aires des surfaces non-vertes :

Carré 1 : le rectangle R, le triangle brun M et le triangle T

$ab + (ab)/2 + (ab)/2.$

Carré 2 : les quatre triangles M, T1, T2, T3 de base a et hauteur b

$(ab)/2 + (ab)/2 + (ab)/2 + (ab)/2$

Ils en déduisent que la somme des surfaces non-vertes est égale pour les deux grands carrés et que donc : $a^2 + b^2 = c^2$.

Conclusion et suite à donner

Ce prolongement devrait permettre aux élèves de découvrir ainsi par eux-mêmes la relation de Pythagore. Le savoir est cependant très fragile. En effet, la problématisation combine des notions de carrés, de triangles et de découpages, et dissimule en quelque sorte la place prioritaire du triangle. A cela s'ajoute le fait qu'à aucun moment, on ne mentionne le fait que les triangles sont rectangles.

On pourrait alors continuer la problématisation dans l'objectif de découvrir que cette relation est valable uniquement pour des triangles rectangles.

L'idée serait de leur distribuer un nouveau problème d'héritage de jardins avec toutefois une maison dont la surface n'est pas un triangle rectangle. Cette fois-ci, on choisirait un triangle dont les côtés sont des entiers, par exemple (3,4,6).

En termes de résolution, les élèves seraient probablement amenés directement à énoncer le théorème de Pythagore et à dire que le partage est équitable. L'enseignant les inviterait alors à reprendre leur règle pour faire une vérification.

Références

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude : Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Une analyse a priori de la tâche « Les 9 boules de Cristal »

Valérie Batteau

HEP Vaud

Nous proposons de réaliser une analyse a priori de la tâche mathématique « Les 9 boules de cristal » (Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C., & Villars-Kneubühler, F. 1998a, p. 45) issue des Moyens d'Enseignement Romands de 5P Harmos[1]. Nous allons identifier les connaissances mathématiques en jeu dans la tâche, puis étudier différentes stratégies et les variables didactiques de la tâche.

L'objectif de cette analyse a priori est :

- d'étudier les stratégies possibles afin de permettre d'anticiper les procédures[2] mises en œuvre par les élèves, ainsi que les connaissances mathématiques en jeu
- d'étudier les variables didactiques[3] afin de permettre d'une part, d'identifier ce que l'enseignant peut modifier dans la tâche et les conséquences de ses choix (même implicites) sur les stratégies et les connaissances mathématiques en jeu et d'autre part, d'adapter la tâche à ses élèves (en la simplifiant, en la complexifiant, en proposant des variantes par une action sur les valeurs des variables didactiques).

1 *Élèves de 8-9 ans.*

2 *« Une procédure peut être définie comme l'ensemble des opérations (éventuellement des actions) que l'élève élabore pour atteindre le but assigné par le problème.*

Une stratégie est le processus que l'on met en place pour élaborer la procédure de résolution d'un problème. » (Charnay & Mante, 2014, p. 78)

3 *Variable qui peut être modifiée par l'enseignant et qui affecte la hiérarchie des stratégies (par le coût, la validité, la complexité). (Briand & Chevalier, 1995)*

Analyse a priori de la tâche

Présentation de la tâche

Les 9 boules de cristal
Cherche tous les nombres que l'on peut présenter sur un boulier à 2 tiges en utilisant 9 boules au maximum.

Figure 1 : « Les 9 boules de cristal » (Danalet., *1998a, p. 45)*

La tâche « Les 9 boules de cristal » est un prolongement de la tâche « Vanille-Fraise » dans laquelle les élèves doivent rechercher le nombre de boules nécessaires pour représenter des nombres sur un boulier. Un prolongement est une suite à la tâche décrite.

> *Selon les cas, le prolongement permet à l'élève :*
>
> *• de se familiariser avec des connaissances fraîchement construites en les faisant fonctionner dans une situation semblable ou proche*
>
> *• d'aborder, en réinvestissant ses connaissances, la même notion, mais dans un contexte différent.*
>
> *La différenciation de l'enseignement et de l'apprentissage s'effectue ici par le moyen de tâches différentes.*
>
> *En principe, le prolongement peut aussi s'adresser à tous les élèves. (ibid., 1998b, p. 24)*

Dans la mise en œuvre, le livre du maître préconise :

> *« l'enseignant s'assure que les élèves connaissent le fonctionnement du boulier à tiges. » (p.106)*

et pour la mise en commun,

> *« les élèves confrontent les démarches utilisées pour respecter la contrainte du minimum de boules. » (p.106)*

Il faudrait adapter dans notre cas ce commentaire en respectant « la contrainte d'utiliser neuf boules au maximum ». Cette tâche n'est donc pas une tâche de découverte de l'utilisation du boulier. Par contre, comme la tâche précise d'utiliser un boulier à deux tiges et qu'il est sous-entendu que l'enseignant utilise le matériel de classe (p.270), un boulier avec un support à quatre tiges, il faut préciser de n'utiliser que deux tiges sur les quatre.

Connaissances mathématiques en jeu

Cette tâche fait partie du Module 2, champs C, « Des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens » :

> **Compétence générale** : *Établir le lien entre une collection organisée en unités, dizaines, centaines, milliers, …, son écriture chiffrée et sa désignation orale.*
>
> **Notions** : *le système décimal.*
>
> **Compétences** : *utiliser différentes désignations d'un nombre, estimer, dénombrer et comparer de grandes collections, décomposer un nombre en milliers, centaines, dizaines, unités, extraire le nombre de dizaines ou de centaines d'un nombre. (p. 61)*

Les élèves doivent représenter des nombres avec des boules qu'ils enfilent sur un boulier à deux tiges. L'utilisation du matériel est imposée pour représenter les nombres et dans le livre du maître, il est précisé que les bouliers

> *sont les modèles les plus proches de l'écriture habituelle d'un nombre dans un système de numération de position. Ils sont aussi très performants pour les opérations, mais ils exigent une compréhension parfaite de la valeur positionnelle des chiffres. Le rôle et l'importance du 0 sont ici matériellement illustrés : une tige vide de boule doit obligatoirement être caractérisée par une écriture correspondante. Exemples : Vanille-Fraise, […] (p. 67)*

L'enseignant a la charge de décoder explicitement les connaissances mathématiques en jeu dans la tâche, à savoir :

- l'aspect positionnel du système de numération,
- la représentation de nombres sur un boulier,
- le passage du nombre représenté sur un boulier à son écriture chiffrée.

Cette tâche vise plus largement la pratique du raisonnement dans le domaine de la numération, en particulier la mise en œuvre d'une procédure systématique de comptage pour trouver la liste exhaustive des solutions.

Stratégies possibles

Une **première stratégie** se place dans le registre des écritures chiffrées, on considère ici les nombres de 0 à 99 étant entendu que les nombres de 0 à 9 seront considérés comme ayant un chiffre des dizaines nul. On cherche tous les nombres que l'on peut représenter de dizaine en dizaine : de 0 à 9, puis de 10 à 19, puis de 20 à 29 ..., jusqu'à de 90 à 99, avec la contrainte que la somme des chiffres des dizaines et des unités soit inférieure ou égale à 9. Les solutions sont donc : 0; 1; 2; ... 9; 10; 11; ... 18; 20; 21; ... 27; 30; ... 36; …; 80; 81; 90. Il y a donc 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55 solutions.

Une **deuxième stratégie** est d'utiliser un boulier à deux tiges pour mettre en œuvre cette même démarche de comptage dans laquelle on enfile les boules une à une sur la tige des unités puis on écrit le nombre représenté à chaque fois que l'on enfile une boule. Ensuite, on enlève toutes les boules et on recommence en mettant une boule sur la tige des dizaines et en enfilant une à une les huit boules restantes sur la tige des unités. Il faut recommencer cette marche à suivre jusqu'au moment où on enfile les neuf boules sur la tige des dizaines et on obtient ainsi les 55 solutions. Pour les trouver toutes, il faut mettre en place une procédure systématique de comptage. Dans ce cas, on peut se poser la question de savoir si la représentation par le boulier est une aide et s'il n'est en fait pas plus simple de se poser directement la tâche dans le registre des écritures chiffrées.

Une **troisième stratégie** consiste à chercher tous les nombres que l'on peut représenter avec au maximum une boule, puis deux,..., jusqu'à neuf boules sur un boulier, en reprenant la même marche à suivre que précédemment.

Avec zéro boule, il y a 1 nombre possible (le nombre 0).

Avec une boule *au maximum*, il y a le nombre formé avec zéro boule auquel on ajoute les nombres formés avec exactement une boule (1 et 10). Il y a donc 3 solutions.

Avec deux boules au maximum, il y a les nombres formés avec une boule au maxi-

Nombre maximum de boules utilisées	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Solutions	0	0; 1 ; 10	0; 1; 10; 2 ; 11; 20	0; 1 ; 10; 2 ; 11; 20 3; 12; 21; 30	0; ... 40	0; ... 50	0; ... 60	0; ... 70	0; ... 80	0; ... 90
Nombre de solutions	1	3	3	10	15	21	28	36	45	55

Tableau 1 Nombre de solutions en fonction du nombre maximum de boules utilisées

mum (0 ; 1 ; 10) auxquels on ajoute les nombres formés avec exactement deux boules (2 ; 11 ; 20). Il y a donc 6 solutions.

Ainsi de suite, jusqu'à neuf boules, on trouve tous les nombres formés avec huit boules au maximum auxquels on ajoute les nombres formés avec exactement neuf boules 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90. On trouve donc les 55 solutions.

Une **quatrième stratégie** est de se placer dans le registre des écritures chiffrées pour mettre en œuvre cette démarche de comptage. On cherche tous les nombres dont la somme des chiffres des dizaines et des unités est inférieure ou égale à 2, puis à 3..., jusqu'à 9.

Une **cinquième stratégie** est le tâtonnement : on utilise le boulier à deux tiges en enfilant des boules et en notant les nombres correspondants, mais sans mettre en œuvre de procédure systématique.

Ces stratégies permettent de travailler l'aspect positionnel du système de numération (avec ou sans boulier) et la pratique du raisonnement. Les deuxième, troisième et cinquième stratégies (avec boulier) permettent de travailler la représentation de nombres sur un boulier et le passage du nombre représenté sur un boulier à son écriture chiffrée.

La troisième stratégie est la plus pertinente avec l'utilisation du boulier et la première dans le registre des écritures chiffrées.

Nous allons étudier les variables didactiques de la tâche et les effets des changements de leurs valeurs sur les stratégies.

Variables didactiques

Une **première variable** didactique est le fait d'utiliser dans la tâche exactement neuf boules ou au maximum neuf boules. Laisser la possibilité d'utiliser au maximum neuf boules et non exactement neuf boules pour représenter des nombres est une difficulté supplémentaire. En effet, si la tâche est de représenter tous les nombres possibles sur un boulier à deux tiges avec exactement neuf boules, la tâche est beaucoup plus simple et s'apparente au dénombrement des décompositions additives en deux termes dont la somme vaut neuf. Il n'y a que dix nombres possibles (9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90). Une stratégie consiste à mettre toutes les boules sur la tige qui représente le chiffre des unités, de noter le nombre représenté, de passer une boule sur la tige qui représente le chiffre des dizaines, de noter le nombre représenté, ainsi de suite, en passant les boules une à une. L'utilisation du boulier dans cette stratégie permet de représenter les nombres et aide à trouver la liste exhaustive des nombres possibles.

Dans la tâche, la variable didactique est d'utiliser au maximum neuf boules, cela implique de mettre en place une procédure systématique de comptage pour trouver toutes les solutions.

Une **deuxième variable** didactique est le fait d'utiliser ou non un boulier[4]. En effet, cela n'implique pas les mêmes représentations du nombre. Sur un boulier à deux tiges, nous pouvons représenter uniquement des nombres entiers à un ou deux chiffres. Le fait de disposer de neuf boules au maximum implique que le nombre de boules qui représente le chiffre des dizaines ajouté au nombre de boules qui représente le chiffre des unités est inférieur ou égal à neuf. La

4 Il est envisageable de schématiser un boulier avec des boules afin d'y représenter les nombres. Ce boulier schématisé offre une possibilité de trace écrite intéressante pour les élèves.

retranscription dans le registre sémiotique des écritures chiffrées consiste à rechercher les nombres entiers à un chiffre ou à deux chiffres dont la somme des chiffres des dizaines et des unités est inférieure ou égale à neuf. Comme nous l'avons vu, certaines stratégies sont plus pertinentes avec ou sans l'utilisation d'un boulier.

Une **troisième variable** didactique est le nombre de tiges à utiliser pour représenter des nombres sur un boulier avec neuf boules au maximum.

- Avec <u>un boulier à une tige</u>, tous les nombres possibles sont solutions, la tâche ne présente pas d'intérêt mathématique.
- Avec <u>un boulier à deux tiges</u>, le domaine numérique est de 0 à 90. Il faut exclure les nombres dont la somme des chiffres des dizaines et des unités est supérieure ou égale à dix. Le nombre important de solutions (55) incite à mettre en place une procédure systématique de comptage que ce soit avec ou sans boulier.
- Avec <u>un boulier à trois tiges</u>, le domaine numérique est de 0 à 900 et le nombre de solutions (220) est encore plus important. Les stratégies consistant à rechercher toutes les solutions avec un boulier ou dans le registre des écritures chiffrées sont toujours possibles, mais coûteuses en temps. La stratégie optimale utilise des suites.

De [0 ; 100[, on retrouve les solutions sur un boulier à deux tiges (Tableau 1).

Les nombres de solutions correspondent aux dix premiers nombres triangulaires, définis par la suite (t_n) t_1=1 pour tout entier n non nul, t_n=1+2+…+n.

Pour trouver le nombre total de solutions de [0 ; 1000[, on calcule la somme du nombre de solutions pour chaque intervalle de [0 ;100[, ..., [900 ;1000[, c'est-à-dire la somme t_{10}+…+t_1 (Tableau 2).

Intervalle	[0 ; 100[	[100 ; 200[	[200 ; 300[	[300 ; 400[	[400 ; 500[
Solutions	0; ... ; 90	100; ...; 108; 110; ...; 117; ... ; 180	200; ...; 207; 210; ...; 216; ...; 270	300; ...; 306; 310; ...; 315; ...; 360	400; ...; 405; 410; ...; 414; ...; 450
Nombre de solutions	10+9+8+7+6+5 +4+3+2+1 = 55 = t_{10}	9+8+7+6+5 +4+3+2+1 = 45 = t_9	8+7+6+5+4 +3+2+1 = 36 = t_8	7+6+5+4 +3+2+1 = 28 = t_7	6+5+4 +3+2+1 = 21 = t_6
Intervalle	[500 ; 600[	[600 ; 700[	[700 ; 800[	[800 ; 900[	[900 ; 1000[
Solutions	500; ... ; 504 ; 510; ...; 513; ...; 540	600; ...; 603; 610; ...; 612; 620; 621; 630	700; 701; 702; 710; 711; 720	800; 801; 810	900
Nombre de solutions	5+4+3+2+1 = 15 = t_5	4+3+2+1 = 10 = t_4	3+2+1 = 6 = t_3	2+1 = 3 = t_2	1 = t_1

Tableau 2 Nombre de solutions par intervalle de [0 ;1000[

Intervalle	[1000 ; 1100[	[1100 ; 1200[	[1200 ; 1300[	[1300 ; 1400[	[1400 ; 1500[
Nombre de solutions	9+8+7+6+5 +4+3+2+1 = 45 = t_9	8+7+6+5+4 +3+2+1 = 36 = t_8	7+6+5+4 +3+2+1 = 28 = t_7	6+5+4 +3+2+1 = 21 = t_6	5+4+3+2+1 = 15 = t_5
Intervalle	[1500 ; 1600[	[1600 ; 1700[	[1700 ; 1800[	[1800 ; 2000[	
Nombre de solutions	4+3+2+1 = 10 = t_4	3+2+1 = 6 = t_3	2+1 = 3 = t_2	1 = t_1	

Tableau 3 Nombre de solutions par intervalle de [1000 ; 2000[

On définit alors la suite (U_n) des nombres tétraédriques par

$U_n=t_1+\ldots+t_n$. pour tout entier n non nul.

De [0;1000[, il y a

$U_{10}=1+3+6+10+15+21+28+36+45+55$

$$= \frac{10(10+1)(10+2)}{6} = 220 \text{ solutions.}$$

- Avec <u>un boulier à quatre tiges</u>, le domaine numérique est de 0 à 9000 et la stratégie optimale utilise également les suites des nombres triangulaires et tétraédriques.

De [1000 ; 2000[(Tableau 3), il y a $U_9=1+3+6+10+15+21+28+36+45 = 165$ solutions.

De même, de [2000 ; 3000[, il y a $U_8=1+3+6+10+15+21+28+36 = 120$ solutions.

Ainsi de suite, de [0 ; 10000[, il y a 220+165+120+84+56+35+20+10+4+1 = 715 solutions.

Dès que l'on utilise trois tiges et plus sur un boulier, il y a un saut, car la tâche devient beaucoup trop complexe pour le niveau scolaire concerné et les procédures efficaces avec un boulier à deux tiges deviennent trop coûteuses en temps. Il faut donc trouver de nouvelles stratégies qui utilisent de nouvelles connaissances (suites des nombres triangulaires et tétraédriques, séries).

Nombre maximum de boules utilisées	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre de solutions	64 $= 100-t_8$	72 $= 100-t_7$	79 $= 100-t_6$	85 $= 100-t_5$	90 $= 100-t_4$	94 $= 100-t_3$	97 $= 100-t_2$	99 $= 100-t_1$	100

Tableau 4 Nombre de solutions en fonction du nombre maximum de boules utilisées

Une **quatrième variable** didactique est le nombre de boules que l'on peut utiliser au maximum sur un boulier à deux tiges.

Le domaine numérique est de 0 à 99 et le nombre maximum de boules que l'on peut utiliser est donc 18. De 0 à 9 boules au maximum, le nombre de solutions correspond à la suite des dix premiers nombres triangulaires (Tableau 2). Il est intéressant de remarquer qu'à partir de 10 boules, nous ne retrouvons pas la suite des nombres triangulaires (Tableau 4).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Tableau 5 Tableau de nombres de 0 à 99

En effet, dans notre système de numération en base dix, la somme des chiffres des dizaines et des unités des nombres sur une même diagonale est constante (Tableau 5). Pour compter le nombre de solutions en utilisant de 10 à 18 boules, la stratégie optimale est de calculer le complément à 100 des nombres tétraédriques (Tableau 4).

Conclusion

Pour simplifier la tâche tout en visant les mêmes connaissances mathématiques que la tâche initiale, il est possible de réduire le nombre de boules (cf. quatrième variable didactique) ou de proposer aux élèves de chercher tous les nombres qu'ils peuvent représenter sur un boulier à deux tiges avec exactement neuf boules (cf. première variable didactique).

Inversement, pour complexifier la tâche, il est possible d'augmenter le nombre de tiges sur le boulier (cf. troisième variable didactique), cette tâche peut être adaptée jusqu'au secondaire 2. Nous pouvons également augmenter le nombre de boules (cf. quatrième variable didactique) et le nombre de solutions devient plus important.

Nous interrogeons la pertinence de l'utilisation du boulier pour cette tâche, en considérant les difficultés observées chez les élèves pendant une leçon et en considérant que son utilisation n'est pas pertinente dans toutes les stratégies pour établir la liste exhaustive des solutions.

En considérant la marge de manœuvre importante laissée à l'enseignant concernant la mise en œuvre de la tâche et le déroulement de la leçon, cette analyse a priori offre à l'enseignant des pistes de réflexion et d'adaptation de la tâche.

Références

Briand, J., & Chevalier, M. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* Paris : Hatier.

Charnay, R., & Mante, M. (2014). *Professeur des écoles. Admissibilité. Mathématiques. Tome 2.* CRPE : Hatier concours.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C., & Villars-Kneubühler, F. (1998a). *Mathématiques 3P - Livre de l'élève.* Neuchâtel : Corome.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C., & Villars-Kneubühler, F. (1998b). *Mathématiques 3P - Livre du maître.* Neuchâtel : Corome.

Des pointes, des pics et des arrondis en 1P-2P

Sylvia Coutat & Céline Vendeira

Université de Genève

Introduction

Ce texte présente la conception, l'expérimentation puis l'analyse de quelques activités de géométrie dans des classes de 1P Harmos[1] et 2P Harmos[2].

A l'origine, nous souhaitions concevoir des activités ludiques sous forme de jeux autour de la reconnaissance de formes afin de compléter celles existantes dans les moyens d'enseignement suisses romands. La conception puis l'expérimentation de diverses activités en classe, nous ont amenées à affiner peu à peu nos objectifs. Nous avons pris conscience qu'il était peut-être nécessaire d'enrichir le travail de reconnaissance de formes (très prégnant dans les classes d'élèves de cet âge) afin de concevoir des activités autour des caractéristiques des formes que nous définissons dans ce qui suit.

Au cycle 1 de l'école primaire, l'essentiel du travail géométrique entrepris avec les élèves (voir typologie de Coutat & Vendeira, 2015) est de l'ordre de l'identification, l'appariement de deux formes, le tri de plusieurs formes (ayant des caractéristiques communes), le pavage, la reproduction et la construction des formes géométriques les plus courantes (rond, carré, rectangle, triangle). En parallèle, l'utilisation d'un lexique spécifique pour les dénommer est nécessaire, mais se réduit souvent, « à l'apprentissage d'un vocabulaire culturel » (Duval, Godin, Perrin-Glorian, 2005, p.7).

Le Plan d'Etude Romand (PER), référence des enseignants suisses romands, met en évidence la progression des problèmes de géométrie entre le cycle 1 et 2 de l'école primaire de la manière suivante :

Au cycle 1 les élèves s'appuient sur un espace physique où « la **forme** est liée à la perception d'ordre visuel d'un objet », puis, peu à peu, au cycle 2, sur un espace conceptualisé où les objets sont représentés par des figures, comme objets « immuables et idéaux » qui « existent indépendamment des représentations (dessins, croquis…) qui en sont faites » (lexique).

Au vu de cette description du PER, il manque, selon nous, un niveau intermédiaire et essentiel dans ce passage du cycle 1 au cycle 2. En effet, même chez des jeunes élèves un travail sur quelques caractéristiques des formes est possible. Ainsi, sans se situer au niveau théorique des objets géométriques définis par leurs propriétés, un travail intermédiaire sur les éléments qui composent les formes est envisageable et constitue le cœur de notre recherche. Nous appelons **caractéristiques des formes** ces éléments qui composent les formes. Cette étape intermédiaire permet, de plus, de travailler sur le passage d'une vision très prégnante de la forme à travers sa surface, à une vision plus experte à partir des éléments qui la composent (réseaux de droites et de sommets)[3].

Les recherches en didactique des mathématiques (Braconne-Michoux, 2008 ; Houdement & Kuzniak, 2000 ; Parzysz, 2003 ; Van Hiele, 1959) pointent quant à elles plutôt la rupture, dans l'enseignement de la géométrie, entre le primaire et le secondaire 1 puis le secondaire 2 où le raisonnement et la déduction priment. D'autres recherches s'intéressent au passage entre le cycle 1 et 2, mais davantage du point de vue de l'utilisation des instruments de géométrie (Perrin-Glorian, Godin, 2014).

Dans cet article nous développons quelques-unes des activités conçues ainsi que les choix didactiques qui les sous-tendent puis nos premières analyses suite à des expérimentations menées en classe.

1 Elèves de 4-5 ans.

2 Elèves de 5-6 ans.

3 Duval R., Godin M. (2005).

Deux activités de reconnaissance de formes

Devine laquelle j'ai choisie

Présentation de l'activité et choix didactiques

La première activité que nous présentons s'inspire du jeu « Qui est-ce ? ». Le jeu se compose d'une planche par joueur sur laquelle sont disposées plusieurs images. Une fois que chaque joueur a choisi secrètement une image, le but est d'être le premier à retrouver l'image choisie par son adversaire. Pour cela, à tour de rôle, les joueurs posent des questions à leur adversaire qui ne peut répondre que par oui ou non. Chaque question-réponse permet d'éliminer un ensemble d'image jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une.

La compréhension des règles du jeu et l'interprétation des réponses peuvent s'avérer complexes pour les jeunes élèves. C'est pour cette raison que nous avons conçu des planches évolutives de 3 types, constituées chaque fois de 9 images.

Le premier type rassemble des planches proches de celles du jeu initial, soit sans enjeu géométrique.

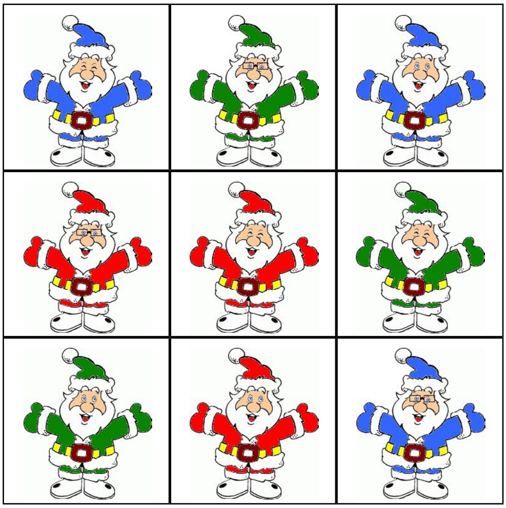


Figure 1 : Planche Devine laquelle j'ai choisie - Père Noël

Ces planches assurent la compréhension de la principale règle du jeu : lorsque l'on répond affirmativement à une question, cela implique soit de garder les cartes soit de les éliminer.

La figure 2 présente une planche du deuxième type avec des bonhommes de neige.

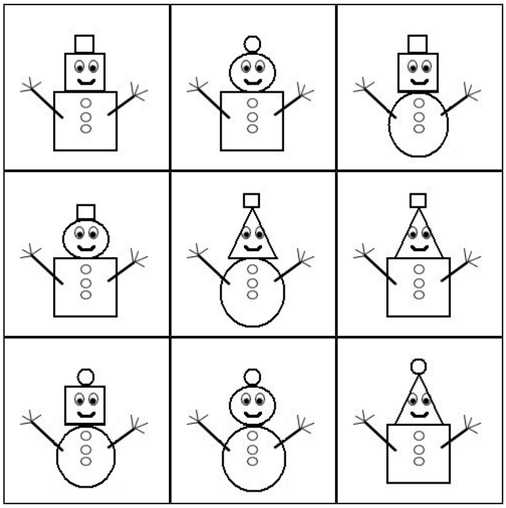


Figure 2 : Planche Devine laquelle j'ai choisie - Bonhommes de neige

Ce type de planches fait travailler la reconnaissance du *rond*, du carré et du triangle, ainsi que le repérage dans l'espace pour identifier quelle partie du bonhomme de neige est prise en compte dans la question : le chapeau, la tête ou le corps.

Enfin, la figure 3 est représentative du dernier type de planches.

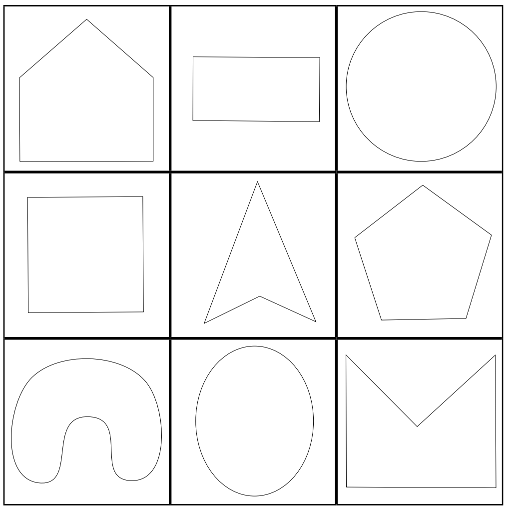


Figure 3 : Planche Devine laquelle j'ai choisie - Figures géométriques

Ce troisième type de planches vise un travail sur les caractéristiques des formes : présence ou non de côtés « droits », le nombre de côtés pour les polygones ou le caractère convexe ou non de la forme (il n'est bien entendu pas attendu de l'élève qu'il emploie le terme convexe, mais qu'ils trouvent leur propre vocabulaire permettant de définir cette caractéristique de la forme).

Ces trois types de planches visent un travail progressif vers ce que l'on nomme les caractéristiques des formes à travers trois aspects :

- l'émergence de la nécessité d'utiliser des critères (qu'ils soient géométriques ou non, la couleur par exemple) pour décrire et reconnaître des objets,
- l'utilisation d'un lexique spécifique pour la dénomination des formes géométriques les plus courantes (rond, carré, triangle) avec la planche de la figure 2,
- la planche de la figure 3 propose volontairement des formes que les élèves ne savent pas nommer afin de les faire entrer dans une démarche de caractérisation à partir des éléments qui composent les formes.

<u>Premières analyses</u>

D'une manière générale, nous constatons que certains élèves de 2P Harmos posent des questions ne permettant pas de supprimer des images, ou alors permettant de n'en supprimer qu'une seule à la fois. L'enjeu de *trouver le plus rapidement possible* ou en moins de questions possible ne semble donc pas compris par la majorité des élèves.

La planche Père Noël permet une entrée dans le jeu extrêmement ludique. Une difficulté majeure réside dans l'interprétation des réponses.

Le deuxième type de planches ne présente pas de difficultés supplémentaires par rapport au premier, car les élèves identifient perceptivement depuis bien longtemps ce qui est rond/carré/triangulaire.

Quant au troisième type de planche, nous observons que la plupart des élèves se focalisent sur l'aspect global de la forme plutôt que sur ses caractéristiques. Ainsi les formes de la planche ont toutes un nom : la maison, le rectangle, le rond, le carré, la flèche, la maison aux murs penchés, le pont, l'ovale et la couronne ou la montagne (suivant leur imagination). Ce constat nous amène à agir sur la variable didactique « type de forme » afin d'en proposer d'autres (voir la figure 4) forçant les élèves à entrer dans les caractéristiques des formes[4]. Selon les formes choisies, les élèves sont contraints de se détacher de leur surface (qu'ils ne peuvent plus ni nommer ni assimiler à un objet connu) mais entrer dans les éléments qui la composent, soit le réseau de droites (bords droits ou arrondis, …) et de sommets (nombre de pointes ou de pics,…).

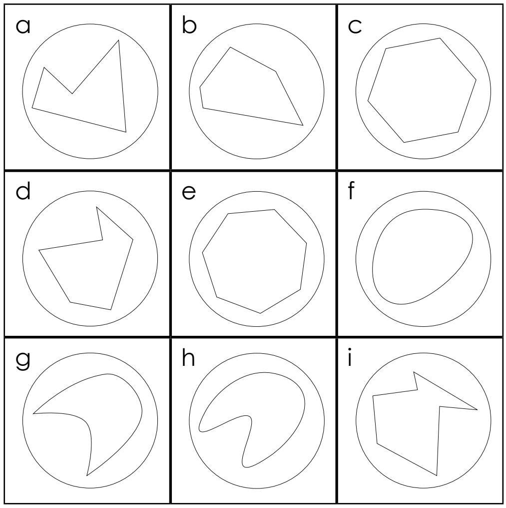


Figure 4 : formes pour « Des familles à construire »

Des familles à construire

<u>Présentation de l'activité et choix didactiques</u>

Cette activité demande un travail plus spécifique sur des caractéristiques des formes.

Nous conservons les caractéristiques de l'activité précédente à savoir : des formes aux bords droits ou courbes, des formes convexes ou non, des formes à 5, 6 ou 7 côtés et des formes avec ou sans sommets[5].

La figure 4 présente l'ensemble des formes sélectionnées pour cette activité. Ces

4 Les lettres ne sont utilisées que pour cet article afin de nous faciliter le renvoi à certaines formes.

5 Définition de sommets élargie, ils peuvent concerner aussi des côtés courbes finissant en pointe c'est-à-dire avec une discontinuité de la dérivée de la trajectoire.

formes sont découpées dans un disque en carton rigide, présenté sur l'image 1 (le disque ne favorise aucune orientation particulière). Ce matériel permet d'appréhender la forme soit à partir du gabarit (la surface pleine qui la définit, à gauche sur l'image 1), soit à partir de sa partie évidée (nommé pochoir, à droite sur l'image 1). Ainsi ce qui, dans un cas, serait considéré comme une pointe par certains élèves pourrait, dans d'autre cas, correspondre à un creux. Notre choix d'utiliser du matériel manipulable est lié aux recherches menées par Gentaz (2013) qui indique que « les caractéristiques du sens haptique (tactilo-kinesthésique) pourraient également aider les jeunes enfants à traiter de manière plus efficace les caractéristiques des figures géométriques » (p.4).

Image 1 : Formes découpées pour l'activité « Des familles à construire » et ses prolongements.

Dans cette activité les élèves doivent (seuls ou en groupes) regrouper les 9 formes de la figure 4 en 3 ou 4 familles. Une fois les familles constituées, les élèves doivent justifier leur choix. Il y a une multitude de possibilités. Nous n'avons pas d'attente particulière, hormis que nous souhaitons voir émerger un lexique en lien avec les caractéristiques des formes. Cette base lexicale commune pourra être réinvestie dans d'autres activités nécessitant de la communication entre élèves. Nous pensons par exemple à des termes comme « pointu », « arrondi » ou encore « ça rentre » (pour la convexité), etc. Cette activité nécessite la présence de l'adulte car bien que les élèves n'éprouvent aucune difficulté à réaliser des familles, ils peinent à justifier leurs choix oralement.

<u>Premières analyses</u>

Lors de nos observations de l'activité en classe, tous les élèves manipulent abondamment les pièces mise à disposition. Dans certains groupes nous constatons que des élèves essayent d'emboîter différentes formes entre elles afin de réaliser un pavage. D'autres élèves essayent de construire une forme complexe à partir des différentes formes disponibles pour représenter un objet de leur quotidien. En assemblant f, g et h on peut par exemple représenter la tête de mickey (f) avec ses deux oreilles (g et h). Hormis ces quelques cas, nous identifions trois principales propositions de familles créées par les élèves (Tableau 1).

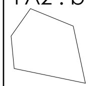
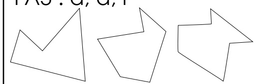
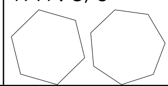
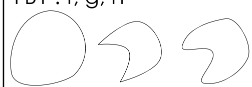
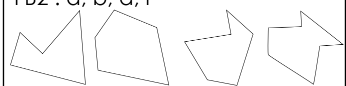
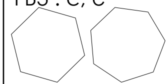
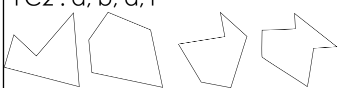
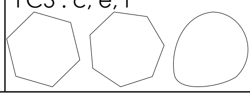
Propositions	Familles
Proposition A	FA1 : f, g, h 
	FA2 : b 
	FA3 : a, d, i 
	FA4 : c, e 
Proposition B	FB1 : f, g, h 
	FB2 : a, b, d, i 
	FB3 : c, e 
Proposition C	FC1 : g, h 
	FC2 : a, b, d, i 
	FC3 : c, e, f 

Tableau 1 : familles créées par les élèves

De manière générale, c et e sont très rapidement mises ensemble car « c'est les mêmes ». C'est seulement une fois que les élèves les superposent qu'ils constatent que ce ne sont pas tout à fait les mêmes. Ils conservent toutefois ces deux formes ensemble dans tous les cas observés. Le constat de la différence entre les deux formes leur permet cependant d'ouvrir cette famille à d'autres formes. Par exemple, lorsque la forme f est acceptée on obtient la famille des « presque ronds ». D'autres élèves choisissent d'assembler f avec g et h car les 3 formes sont arrondies. Parfois seules g et h sont associées car elles ont « la même forme » de *pont* ou de *lune* (ou d'autres propositions selon la fantaisie de chacun). Les élèves utilisent alors plusieurs termes : *arrondi*, *qui tourne* ou aucun terme particulier, mais un geste de la main signifiant cette caractéristique. Pour les autres familles, les critères de choix sont moins évidents. Pour les formes a, b, d et i, les élèves perçoivent des *pointes*, des pics, des *montagnes* qu'ils ne distinguent pas dans les formes c et e. De ce fait, il y a apparition des *grands pointus* (a, b, d et i) contre les *petits pointus* (c et e). Dans certains cas les élèves se basent plutôt sur la longueur des côtés en évoquant un *long droit* (pour a, b, d et i) qui n'existe pas dans les formes c et e qualifiées alors de *petits droits*. L'aspect convexe que nous avions imaginé évoquer avec des propos de type « ça rentre dedans », n'est pas du tout apparu en 2P Harmos. Par contre, certains élèves de 1P Harmos ont évoqué des « trous ».

Lors de la mise en commun des familles de formes composées par chacun des groupes, nous constatons que les échanges entre élèves sont peu nombreux. C'est surtout l'occasion pour chacun de formuler ses choix parfois s'appuyant sur des caractéristiques plutôt que d'écouter ceux des autres. Malgré tout, nous avons, dans certains cas, constaté que des élèves réutilisaient des caractéristiques citées par d'autres groupes dans d'autres jeux qui succédaient à celui-là.

Les élèves restent libres dans la constitution de leurs familles. Celles qu'ils constituent nous informent sur la vision qu'ils mobilisent dans l'étude des formes. Ainsi, nous supposons que la proposition C résulte d'une vison focalisée sur la surface des formes, en particulier pour FC4. Cette famille contient des formes construites avec une ligne brisée et une forme formée par une ligne courbe, malgré ces caractéristiques différentes, les surfaces de ces trois formes sont proches du cercle. Les familles FA1 et FB1 rassemblent les formes construites avec des lignes courbes. La caractéristique du nombre de côtés émerge rarement chez les élèves. Nous pouvons les amener à y réfléchir. Lorsque les élèves considèrent les pièces c et e comme identiques, les superposer peut les amener à compter le nombre de côtés. Il est aussi possible d'utiliser les pièces évidées comme pochoir. Les élèves suivent le contour et peuvent dénombrer à chaque changement de direction le nombre de côtés.

Une piste de prolongement

Par manque de place nous ne pouvons présenter l'ensemble des activités que nous avons conçues à partir de la collection de formes présentée en figure 4. Nous avons choisi une dernière activité dont nous ne présentons que quelques éléments.

Retrouve la bonne forme

Plusieurs prolongements à l'activité « Des familles à construire » sont envisageables à partir du même matériel. Ci-dessous nous proposons l'un de ces prolongements permettant de réinvestir les caractéristiques des formes qui ont potentiellement émergé dans l'activité précédente. Il s'agit d'un jeu de communication à deux joueurs. Un élève possède les pièces évidées et l'autre les pièces pleines de la figure 4. Les deux élèves ne se voient pas. L'élève qui a les pièces évidées doit donner les informations sur les caractéristiques de sa forme afin que le deuxième élève lui donne la pièce pleine associée. La pièce pleine choisie par l'élève est validée si elle s'encastre dans le pochoir du deuxième élève.

Nous vous laissons la liberté de la réaliser dans votre classe afin d'obtenir vos premières analyses ! Certains élèves utiliseront des informations spécifiques à la surface.

D'autres élèves expliciteront quelques caractéristiques. Toutefois, si les élèves ne sont pas parvenus à faire émerger dans l'activité précédente un lexique minimal autour des caractéristiques des formes, cette activité doit être différée. Dans ce cas, d'autres prolongements plus adaptés peuvent être proposés.

Conclusion

Chaque activité présentée renvoie à des objectifs d'apprentissage spécifiques. « Devine laquelle j'ai choisie » avec la planche *Bonhommes de neige* vise une reconnaissance des formes carré, rond et triangle. En ce qui concerne la planche *Figures géométriques*, il faudrait la tester avec des formes de la figure 4. Ces nouvelles formes devraient permettre un travail sur les caractéristiques. « Des familles à construire » permet une première approche des caractéristiques des formes, ces caractéristiques pouvant être citées ou non. Enfin « Retrouve la bonne forme » fait appel à un travail sur l'explicitation des caractéristiques des formes.

Pour conclure, nous pouvons mettre en évidence trois aspects que nous évaluons de manière positive à ce stade de notre recherche.

Le premier point concerne le fait que le matériel manipulable proposé dans certaines activités est utilisé par les élèves à bon escient. Cet aspect permet de prendre en compte l'apport de la perception par le toucher en complément à la simple vision, comme le propose Gentaz (2013).

Deuxièmement, il parait important de proposer des activités dans lesquelles le langage intervient, malgré les difficultés que cela suppose chez des élèves de cet âge. Il est en effet nécessaire de développer un langage commun autour des éléments qui composent les formes. Ainsi, l'ensemble des activités que nous développons (dont seulement trois sont présentées dans cet article) visent à prendre en compte différents sens comme le toucher, la vue et l'ouïe (comprenant l'aspect communicationnel entre deux élèves)[6].

Pour terminer, il nous semble que les activités conçues permettent un changement de regard progressif des formes vers les figures géométriques au cycle 1. D'après nos premières analyses, ce changement de regard est à la portée des élèves de cet âge même s'il ne semble pas être utilisé spontanément si l'aménagement didactique ne les y force.

Références

Braconne-Michoux, A. (2008). *Evolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2-6ième*. Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot.

Coutat, S., Vendeira, C. (2015). *Quelle ressource pour la reconnaissance de forme en maternelle ?* Acte du XXXXIème colloque COPIRELEM – Mont de Marsan 2014.

Duval R., Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Duval,R., Godin, M., Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire. *Actes du séminaire national 2004*, 7-91.

Gentaz, E. (2013). Comment aider les enfants de 5-6 ans à connaître les figures géométriques planes ? Un point de vue des sciences cognitives de l'éducation. *Acte du XLème colloque COPIRELEM* – Nantes, 81-86.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2000). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactiques des sciences cognitives*, 11, 175-193.

Parzysz, B. (2003). Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Carnet de route de la COPIRELEM, tome* 2, 107-125.

Perrin-Glorian, M.-J., Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole, Numéro spécial Enseignement de la géométrie*, 222, 26-36.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), (2010). *Plan d'étude Romand, 1er cycle, Mathématiques et Science de la nature*. – Sciences humaines et sociale, CIIP.

6 *Le lecteur peut se référer à l'article de Coutat et Vendeira (2015) qui développent également cet aspect en termes de registres d'ostensifs avec les registres discursif, graphique et de la manipulation.*

1/9801 ; Évolution du milieu d'une division un peu particulière (partie 3)

Christine Del Notaro

Université de Genève

Préambule

Cette troisième et dernière partie vient clore mon propos, initié voici près d'un an. Après avoir présenté mon investigation du milieu de cette division particulière et celle d'étudiants en formation à l'enseignement primaire (Math-Ecole 220), j'ai fait ressortir le jeu des étudiants avec lesquels je m'étais mise en interaction de connaissances, d'une part, et le jeu des élèves, mettant ainsi en évidence la distinction chiffre/nombre (Math-Ecole 221). Il me reste donc à exposer la dernière facette de cette recherche, à savoir, le lien entre les deux partenaires élèves et étudiants. C'est à travers la mise sur pied d'un dispositif interactif que ce lien a été fait. Il consiste en un échange de narrations à distance (j'en fus la messagère) à propos du savoir investigué, de questions sur les procédures, etc. Je précise à nouveau que pour faire en sorte de maintenir l'interaction vive, il a fallu aménager un milieu donnant l'opportunité aux étudiants et aux élèves de procéder à des explorations du milieu mathématique de manière interactive et de laisser, en outre, un espace à la production de narrations. La narration est à envisager comme mode de restitution d'une pensée impliquant strictement le contenu mathématique de l'événement didactique, partagé, en l'occurrence, par des élèves et des étudiants.

Interactions entre élèves et étudiants

L'intérêt de ce dispositif réside d'une part, dans l'étonnement provoqué chez les protagonistes, et d'autre part, dans le traitement *in vivo* qu'ils vont en faire. Dans l'échange avec autrui, que l'on soit élève ou étudiant, on va répondre « quelque chose », qui est à considérer selon moi, comme le reflet d'une expression mathématique. Ce qui m'intéresse particulièrement est de cueillir au vol ces manifestations non anticipées, remontant d'un niveau que j'ai appelé « *présumé* » dans ma thèse de doctorat (Del Notaro, 2010). C'est dans ce niveau que s'exprime ce que l'élève convoque comme anciennes connaissances et qu'il met dans le milieu pour traiter le fait numérique, en l'occurrence, la division particulière. En d'autres termes, il s'agit de toutes les connaissances activées observables qui émergent d'un degré infra conscient, d'où les connaissances surgissent sans avoir été anticipées ; ce niveau de connaissances *présumé* fait apparaitre l'existence d'une certaine confusion chez l'élève, dans la mesure où, à partir de ce qu'il projette dans la tâche, il va en premier lieu tenter d'inférer une logique pour lui permettre de continuer. Il est courant que les informations affluent en surnombre et de manière désordonnée, produisant une désorganisation temporaire. C'est ce que l'on pourrait appeler le niveau de l'expérience qui se manifeste de cette manière chaotique : *tout remonte en bloc*, pourrait-on dire, et l'élève doit pouvoir y mettre de l'ordre. Ce n'est qu'à l'issue de cette mise en ordre que les connaissances peuvent éventuellement se convertir en savoirs, ce qui constitue un processus très long. Pour en revenir à l'interaction entre les deux parties, le moteur en est à la fois la surprise des étudiants envers les récits des élèves et, du point de vue des élèves, l'impatience de découvrir la réponse des étudiants. A chacun de mes passages en classe, au terme de la séance dans laquelle j'interagis avec les élèves, je tente de faire exister les étudiants auprès des élèves en leur demandant d'écrire une narration à leur intention. A l'autre bout de la chaine, dans la dernière partie de l'heure de cours universitaire, je restitue ce qui a été fait en classe, narrant oralement les événements. Je remets les procédures des élèves aux étudiants et leur demande de produire une réponse.

Le dispositif peut être considéré comme fructueux à divers titres : s'il a permis aux élèves d'entrer dans une démarche de recherche et dans un processus inductif/déductif, les étudiants quant à eux, ont pu approcher différemment la question du savoir et des connaissances et se poser des questions nouvelles. J'y reviendrai. L'un des écueils à éviter est de faire basculer ce dispositif du jeu de tâches en technique d'enseignement (Del Notaro, 2014b), dans la mesure où ce qui le sous-tend est l'interaction de connaissances.

Calendrier

Pour donner une idée des imbrications entre mon travail en classe avec les élèves, puis en cours avec les étudiants, voici les tâches prévues pour les 100 étudiants (4 groupes de 25 env.), pour une semaine :

Avril 2013

Lundi 15 en cours

Groupes A

2 groupes de 5-6 étudiants

Distribuer mes notes

- Se regrouper par 4-5
- Compléter, poursuivre la recherche
- Ecrire un compte-rendu de groupes de ce qu'ils auront fait.

2 autres groupes de 5-6 étudiants

Distribuer productions du groupe de Dominik

- Ecrire un compte-rendu de ce que les élèves ont produit, selon eux.

Groupes B

- Se regrouper par 4-5
- Prendre connaissance des suggestions des élèves
- Effectuer ce que prévoient les élèves
- Poursuivre selon ce que cela leur évoque

Produire un compte-rendu de leur travail

Figure 1: Extrait du calendrier

Un exemple d'interaction

L'extrait de calendrier ci-avant permet de situer cet échange entre élèves du groupe B3 et étudiants ; voici ce qui était prévu :

- B1 & B2 : prendre connaissance de la réponse des élèves et poursuivre la recherche (notez chaque étape)
- B3 : prendre connaissance de la réponse de Max et lui répondre
- B4 : décrire le cheminement de la pensée des élèves et écrire ce que cela évoque pour vous (surprise, questions, etc.)

L'exemple de quelques échanges du groupe B3, figure 2, est suivi de sa retranscription, pour plus de clarté. L'intérêt de faire figurer cette illustration, certes peu lisible sans la réécriture qui suit, réside dans la mesure qu'elle donne des interactions : élèves et étudiants se répondent sur la même feuille, avec des couleurs différentes, entourant des chiffres, prolongeant des nombres et se posant des questions mutuellement. L'interprétation de ces échanges demande de s'y pencher véritablement, jeu auquel on se prend vite, en tant que troisième partie de l'interaction qui s'est constitué une certaine expérience du pilotage d'un jeu de tâches. Il y a des constantes dans les réactions des uns et des autres, qui me permettent d'aller dans le sens d'une confirmation de l'hypothèse de la reproductibilité d'un jeu de tâches.

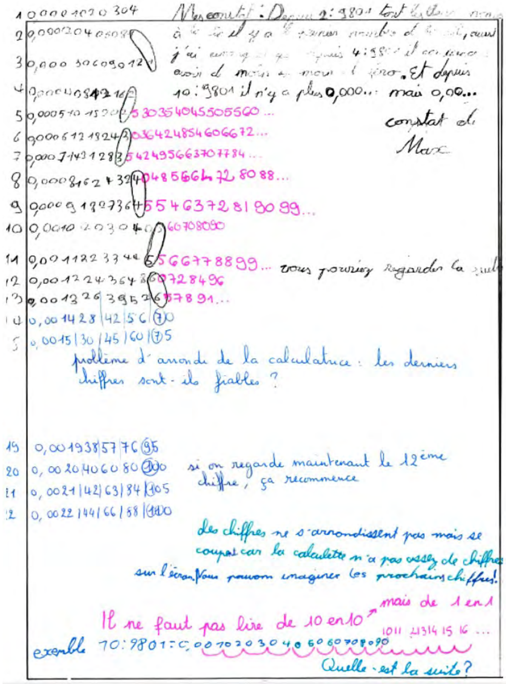


Figure 2 : Interaction groupe B3

1. En gris, élève (Max). « *Mon constat : depuis 2÷9801, tous les deux nombres, à la fin il y a le premier nombre de la suite, aussi j'ai remarqué que depuis 4÷9801 il commence à y avoir de moins en moins de zéro. Et depuis 10÷9801 il n'y a plus 0,000… mais 0,00…constat de Max. Vous pourriez*

regarder la suite. »

L'expérience que l'élève se fabrique autour des nombres lui permet de mettre en évidence des régularités dont il sait qu'il peut tirer une règle, puisqu'il demande d'aller regarder la suite.

2. En bleu, les étudiants continuent à la ligne 14 et identifient un « *problème d'arrondi de la calculatrice : les derniers chiffres sont-ils fiables ?* » Ils continuent : « *si on regarde maintenant le 12*ème *chiffre, ça recommence* ».

Le regard des étudiants ne porte pas exactement sur la même règle que l'élève puisque, pris par leur propre intérêt exploratoire de la tâche, ils s'intéressent à la suite des décimales. Les régularités sont visibles aussi bien horizontalement (les multiples du nombre divisé) que verticalement ; ils ont entouré ces régularités (1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6, 7-7, …, 9-9). Ces dernières ne peuvent être découvertes que dans l'expérience que l'on peut en faire, sans laquelle on ne voit pas cet aspect du nombre. Le temps de l'expérience fait trop souvent défaut à l'école primaire ; si l'on considère les réponses des élèves et leur plaisir à manipuler les nombres, pour ne pas dire à jouer avec, il y a un réel enjeu à les laisser se constituer cette expérience. Ceci est valable également pour les étudiants qui n'auraient probablement pas vu ces régularités sans ce temps dévolu à l'expérience, car tout comme les élèves, ils sont souvent à la recherche d'une procédure experte. Or le bénéfice retiré apparaît dans les narrations produites en fin de cours, dont un extrait figure au terme de l'article. Toute la difficulté réside dans la dévolution de la tâche aux étudiants : leur en faire accepter la responsabilité a pris du temps ; toutefois le résultat est là car à partir du moment où ils se sont pris au jeu, il a été difficile de les arrêter. Je trouve toujours cela étonnant, de voir à quel point le nombre *aspire* grands et petits…

Reprenons l'exemple des divisions de 9801 par 19, 20, 21 et 22, dont l'illustration suivante est retranscrite (figure 3).

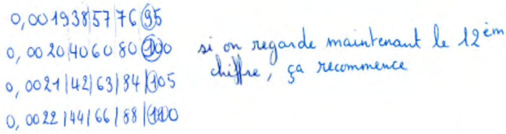


Figure 3 : Divisions de 9801 par 19, 20, 21 et 22

En observant la réponse des étudiants (figure 3 retranscrit ci-dessous)

9801/19 = 0.0019385776**9**5	
9801/20 = 0.0020406080**90**0	si on regarde maintenant le 12ème chiffre, ça recomence
9801/21 = 0.002142384**1**05	
9801/22 = 0.0022446688**11**0	

et en la comparant avec les résultats affichés par la calculatrice d'un ordinateur PC, on peut en déduire deux hypothèses : la première est que les étudiants ont peut-être utilisé une calculette à affichage de 14 chiffres, raison pour laquelle ils invoquent un « problème d'arrondi », car en effet, selon le type de paramétrage de la calculette, on n'aura évidemment pas les mêmes décimales. Par exemple, pour la division par 19, l'ordinateur affiche *0.0019385776**96**153**4**53729211 alors que les étudiants donnent la suite 0.0019385776**95***. Une calculette prise au hasard sur internet affichant 17 chiffres, présente la suite de décimales 0.001938577696**1**153**5** et une autre encore, avec un affichage de 11 chiffres, donne 0.001938577**7**. On conçoit donc que ces différences de paramétrages puissent provoquer un « *problème d'arrondi* ».

La deuxième hypothèse est que les étudiants ont peut-être eu recours à une induction à partir des régularités observées, l'expérience de ces suites ayant eu pour effet de produire une règle adoptée d'emblée sans même avoir été vérifiée, ne serait-ce qu'empiriquement. L'induction présumée serait la suivante « *si les premières décimales correspondent aux multiples du nombre divisé par 9801, alors on retrouve ces multiples dans la suite des décimales* ». Cela n'est pas faux en soi et se présente effectivement comme tel dans la première partie des décimales, mais c'est sans compter la retenue reportée lorsque l'on passe d'une dizaine à une centaine. Il faudra « aller chercher » les multiples dans cette suite car ils ne sont visibles que sous une forme composée. Par exemple : 13/9801=0.0013263952657**89**205

18314457; ils écrivent 0.00132639526578**91**, suivant une logique additive des multiples de 13. Ou encore, pour la division 9/9801= 0,000918273645546372819**1**00091, ils notent 0,000918273645546372819**099**, toujours selon la même logique additive (9+9=18, 18+9=27, etc.).

Voici comment ils retrouvent les multiples de 9 en les extrayant de la suite des décimales de la dernière partie du quotient de 9/9801 (0,0009182736455463) 7281**91**00091 :

72819100091827
-90
100
-99
109
-108
118
-117

Ce que font les étudiants peut être considéré comme un effet des régularités observées à partir de l'expérience relativement conséquente qu'ils ont de cette division, puisque la tâche a persisté durant les quatre mois du cours, de février à mai.

3. En bleu-vert, les élèves répondent que « *les chiffres ne s'arrondissent pas mais se coupent car la calculette n'a pas assez de chiffres sur l'écran. Nous pouvons imaginer les prochains chiffres ! Exemple : 10 ÷ 9801 = 0,00102030405060708090 ; quelle est la suite ?* »

Ici intervient une intéressante question à propos de l'écriture des nombres : la façon de lire les chiffres influence la façon de les écrire, (et/ou inversement). La logique sous-jacente est différente selon la manière de les séparer après la virgule ; il est du reste assez singulier de lire, de la part des étudiants, ce qui figure au point 4 ci-après « *il ne faut pas lire de 10 en 10 mais de 1 en 1* ». Est-ce pour infléchir la réflexion des élèves et les aider à considérer la suite des décimales comme une suite de multiples de 1 plutôt que de 10 ?

4. En rose, les étudiants continuent : « *il ne faut pas lire de 10 en 10 mais de 1 en 1* ». Ils barrent le 0 de 90 et écrivent au-dessus : 9101112131415…

Ils ont apparemment changé de logique au cours de l'échange : ce ne sont plus les multiples du nombre divisé (ici 10), mais la suite numérique des multiples de 1 ; regardons la dernière portion 060708091011 : ce qu'ils écrivent aux élèves leur permet sans doute d'expliquer le passage de 06070809 à 1011, alors que si on lit 60708091011, pour expliquer ce passage, il faut décomposer la suite des décimales ainsi qu'exposé plus haut, ce qui semble plus difficile. Comment revenir au caractère universel de l'écriture du nombre et montrer qu'elle ne l'influence pas, fondamentalement ? Pas si simple. Ils donnent une règle qui leur permet de contourner la question.

ANALYSE EN TERMES DE RÈGLE-EXPÉRIENCE-LOGIQUE

Le jeu de tâches autour de la division 1/9801 a mis en évidence les relations effectuées par les élèves, leur permettant, à partir de leur expérience, de faire évoluer un constat de régularités vers l'agencement d'une logique, qui elle-même leur a permis de formuler des règles; j'en ai donné un petit aperçu.

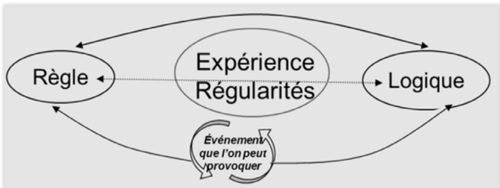


Figure 4

Le schéma ci-dessus montre que l'expérience est le moteur de l'enchaînement entre des nouvelles règles, qui elles-mêmes donnent lieu à de nouvelles logiques. Les régularités, qui sont de l'ordre de l'expérience, sont liées aux règles que les élèves suivent : ils dégagent et expérimentent ces régularités qu'ils prennent pour des règles. C'est parfois exact, évidemment, et parfois peu précis, mais cela leur permet néanmoins toujours d'avancer dans leur exploration du contenu.

De ces règles découlent d'autres logiques, dont ils expérimentent à nouveau les régularités, pour aboutir à de nouvelles règles. C'est un processus en boucle, dont la médiation est assurée par l'expérience.

Les sujets sont parfois intrigués, et, faut-il le dire, ne trouvent pas immédiatement de règle qui mène à la constitution des résultats allant au-delà de ce que leur calculatrice peut leur donner. J'ai également utilisé ce schéma pour analyser les procédures des étudiants.

Extraits d'étudiants

Ce que le dispositif leur a apporté :

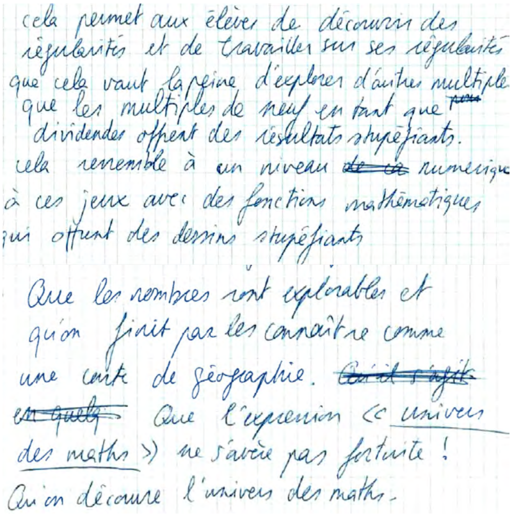


Figure 5 : Extraits d'étudiants

« Cela permet aux élèves de découvrir des régularités et de travailler sur ces régularités, que cela vaut la peine d'explorer d'autres multiples, que les multiples de 9 en tant que dividendes offrent des résultats stupéfiants. Cela ressemble à un niveau numérique à ces jeux avec des fonctions mathématiques qui offrent des dessins stupéfiants, que les nombres sont explorables et que l'on finit par les connaitre comme une carte de géographie. Que l'expression '<u>Univers des maths</u>' ne s'avère pas fortuite ! Qu'on découvre l'univers des maths »

Je retiens ces quelques remarques qui permettent d'avancer dans mon dispositif, vécu comme porteur : ce que je trouve le plus encourageant est que cet étudiant a saisi l'essence même de ce que j'ai voulu transmettre à propos du monde des nombres lorsqu'il dit : « *Que l'expression « univers des maths n'est pas fortuite !* »

CONCLUSION

> *Soit, je suis un cas pathologique. Mais avez-vous saisi le message? Les maths ne se résument pas à celles qu'on fait à l'école. Mieux : celles qu'on n'y fait pas sont passionnantes. On s'amuse souvent beaucoup avec les maths. Surtout quand il n'y a ni examen au bout ni calculs à vérifier. (Stewart I., 2008, p.7)*

En conclusion, ce qui est à retenir si l'on veut que l'élève puisse se constituer une expérience du monde des nombres, c'est que l'on ne peut pas faire l'économie de l'expérience, ce qui demande du temps. De la logique dégagée, l'élève va élaborer de nouvelles règles, l'expérience présidant à ce processus. Les régularités des actions des élèves se construisent dans l'expérience et sont dépendantes des règles qu'ils se sont données. Les étudiants sont pris dans ce dispositif et, contraints par les réponses à donner aux élèves, se retrouvent en situation d'expérimenter des régularités et de formuler des règles à leur tour.

Il est complexe de rendre compte de toutes les interactions entre les divers partenaires. Le schéma interactif bouclé ci-après tente de les modéliser :

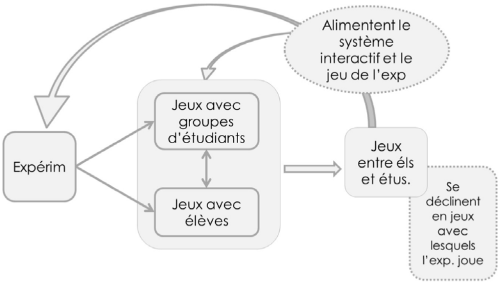


Figure 6 : Schéma interactif

Premièrement, les nombreux échanges entre l'expérimentatrice et le milieu des élèves et celui des étudiants : il y a un jeu à la fois avec les groupes d'étudiants et avec les élèves. Ces deux parties sont elles-mêmes en interaction puisqu'elles se répondent ; il y a en effet des jeux entre élèves et étudiants, ces derniers à leur tour déclinés en autant de jeux avec lesquels l'expérimentatrice interagit et qui alimentent le système tout entier.

Références

Del Notaro, C. (2010). *Chiffres mode d'emploi: exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour* *de quelques critères de divisibilité*. Thèse en science de l'éducation, Universitée de Genève.

Del Notaro, C. (2013). 1/9801 évolution du milieu d'une division un peu particulière (Partie 1). *Math-Ecole*, 220, 26-29.

Del Notaro, C. (2014a). 1/9801 : évolution du milieu d'une division un peu particulière (Partie 2). *Math-Ecole*, 221, 16-21.

Del Notaro, C. (2014b). Implementation In Class of a Theory Stemming From a Research: A Question of Didactical Transposition. *US-China Education Review*. B, 4(10), 730-739.

Stewart, I. (2008). *Mon cabinet de curiosités mathématiques*. Paris, Flammarion.

La maison

Stéphanie Dénervaud

Fondation de Vernand & groupe DDMES

Un matin, lors de l'accueil en classe, Didier arrive avec l'envie de construire des cabanes. Ses quatre camarades sont d'accord, il leur faut de grands cartons pour les construire. Je réfléchis à cette idée durant la semaine et tente de projeter quelles connaissances mathématiques pourraient être mises en jeu dans un tel projet : notions de géométrie dans l'espace, dans le plan, solides, développements, surfaces, formes, mesures et nombres sont nécessaires. Je réfléchis également au type d'activités que je pourrais proposer collectivement ou individuellement.

14 novembre

L'opportunité de ce projet me questionne, mais ce matin, les élèves me demandent formellement s'ils peuvent construire une cabane. Lors du moment dédié aux mathématiques, nous prenons le temps d'observer différentes maisons dans des livres et de les commenter. Le terme « triangle » apparaît déjà lors de la description d'une porte.

Je leur propose ensuite de dessiner la maison qu'ils souhaitent construire. Gaël dessine des collines parcourues par un chemin : la perspective est présente, le chemin rétrécit au loin. Durant leur production, les mots « carré » et « rectangle » émergent spontanément. Ils construisent ensuite leur maison avec des polydrons.

Figure 1 : l'une des maisons inventée

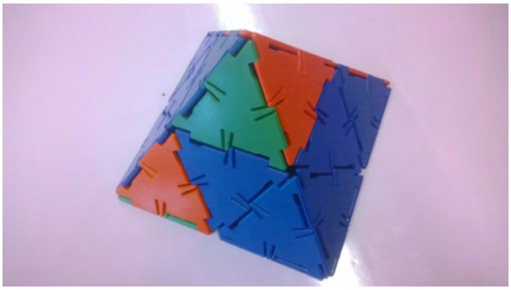


Figure 2 : maison pyramide

Gaël construit des figures et des solides. Il commence par un tétraèdre et une pyramide à base carrée qu'il nomme « pyramide ». Il construit aussi un cube : pour cela il part du développement en forme d'escalier, clair au départ dans sa tête, et le monte à toute vitesse en volume. Il désigne et nomme le « cube », l'« hexagone » construit avec les pièces triangulaires et l' « octogone » (mais en désignant une pièce pentagonale).

> Les termes qu'il utilise pour désigner les objets sont tous issus du domaine de la géométrie. Il ne fait pas de phrases, il nomme. Avant de monter son cube, il sait exactement quelles pièces il lui faut et comment monter sa maison. Je formule donc l'hypothèse suivante : atteint d'autisme, Gaël communique et pense sur un mode préférentiellement visuel ; il développerait donc des compétences géométriques et spatiales plus importantes qu'un élève neurotypique.

Didier construit un parallélépipède rectangle de trois étages avec des pièces carrées. Il parle de « maison rectangle ».

Nolan veut faire un immeuble de douze étages car il habite au douzième. Il commence par disposer ses carrés sur un plan de 3x12 carrés pour des raisons pratiques : il est plus facile d'accrocher les pièces à plat que directement en volume. Il rabat les côtés de la tour puis fixe les derniers carrés avec l'aide de Thomas et Didier.

Thomas voit ma collègue (nous sommes toujours deux enseignantes en classe) construire un dodécaèdre à partir des pentagones et entreprend de l'imiter avec succès. Il improvise ensuite d'autres volumes :

un cube ouvert, une pyramide ouverte, des solides irréguliers composés de pentagones et de triangles. Je lui demande si ce sont des maisons quand il n'y a pas de porte. Il cherche alors à les refermer.

Ma question vise non pas à considérer que chaque maison doit avoir une porte, mais à obtenir des solides à partir desquels il sera possible de faire des mathématiques. Un cube a 6 faces, qu'elles soient matérialisées ou non. S'il en manque une pour « laisser la maison ouverte », s'agit-il encore d'un cube ? Sa réponse n'est pas orale mais mise en acte : il referme le cube avec un sixième carré. Cette réponse satisfait-elle une injonction implicite liée au contrat didactique ? Correspond-elle à une conception partielle du cube car encore liée aux déterminants matériels ?

David construit sa maison par tâtonnement. Il réfléchit tant aux formes des pièces dont il a besoin qu'à leur agencement. Il essaie de construire en amont un développement de sa maison.

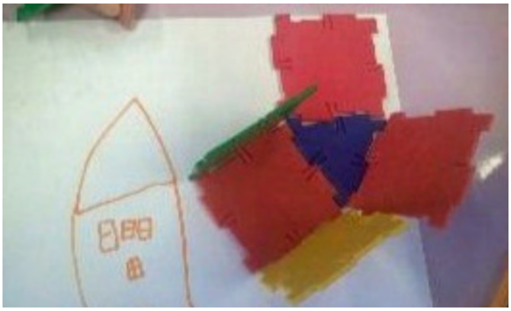


Figure 3 : maison de David

Lorsqu'il a fini, il construit un long serpent de « 43 » car son papa a « 43 ».

Lorsqu'il dit « quarante-trois », le mot-nombre n'est pas rattaché à une unité car tout ce qui se compte se rapporte pour lui à des années. Lorsque nous lui demandons à quoi correspondent ces 43, il ne comprend pas le sens de notre question ou alors répond « 43 ans », comme s'il s'agissait d'une évidence. 43 n'est pas un attribut quantitatif associé à des objets dénombrables, il désigne : il revient à l'interlocuteur de deviner quoi. Le nombre ici ne désigne pas une catégorie de pièces particulière. D'autre part, il est capable de dire 43 en comptant les éléments dans un autre ordre. Le rapport du signe (mot) au nombre (concept) relève pour lui plus d'un rapport de dénotation (Descaves, 2001) entre un mot-nombre et une série d'actes opérant sur des objets (désignation, correspondance terme à terme, indifférence de l'ordre et stabilité de la comptine numérique) et reste partiel. Un rapport construit sur un mode de connotation impliquerait d'énoncer la catégorie d'objets qui a été dénombrée, ce qui permettrait au mot-nombre de connoter non seulement le résultat d'une action, mais de lui donner le statut d'attribut quantitatif d'un corpus d'objets, et donc une valeur cardinale.

Une fois leurs maisons de polydrons construites, Thomas, Didier et Nolan comparent leurs maisons et cherchent à savoir qui aura la plus haute. Ils arrivent à la conclusion que s'ils les mettent toutes ensemble en les superposant, ils en auront une encore plus grande. Ils mettent leur idée à exécution, puis demandent à être photographiés à côté de leur tour pour voir s'ils sont plus grands qu'elle ou si cette dernière les dépasse.

Durant toute la séance, j'écris sur un panneau le vocabulaire spécifique au domaine mathématique que les élèves ont utilisé. La mise en commun porte sur l'évocation de ce vocabulaire et sur les étapes de construction d'une maison. L'architecte : 1) dessine la maison, 2) en fait un modèle réduit, 3) dessine un plan, 4) commande/confectionne le matériel, 5) construit.

Une telle séquence est porteuse de sens pour tous. Si les élèves ont des idées pour leur projet de maison, les enseignantes ont des idées pour favoriser les processus qui permettront de faire évoluer les conceptions d'ordre mathématiques présentes dans le milieu.

Afin d'unir ces deux dynamiques créatives, les enseignantes proposent des jeux de tâches (Favre, 2008) qui seront effectués soit individuellement soit de manière collaborative.

Les jeux de tâches ont pris les formes suivantes :

1) Créer progressivement un portfolio de termes géométriques. Il peut prendre la forme de tableaux agrémentés de dessins, de photographies, d'explications, d'affiches qui présentent tout ce que l'on a découvert (par exemple sur le carré/ le rectangle).

2) Dessiner le développement des maisons à partir des solides en polydrons mis à plat. Le contour reporté sur feuille cartonnée permettra de reconstruire la maison en papier cartonné.

3) Agrandir les dimensions de la maison.

4) Sur la base de photographies de maisons en polydrons : commander les pièces nécessaires (forme et quantité), puis reconstruire le solide.

5) Les développements sont photographiés afin que les enfants commandent les pièces nécessaires (forme et quantité) pour reconstruire le solide.

6) A l'image de ce qui a été fait sur les faces, un travail sur les sommets et arêtes est envisageable en utilisant des spaghettis et marshmallows, ou des baguettes et des connecteurs pour construire les solides.

17 novembre

Didier et ses camarades demandent pour la leçon de mathématiques à continuer la construction de la cabane. Les élèves sont invités à consulter le planning et à repérer les étapes déjà réalisées et celles restantes. Les enfants ont déjà dessiné et confectionné une maquette. Aujourd'hui, ils doivent faire les plans et le montage en papier cartonné.

Chaque élève choisit un solide qu'il ouvre pour le mettre à plat. Il en décalque le contour au stylo-feutre, replie chaque polydron pour dessiner les futurs plis (en traits tirés). Il découpe ensuite le tour du développement, plie le carton en respectant les marques puis colle les bords avec du scotch de carrossier. Les maisons sont décorées à bien plaire. « On pourrait faire un village ! », lance Thomas.

Avant découpage, les développements sont photographiés.

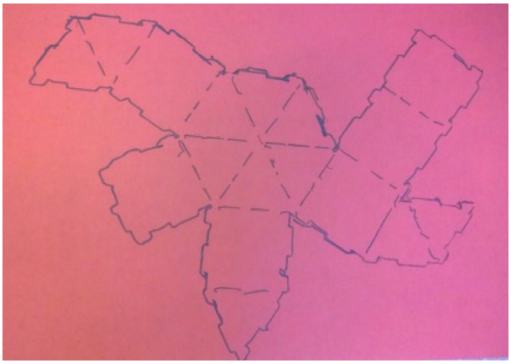


Figure 4 : développement d'une maison. Ici, il manque un triangle

Les photographies des solides en polydrons et des développements seront utilisés pour mettre en place des tâches individuelles de commande et de reconstruction de solides. L'observation des images implique des connaissances de reconnaissance de figures, de dénombrement, de représentation pour celles qui ne seraient pas visibles. Préparer la commande nécessite de l'anticipation de la part des élèves. La verbalisation pousse à l'utilisation d'un vocabulaire spécifique (nommer les formes ou certaines de leurs propriétés) et à l'utilisation du nombre comme attribut d'un ensemble. La construction du solide permet l'auto-évaluation de la démarche. Ces tâches sont proposées dans des « ateliers » individuels balisés sur une feuille de route.

19 novembre

Avant même que je montre le jeu de tâches préparé (commande de pièces pour reconstruire le solide représenté), Gaël repère sur l'étagère les photos des différents développements. Il va spontanément chercher les polydrons et reconstruit les solides au lieu de se joindre au groupe. Il a compris seul le fonctionnement de la tâche. J'espère alors qu'il pourra, si ce n'est expliquer le jeu à ses camarades, du moins le leur montrer.

Bien qu'il ne soit pas en mesure de partager ses découvertes avec ses pairs pour des raisons sociales, son initiative témoigne du pouvoir d'induction du milieu sur les actions possibles. Nul n'est besoin de démonstration, de dévolution de la part de l'enseignant.

19 NOVEMBRE

Aujourd'hui, je demande à mes élèves de construire une maison avec les polydrons. Cette fois, je ne leur donne que des pièces carrées. Chacun aboutit au « cube » (que nomme Gaël) et compte combien il a fallu de murs. Nous notons dans le tableau affiché le mot « cube », le mot « face » et le nombre 6. A partir du modèle en polydrons, je demande ensuite de construire un cube avec les spaghettis et les guimauves. Tous réussissent malgré les brisures de spaghettis trop fins (!). Je demande combien il faut de marshmallows et combien il faut de spaghetti pour faire un cube. Après plusieurs essais et confrontations, les élèves sont d'accord pour que je note sur le tableau : 12 spaghettis dans la colonne « côté »/ « arête » et 8 marshmallows dans la colonne « angle ». Le tableau sera complété par une photo d'un cube en polydrons, d'un cube en spaghettis/marshmallows, d'une série de spaghettis et de marshmallows photographiés[1].

On note que les élèves prennent soin de compter le nombre de spaghettis/marshmallows à faire figurer au tableau. Le nombre inscrit ne suffit pas à signifier la quantité, l'image d'un spaghetti ou d'un marshmallow ne suffit pas à symboliser la qualité de l'objet quantifié. La référence à la quantité est d'ordre iconique et non pas symbolique : les élèves ont besoin de faire figurer les 12 spaghettis ainsi que les 8 marshmallows sur les photos collées. L'écriture formelle du nombre n'a pas encore acquis un statut représentatif suffisamment porteur de sens.

21 NOVEMBRE

Les enfants disposent de carton ondulé, d'un mètre et d'un double-mètre. L'enjeu est de découper des carrés de 100 cm de côtés pour faire les murs de la maison.

Les enfants découvrent le matériel, déplient le double-mètre et le mètre et les comparent. Thomas et Nolan cherchent les inscriptions 100 et 200, puis vérifient s'il y a bien le nombre de centimètres correspondants sur leur outil de mesure. Pour cela, ils se placent de part et d'autre du double-mètre : Nolan décompte depuis 200 jusqu'à 100 et Thomas compte depuis l'autre extrémité en pointant chaque centimètre. Ils tombent d'accord sur le fait qu'il y a bien 100 cm et 200 cm. Si Nolan n'éprouve pas de difficulté particulière au décomptage, il n'en va pas de même pour Thomas qui n'arrive pas encore à oraliser les mots « quinze » et « seize ». Passé ce cap avec l'aide de l'adulte, il arrive à retrouver des régularités dans l'énoncé de la suite des nombres.

Les enfants mesurent sur le carton 100 cm en dessinant un repère. Instinctivement, ils utilisent les rainures du carton ondulé pour mesurer le côté adjacent à angle droit. Je leur montre comment plier une feuille de papier pour obtenir les « coins du carré » et vérifier s'ils retrouvent les mêmes sur leur format cartonné. Une fois d'accord sur leur tracé du carré, ils en font un deuxième, puis un troisième côte à côte. Ils les découpent. Didier crée immédiatement une porte sur un des carrés. Il prévoit déjà de faire une fenêtre dont il dessine et découpe la forme dans un morceau de carton restant.

1 DÉCEMBRE

Puisqu'il faut 6 carrés pour construire la maison, les enfants conviennent qu'il leur en faut encore trois. Je leur donne un morceau de carton de 100 cm de large qui laisse de la marge en longueur. Les enfants prennent le mètre, mesurent et dessinent les repères à 100 cm de part et d'autre de la bande de carton. Nolan fait remarquer que ceux-ci ne sont pas l'un en face de l'autre, donc qu'il y a imprécision. Il prend pour repère l'ondulation rectiligne du carton. Pour obtenir un carré, il convainc ses camarades de découper d'abord la partie que dépasse l'ondulation, puis de recommencer les mesures. Un premier carré est tracé, puis un deuxième.

1 *Deux photos de 4 marshmallows : les 8 éléments sont figurés iconiquement, c'est-à-dire de manière proche de la réalité : ils sont dénombrables au même titre que les objets qu'ils représentent. L'inscription « 8 » est de l'ordre du symbole, et la photo d'un seul spaghetti aurait suffi à symboliser toute la catégorie « spaghetti ».*

Je demande : « Combien y a-t-il de carrés ? » Les élèves répondent qu'il y en a trois, sauf Nolan. Je prépare des étiquettes sur lesquelles j'écris le mot « carré ». Les enfants posent successivement les étiquettes.

carré	carré		

Etiquettes

Figure 5 : les élèves découpent les carrés de carton

Nolan répond que le troisième n'est pas un carré mais un rectangle. A la question « *pourquoi ?* », il répond qu'« *il n'y a pas la même chose* ». Il prend le mètre et montre qu'il y a 100 cm et encore quelque chose qui dépasse. Ce n'est donc pas un carré mais un rectangle « *Parce qu'on n'a pas dessiné là.* », désignant un tracé imaginaire. Je pose le mot « rectangle » dessus. Les enfants décident de tracer un repère à 100 cm. Ils découpent et enlèvent ce qui est en trop. Une fois terminé, nous prenons le temps d'écrire sur une affiche nos observations concernant les similitudes et les différences entre le carré et le rectangle (figure 6).

Lors de cette phase de discussion, les enfants cherchent leurs mots. Nolan explique que « le rectangle a deux côtés la même chose en face l'un de l'autre. Il a deux côtés plus grands. » Cette observation permettra de définir que le carré, lui, a quatre côtés de la même grandeur. C'est par comparaison que les critères émergent. Le mot « côté » est évoqué par Gaël, resté en dehors de l'activité jusqu'alors. Avant cela,

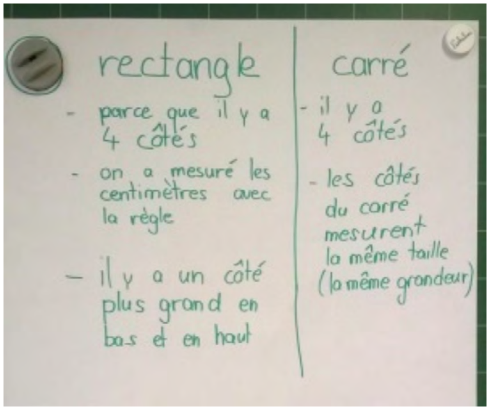


Figure 6 : observations sur le rectangle et le carré

aucun mot n'est utilisé et les enfants ont besoin de longer du doigt ce qu'ils cherchent à désigner. Le mot « mesurer » succède à « regarder la taille ».

J'observe ici une évolution du registre langagier dont la précision est rendue nécessaire ici à des fins de catégorisation.

5 DÉCEMBRE

Avec des baguettes et des connecteurs, les enfants montent l'armature de la maison, à savoir la structure du cube. Les carrés sont fendus sur les côtés pour être noués à la structure à l'aide de rubans. La maison est enfin habitable…

Figure 8 : connecteurs en plastique imprimés en 3D

Figure 9 : maison cubique

L'expérimentation qui a eu lieu jusque-là a permis aux élèves d'élaborer des connaissances en termes de mesures, de représentation spatiale, de passage du plan au volume et inversement. Il a permis de réaliser une « maison en carton » tout en découvrant quelques propriétés du cube. L'aventure n'est pas terminée. Déjà se profile l'idée de construire un toit, de redéfinir le statut du plafond de la future cabane.

(Affaire à suivre…)

Bibliographie

Descaves, A. (2001). L'apprentissage du sens, certes ! Mais dans quel sens prendre le sens ? *Actes du 28è Colloque de la COPIRELELM de Tours* (pp. 75-78). Orléans : PUO.

Favre, J.-M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N* (82), pp. 9-30.

À la découverte des livres à compter !

Audrey Daina & Céline Vendeira

HEP Vaud, Université Genève

Dans le cadre de nos enseignements pour la formation initiale des enseignants primaires, ainsi que pour diverses formations continues dans les cantons de Genève, Vaud et Fribourg, nous nous sommes intéressées aux « livres à compter » (que nous allons définir dans ce qui suit) et nous avons voulu mettre en évidence leur potentiel très prometteur pour l'enseignement des mathématiques. A l'origine de notre démarche se trouvent différents articles en lien avec l'utilisation de livres à compter en classe (Valentin, 1995-1996, 1999-2000, 2007, Eysseric, 2000, Pierrard, 2003, Camenisch & Petit, 2007, 2008). Ceux-ci proposent différentes pistes pour analyser ce type d'ouvrages, mettre en évidence leurs caractéristiques et reconnaître leur potentiel pour l'enseignement ou pointer certains obstacles didactiques.

Notre premier objectif était donc de partager ces recherches. Toutefois, nous avons été confrontées au fait qu'un certain nombre des livres à compter cités n'étaient plus commercialisés ou difficilement accessibles, se trouvant par exemple d'occasion mais avec des prix pouvant être très conséquents. Il en est d'ailleurs de même pour une partie de ceux listés dans les moyens d'enseignement romands pour la 1P-2P. Nous avons alors décidé de constituer une bibliographie qui présenterait certains classiques mais également des ouvrages récents et faciles à se procurer. Dans ce but, nous avons collecté un grand nombre de ces livres.

En constituant cette bibliographie, nous avons pu voir à quel point ces ouvrages « avec des nombres » différaient les uns des autres, raison pour laquelle nous avons ressenti la nécessité de les classer selon différents critères. Ce travail d'analyse nous a conduit à organiser notre bibliographie selon différentes catégories afin de cibler davantage le potentiel de chacun des livres et ainsi de faciliter les choix des enseignants qui peuvent ainsi savoir quel livre utiliser dans leur classe selon les objectifs visés. Cet article a pour objet de présenter notre démarche puis la catégorisation en l'exemplifiant à travers quelques livres significatifs.

Catégorisation pour une diversité de livres à compter

Dans un premier temps, nous avons voulu spécifier ce qu'est sous-entendu derrière l'appellation de livre à compter. Dans la littérature, nous trouvons une première définition large puis restreinte proposée par Valentin (1999-2000).

Définition large :

> *Tout livre qui amène les enfants à compter, à dénombrer des objets, des animaux, des personnages, … et qui, de ce fait, poursuit un objectif d'apprentissage dans le cadre familial. (p.101)*

Définition restreinte :

> *Tout livre qui présente des collections (et leur nombre d'éléments) dans l'ordre, croissant (ou décroissant), chaque nouvelle page ou double page correspondant à une collection ayant un élément de plus (ou de moins) que la précédente. (p.102)*

Ceci nous a permis de classer globalement les ouvrages en deux catégories : d'une part **les livres à compter**, qui répondent aux caractéristiques de la définition restreinte et, d'autre part, ce que nous avons appelé « **les albums avec des nombres** », qui ne peuvent être qualifiés de livres à compter selon la définition citée, mais qui correspondent à la définition large et proposent un potentiel certain pour l'enseignement des mathématiques.

Nous avons ensuite différencié les ouvrages en nous intéressant à différents critères qui ont été mis en évidence dans la littérature citée et qui sont significatifs en vue d'un usage en classe.

Il importe, premièrement, de regarder <u>les différentes représentations du nombre</u> qui apparaissent dans l'ouvrage. Une collection d'éléments est fréquemment associée à une écriture chiffrée. Toutefois, il existe d'autres possibilités qui peuvent venir s'ajouter ou remplacer l'écriture chiffrée. Par exemple, peuvent figurer l'écriture littérale, mais aussi la configuration des points du dé ou des doigts de la main, des cartes du domino. Dans certains cas, aucune représentation particulière n'accompagne la collection d'éléments.

Concernant les collections, il est d'autre part important d'observer si les éléments qui la composent sont facilement identifiables ou non.

Un autre aspect important concerne <u>le domaine numérique abordé</u> dans le livre. Il est évident que cela a une influence importante sur la sélection du livre à compter qu'un enseignant va choisir pour sa classe. Il est également important de se questionner sur la présence du zéro et sur l'élargissement aux grands nombres que proposent certains livres à compter.

D'un point de vue plus général il est par ailleurs important d'être attentif au <u>récit proposé par l'ouvrage</u> (présence ou non d'un fil conducteur). Il est également possible de relever des particularités supplémentaires, comme par exemple la présence de questions ou de tâches à l'attention du lecteur, la possibilité d'un travail interdisciplinaire ou encore les qualités esthétiques de l'ouvrage.

Finalement, le critère que nous avons principalement retenu pour organiser notre catégorisation des livres à compter concerne <u>la manière dont le livre présente le passage d'un nombre au suivant</u> : Comment les nombres sont-ils présentés ? Passe-t-on d'une page à la suivante en insistant sur le fait qu'il y a un objet de plus ? Comment l'ajout est-il mis en évidence ? Ainsi, nous nous sommes inspirées des propositions de Eysseric (2000), qui donne « quelques pistes pour choisir… » [un livre à compter] que nous avons reprises pour qualifier certaines de nos catégories. Nous avons ensuite fait évoluer cette classification en analysant une soixantaine de livres à compter dont nous proposerons probablement la bibliographie commentée dans un prochain numéro de la Revue Math-Ecole.

Livres à compter

Nous avons classé les livres à compter en quatre catégories que nous présentons ci-dessous.

Des collections sans liens les unes avec les autres

Comme le précise Eysseric (2000),

> *ces albums présentent en général la suite numérique croissante, par le biais de collections de cardinal 1, puis 2, etc. (p.6)*

le domaine numérique exploité allant dans la majorité des cas de 1 à 10. Ce sont des livres de type « imagiers » avec la particularité de présenter les nombres avec des collections autour d'une même thématique mais indépendantes les unes des autres (une oie ; deux chiens ; trois escargots etc.). Ces livres peuvent s'apparenter aux bandes numériques qui sont affichées dans certaines classes et qui proposent la représentation d'un nombre avec son écriture chiffrée puis d'autres représentations associées (une collection d'objets / animaux / personnage, doigts, constellations de points, écriture littérale, etc…).

Voici un premier exemple (Image 1), « Ton imagier des animaux à compter » aux éditions Milan jeunesse, qui est intéressant car il propose différentes représentations du nombre (collection d'objets, écriture chiffrée, écriture littérale, doigts de la main).

Image 1

Le deuxième exemple est quelque peu différent car il présente plusieurs collections représentatives d'un nombre sur une même double page. De plus, cela est fait à travers divers tableaux d'artistes, permettant une sensibilisation à l'art et donc un travail en lien avec l'art plastique. Dans l'exemple ci-dessous (Image 2) nous voyons par exemple pour représenter le nombre 1, un tableau représentant un chameau, un autre une montgolfière, puis une petite fille et finalement un oiseau. Ce livre s'intitule « 1,2,3 les chiffres » et se trouve aux éditions Hachette livre.

Image 2

Une collection unique dont le cardinal augmente de 1 à chaque étape

Dans ces livres, la particularité réside dans le fait que la suite croissante des nombres est présentée par le biais d'une collection unique : un élément pour le nombre 1, ce même élément plus un autre pour le nombre 2, etc. Les objets/animaux ou personnes introduits au fil du livre demeurent donc présents sur les pages suivantes avec, à chaque page ou double page l'arrivée d'un nouvel élément. Dans le livre « Dans ma maison il y a » aux éditions Seuil Jeunesse, (Image 3) une histoire présente une maison dans laquelle, à chaque double page, un personnage ou élément vient s'ajouter.

Image 3

Ainsi ces ouvrages permettent particulièrement de mettre en évidence « le passage d'un nombre au suivant » (Ibid, p.6) et donne aux élèves une possibilité d'expérimenter le lien entre l'ordre des nombres écrits sur la bande numérique, par exemple, et l'ordre des nombres eux-mêmes : 2 c'est 1 auquel on a ajouté 1 ; 3 c'est 2 auquel on a ajouté 1 etc. Dans un second exemple, le livre de Barbapapa (Image 4) il n'y a d'abord personne sur l'image, permettant l'introduction du zéro. Puis plusieurs catégories de personnages apparaissent et sont d'abord les seuls représentants de leur catégorie : un cochon, un lapin, un Barbapapa, un mouton, un humain, un chien, un hérisson, un chat, un oiseau, puis une coccinelle. Puis, au fil des doubles pages et de l'histoire, les collections augmentent de 1 à chaque fois jusqu'à atteindre 10 chacune. De ce fait, la double page représentant le nombre 10 est passablement chargée et le dénombrement de l'ensemble des éléments nous permet d'atteindre 100.

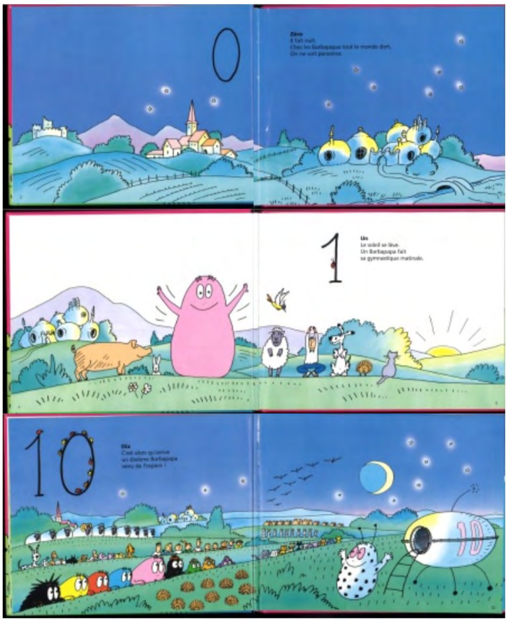


Image 4

Dans les deux exemples une distinction supplémentaire peut être relevée en lien avec la catégorisation. « Dans ma maison il y a » les éléments qui s'ajoutent au fil des pages ne sont pas de la même classe (poule, chat, ballon, parapluie,…). Alors que dans Barbapapa seuls des moutons s'ajoutent avec des moutons, des chiens avec des chiens, etc…

Une collection unique dont le cardinal diminue de 1 à chaque étape

Cette catégorie est proche de la précédente. La seule différence tient au fait que la suite numérique introduite est décroissante. C'est-à-dire qu'à chaque page ou double page un élément/animal/personnage disparait ou s'en va. Voici un exemple caractéristique de cette catégorie (Image 5) avec l'ouvrage « Dix petites graines » aux éditions Gallimard Jeunesse » où à chaque double page une graine est mangée par un animal, puis des pousses de plantes détruites par un animal ou un personnage. La suite décroissante s'interrompt à 1 et repars à 10 avec un retournement de situation dans le récit (ne permettant pas d'aborder le zéro autrement qu'en tant que chiffre composant le nombre dix (10)).

Image 5

Des livres à compter atypiques où les collections se cumulent et/ou se combinent

Dans cette catégorie se trouvent différents albums qui présentent la suite numérique croissante ou décroissante, chaque nombre étant représenté par une collection d'objets/animaux/personnes etc., comme un livre à compter classique. Cependant l'organisation globale de ces ouvrages ne suit aucune des deux logiques décrites précédemment (1 et 2 ou 3). Si l'on s'intéresse plus particulièrement à la question du passage d'un nombre au suivant, on remarque que les collections proposées se cumulent et/ou se combinent au fil des pages. Ceci a pour conséquence le fait que le nombre total d'éléments représentés sur une double page (toutes collections confondues) n'est pas directement représentatif du nombre travaillé (constat déjà mis en évidence pour le livre de Barbapapa, mais pour d'autres raisons). Dans le premier exemple, « des milliards d'étoiles » des éditions Thierry Magnier, (Image 6) la suite numérique croissante est présentée par le biais de collections indépendantes qui se cumulent d'une page à l'autre (mais ne se combinent pas): il y a une maison à la première double page, une maison et deux arbres à la deuxième page, puis une maison, deux arbres et trois personnages à la troisième. La troisième page est représentative du nombre 3, (représentée également avec 3 doigts). Elle a pourtant 6 éléments dénombrables. Voici ci-dessous (image 6) l'exemple de cette double page.

Image 6

Un deuxième exemple, « Le repas », aux Editions Les petits Duculot (Image 7), présente aussi la suite croissante mais par le biais de collections qui se constituent de manière irrégulières au fil de l'histoire : le nombre 1 est représenté par un loup ; le nombre 2 par deux lapins ; le nombre 3 par le loup et les deux lapins ; le nombre 4 par quatre loups « invités » ; etc. Nous constatons une certaine irrégularité dans ce livre par rapport à l'exemple précédent avec « des milliards d'étoiles ». Par exemple, dans le cas du nombre 3, aucune nouvelle collection n'apparaît sur la double page, mais le loup et les deux lapins sont utilisés afin d'obtenir 3. Ainsi, selon les illustrations, on retrouve parfois sur l'image des éléments des collections antérieures cumulés avec les nouveaux (comme dans l'exemple illustré ci-dessous) ou des éléments d'anciennes collections combinés entre eux (de type 1+2 =3 sans introduction de nouvel élément). Pour le nombre 5, représenté sur l'image ci-dessous sont introduites les cinq assiettes, mais on trouve également cumulés sur l'image le loup, les deux lapins et les quatre invités.

On voit bien avec ces deux exemples que ces albums sont peut-être moins indiqués

Image 7

s'il s'agit d'introduire le nombre par le biais d'une collection de référence ou de travailler sur le dénombrement, car il est nécessaire d'identifier, en effectuant un tri, sur chaque double page la collection représentative du nombre par rapport au reste des éléments présents. Cet aspect peut être une difficulté pour certains élèves en début d'apprentissage. Cependant ces livres sont très riches et offrent de nombreuses possibilités pour travailler sur le nombre, voire introduire des calculs.

Albums avec des nombres

Bien qu'il ne s'agisse pas de livres à compter en tant que tels, il existe de nombreux livres où apparaissent les nombres. Ces derniers méritent d'être présentés car ils ont également un potentiel certain pour l'enseignement des mathématiques. Nous proposons dans ce qui suit quelques catégories qui permettent de mettre en évidence certains aspects particuliers que permettent d'aborder ce type d'album. Nous ne pouvons bien entendu pas être exhaustives et il ne s'agit que de pistes à explorer, les possibilités étant plus étendues.

Des livres associant l'approche ordinale et l'approche cardinale

Un certain nombre de livres permet également un travail sur l'aspect ordinal du nombre, caractérisé par l'utilisation du nombre non pas pour définir une quantité, mais un rang, une position. Un exemple caractéristique de livre de ce type est « la maison aux 100 étages, aux éditions Picquier jeunesse (Image 8) où un petit garçon est invité au 100ème étage d'une maison pour rendre visite à quelqu'un. Commence alors une ascension pour le petit garçon où tous les 10 étages il rencontre des populations d'animaux différents (des grenouilles, des coccinelles, etc.). Dans ce livre l'accent est mis sur l'ascension des étages « être au premier », puis « au deuxième » puis au « xème étage ».

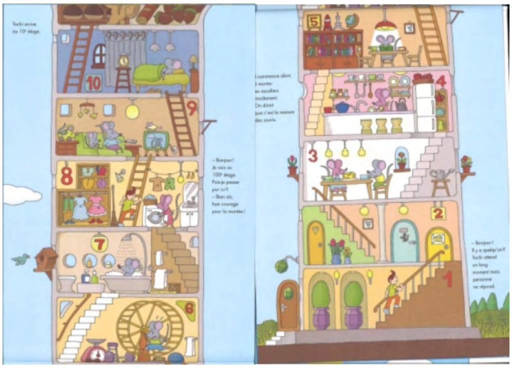


Image 8

Des livres présentant des comptines pour mémoriser la suite des mots nombres

Nous exemplifions cette catégorie avec un livre racontant l'histoire d'un loup ne sachant pas compter au-delà de trois et dont tout le monde se moque. C'est à travers une comptine que le loup va réussir à s'approprier la comptine jusqu'à douze et ainsi lui permettre de jouer à cache-cache avec ses amis. Le livre s'intitule « Loup ne sait pas compter » et est édité chez Père Castor (Image 9).

Image 9

Des livres à calculer

Ces livres permettent un travail sur les différentes opérations. Il s'agit ici d'une catégorie plus conséquente qui pourrait donner lieu à un travail de recension plus fin. Par exemple, certains manuels français pour l'enseignement proposent des livres de ce type. Dans la collection « j'apprends les maths » éditée par Rémi Brissiaud et André Ouzoulias, il existe le deuxième album à calculer pour la Grande Section (équivalent à une 2P Harmos) qui permet un travail sur le répertoire additif ainsi que les différentes décompositions additives des nombres de 3 à 7.

Nous ne développons donc pas cette partie, mais rendons le lecteur attentif à l'existence de cette catégorie.

Des livres pour dénombrer

Parmi les autres livres que nous trouvons dans le commerce, il existe un type représenté en grand nombre. Ci-dessous l'exemple avec « 1001 animaux à retrouver » des éditions Usborne (Image 10). Dans ces ouvrages il est demandé explicitement au lecteur de retrouver un certain nombre d'éléments sur une double page impliquant par conséquent un travail de dénombrement et d'énumération (afin d'être certain d'avoir compté tous les éléments demandés et une seule fois chacun).

Image 10

Conclusion

Pour conclure, nous précisons que ces livres ne sont, a priori, pas destinés à être utilisés en classe. Le rôle de l'enseignant est donc primordial, car une réflexion doit être menée avant de pouvoir les introduire en classe et en tirer profit. La première catégorie décrite et explicitée dans l'article (de type « imagiers ») est représentative des ouvrages probablement les plus investis par les enseignants dans leur classe. Il est d'ailleurs fréquent d'en voir des pages affichées au mur comme support visuel pour le travail des élèves. Quant aux autres catégories, ce sont celles qui nécessitent un travail de préparation plus conséquent.

Laisser les élèves manipuler ces livres, même seuls, ne peut qu'être positif pour une sensibilisation au nombre. Toutefois, les livres à compter et les albums avec des nombres peuvent également être considérés comme une ressource très intéressante pour la conception de séquences didactiques en classe. Les critères d'analyse repris dans cet article ainsi que la bibliographie qui sera publiée dans un prochain article permettrons de mieux outiller les enseignants dans cette démarche.

Références

Brissiaud, R. Ouzoulias, A. (2002). *Le deuxième album à calculer, GS*, Collection J'apprends les maths, Paris : Editions Retz.

Camenisch, A., Petit, S. (2008). Des albums numériques : pour quels apprentissages en français et en mathématiques ? In *34e Colloque européen des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres*, COPIRELEM, IUFM de Troyes.

Camenisch, A., Petit, S. (2007). Des albums pour apprendre à compter et à développer la maîtrise de la langue, *Revue APMEP,* 471, 574-580.

Eysseric, P. (2000). Albums, contes et mathématiques, In *XXVIIème Colloque Copirelem*, Chamonix, pp.253-270.

Pierrard, A. (2003). Lire, écrire des livres à compter, *Grand N*, 72, 7-18.

Valentin, D. (1995-1996). Des enfants, des mains, des doigts…, et des livres à compter, *Grand N*, 58, 9-15.

Valentin, D. (1999-2000). Livre à compter, *Grand N spécial maternelle, tome 1*, 101-111.

Valentin, D. (2007). Vive les livres à compter, *Grand N*, 80, 7-15.

Labo-maths - Les enclos

Thierry Dias

HEP Vaud & DDMES

L'objectif de cette rubrique « labos-maths » est de proposer aux enseignants des situations de recherches mathématiques à partir d'un contexte (ici celui de l'articulation aire/périmètre) afin qu'ils puissent conduire de véritables explorations avec leurs élèves. Il ne s'agit donc pas de faire « faire des problèmes » au sens où on l'entend habituellement. Ainsi, si le contexte de la recherche est imposé (sous forme d'un jeu avec quelques règles), les questions à poser et les démarches de travail envisagées peuvent être diverses et donc adaptées à plusieurs niveaux de classe. Il n'y a pas systématiquement de consigne imposée qui laisserait entendre qu'il existe une réponse attendue relativement unique. Les situations proposent en effet des recherches qui peuvent conduire à une multiplicité de découvertes et donc de « réponses ».

La formulation d'un ou plusieurs résultats prend également ses distances avec une traditionnelle « phrase réponse ». Nous engageons plutôt les enseignants à faire produire à leurs élèves de petits récits racontant leurs recherches tant dans les moments de découverte que de doutes. Nous préférons l'emploi de la terminologie de résultat ou découverte en lieu et place de celle de réponse.

La rubrique propose des situations d'investigations pour lesquelles il n'est pas non plus fourni d'analyse a priori. Nous entendons cette terminologie d'investigation en référence à la diversité des processus de raisonnement convoqués : inductif, déductif et expérimental. Nous engageons donc les enseignants à faire faire des expériences et des découvertes mathématiques à leurs élèves en parcourant parfois des chemins inattendus, parfois des impasses provisoires. Toute action menée par les élèves est en effet susceptible de révéler leurs connaissances. Il s'agit de privilégier des espaces de recherche dans lesquels les élèves se sentent suffisamment autonomes pour mener de véritables expériences personnelles avec les objets ; qu'il s'agisse d'objets sensibles ou d'objets de pensée. On peut en effet imaginer que des expériences conduites par exemple sur les nombres ne nécessitent pas forcément l'emploi de jetons ou de cubes.

L'enseignant doit privilégier un rôle d'accompagnateur de la résolution, en essayant de ne pas prendre de responsabilité directe dans les choix mis en œuvre par les élèves. Il pourra lui aussi être surpris des découvertes mais sera avant tout un témoin privilégié du potentiel de ses élèves à construire des connaissances mathématiques.

La finalité de la rubrique tient également dans la possibilité d'une communication entre les enseignants. Nous proposons effectivement à celles et ceux qui le souhaitent de témoigner de leurs expériences en racontant leurs découvertes, leurs surprises et les difficultés rencontrées. Ainsi un enseignant peut expliquer comment il a posé le problème, avec quelle(s) consigne(s) et pourquoi il a choisi certaines questions et pas d'autres. Il pourra également témoigner de sa réflexion sur le travail de ses élèves, analyser le dialogue en classe ou présenter les perspectives qui résultent de ses expériences mathématiques.

Les problèmes de cette rubrique « labomaths » peuvent se résoudre collectivement au sein de véritables petits laboratoires de mathématiques. Ils ne doivent pas donner lieu à une compétition quelle qu'elle soit, ce sont plutôt des occasions de mener des recherches collaboratives.

La recherche

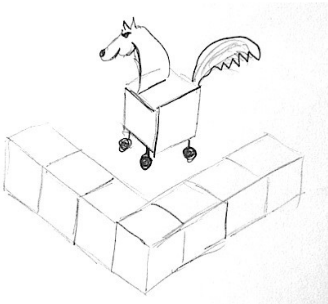


Image 1

A Carré-Land, le sol est quadrillé par des carrés comme dans un damier. Dans ce drôle de village, on a promis à la gardienne du zoo qu'elle pourrait recevoir certains animaux très spéciaux appelés mathanimaux. Il s'agit d'une race très rare qui occupe un seul carré d'espace au sol. La gardienne doit utiliser vingt cubes pour fabriquer une clôture afin de construire un enclos pour les mathanimaux.

Quel type d'enclos peut-elle bâtir pour faire tenir le plus de mathanimaux possible à l'intérieur ?

Elle doit suivre les règles suivantes pour ses projets de construction :

- Elle doit utiliser tous les cubes pour construire l'enclos.
- Tous les cubes formant la clôture de l'enclos doivent se toucher par un côté au moins.
- L'enclos doit être fermé, sans porte ni ouverture, de sorte que les mathanimaux ne puissent pas s'échapper.
- Les mathanimaux ne peuvent pas se tenir les uns sur les autres dans l'enclos.
- Chaque mathanimal utilise l'espace d'un carré dans l'enclos.

Votre premier défi consiste à faire chercher par les élèves toutes les formes d'enclos possible en tenant compte de l'ensemble des contraintes. Ce sera l'occasion pour les élèves d'investiguer les rapports entre la forme d'un périmètre, sa taille et les conséquences sur la mesure de l'aire correspondante au polygone qui la définit.

Vous pouvez ensuite proposer la recherche en supprimant la deuxième contrainte des règles de l'énoncé (selon le niveau scolaire de votre classe vous pouvez même éventuellement supprimer d'emblée cette règle). Cela vous permet de proposer un problème beaucoup plus ouvert car la variété des formes des enclos est alors importante. Ce ne sont en effet plus seulement des combinaisaons de rectangles qui sont possibles ce qui augmente considérablement la taille des aires probables.

En changeant le nombre de cubes à disposition des constructions, il est possible de rendre le problème plus facile ou au contraire plus complexe.

Pour faire des recherches amusantes, vous pouvez également proposer les énigmes suivantes :

- Quelle est le plus petit enclos possible avec 20 cubes ?
- Peut-on fabriquer un enclos qui contienne exactement 12 places, 16 places ?
- Existe-t-il plusieurs formes d'enclos contenant 20 places ?

Il est également possible de rendre le problème encore plus difficile et ouvert en choisissant par exemple deux tailles de mathanimaux : une ou deux cases. Les configurations et arrangements possibles à l'intérieur d'un enclos sont alors diverses et le problème quitte un peu le domaine des grandeurs pour rejoindre plutôt celui des pavages.

Pilotage de la classe

Vous pouvez bien entendu permettre à vos élèves de travailler en petits groupes, mais vous êtes libre de choisir les dispositifs qui vous conviennent le mieux. Dans un premier temps, un travail individuel peut très bien être adapté à cette recherche.

Laisser les élèves s'organiser comme ils le souhaitent, mais conseillez-leur de bien garder les traces (dessins ou photos) de leurs différents essais ainsi que de leurs découvertes. Ces traces de recherche seront en effet essentielles pour partager les résultats entre chercheurs.

Un élément important consiste à fournir aux élèves le matériel nécessaire, c'est à dire des cubes et des feuilles quadrillées adaptées aux dimensions des cubes.

Prenez le temps nécessaire à discuter des consignes de ce problème avec les élèves qui n'entrent dans aucune action susceptible de révéler leurs connaissances. Il n'est en effet jamais souhaitable qu'un élève reste en situation d'échec prolongé quelle que soit l'activité qui est proposée. Cet étayage langagier vous donnera également l'occasion de vous assurer qu'aucune difficulté de compréhension (sémantique ou syntaxique) ne vient nuire inutilement au lancement de la recherche mathématique.

Nous vous rappelons cependant qu'il faut toujours éviter d'induire un résultat et privilégier des étayages laissant une liberté d'expression aux connaissances des élèves.

Quand les élèves commencent le problème, chaque assemblage trouvé nourrit la recherche et leur donne des idées pour trouver d'autres solutions. Laissez-leur un temps d'exploration suffisant pour qu'ils puissent dépasser les configurations les plus évidentes. Ils sauront sans aucun doute trouver de nouveaux assemblages intéressants même s'ils pensent parfois être « bloqués » un certain temps pensant qu'il n'y a plus rien à trouver. Si certains de vos élèves sont en difficulté avec la prise de notes nécessaire à la compilation des essais et des découvertes, vous pouvez fournir une fiche comportant des dessins d'assemblages de cubes en perspective, ou mieux encore permettre la prise de photos.

Pensez à recueillir le travail des élèves, prenez des notes sur les interactions qui ont eu lieu, sur la variété des approches des élèves que vous avez observées dans votre classe. Toutes ces informations peuvent toujours être utiles pour mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves mais aussi pour évaluer leurs connaissances et leur potentiel à apprendre en mathématiques. Dans votre réflexion sur votre expérience avec ce problème, gardez par exemple à l'esprit les questions suivantes :

- Quelles difficultés ont eu les élèves dans la compréhension du problème?
- Comment les élèves ont-ils abordé cette tâche ?
- Quelles stratégies les élèves ont-ils essayées ?
- Y a-t-il des réponses d'élèves ou des interprétations qui vous ont surpris ?

Où sont les maths ?

Les connaissances mathématiques utiles pour effectuer les recherches proposées dans ce problème sont diverses et concernent essentiellement le domaine du nombre entier et des opérations du champ additif. Nous rappelons cependant à cette occasion en citant le Plan d'Étude Romand que :

> *Les mathématiques sont plus qu'une collection de concepts et de compétences à maitriser. Il s'agit plutôt d'un ensemble complexe d'idées incluant des méthodes d'investigation et de raisonnement, les techniques de communication et les questions de contexte.*

Ainsi cette recherche concerne davantage les objectifs relatifs aux éléments pour la résolution de problèmes tels qu'ils sont énoncés dans le plan d'étude. On peut retenir ici par exemple :

- *La mise en œuvre d'une démarche de résolution en évaluant par exemple les critères suivants: est-elle explicite, adaptée, cohérente ?*
- *L'ajustement d'essais successifs, puisque les recherches consistent à construire des procédures se basant sur la mise en lien de résultats intermédiaires et temporaires.*
- *La vérification puis la communication d'une démarche, car les différentes étapes des recherches peuvent être plus ou moins superposées et que leur communication nécessitera souvent une mise en forme spécifique.*

Quelques enjeux en termes de notions mathématiques sont également sous-jacents dans la résolution des problèmes suscités par l'énigme. Ils sont adaptés même aux premiers niveaux de l'enseignement primaire et concernent principalement le domaine des grandeurs et mesures. La construction des enclos permet d'étudier les relations entre périmètre et aire, deux grandeurs qui varient de façon relativement contre-intuitive pour les élèves qui ont tendance à penser qu'elles augmentent proportionnellement. Les recherches conduiront également les élèves à de nombreuses activités de comparaison et de classement de mesures de longueur et d'aire. De façon plus accessoire, quelques découvertes et remarques pourront concerner la reconnaissance de polygones particuliers dans le dessin des enclos.

Partagez vos expériences

Savoir comment vos élèves répondent à ce problème nous intéresse beaucoup. Nous sommes également curieux de connaître les explications, les justifications et les raisonnements que font vos élèves. Si vous le souhaitez, nous serons donc ravis de recevoir vos idées et vos réflexions.

Vous pouvez ajouter à votre envoi toutes les informations concernant la manière (ou les manières) dont vous avez choisi de poser le problème, des travaux d'élèves et même des photos montrant vos petits chercheurs en action. Envoyez vos résultats en indiquant votre nom, le niveau de votre classe, ainsi que les coordonnées de votre établissement à l'adresse suivante : mathecole@ssrdm.ch

Avec votre accord, quelques-uns de vos envois seront publiés dans un numéro ultérieur de la revue Math-Ecole. Vos noms et coordonnées d'établissement seront bien entendu indiqués dans l'article correspondant.

La course - un problème ouvert à l'école primaire

Daniela Sauca & Yasmine Nassouh

Étudiantes, Université de Genève

Les moyens d'enseignement romands proposent un module spécifique aux problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement. Parmi les activités de ce module, on retrouve principalement des problèmes ouverts spécifiques à l'élaboration d'une démarche scientifique (Arsac et Mante 2007). Suivant les degrés ou les objectifs d'enseignement, les situations problèmes (Charnay 1992) qui, en plus de travailler un concept mathématique, peuvent aussi cibler la démarche scientifique, sont aussi présentes. C'est ainsi que nous sommes arrivées à choisir le problème « La course » (voir annexes 1 et 2) issu des moyens d'enseignement suisses romands (Gung, Sauthier, Stierli 1996) pour une classe de 3P Harmos[1].

Le problème ouvert propose peu de consignes. Les élèves doivent se débrouiller pour le résoudre en faisant appel à leurs propres ressources. Comme la classe dans laquelle nous sommes intervenues n'avait pas encore d'expérience dans la résolution des problèmes, nous étions curieuses d'observer comment se débrouilleraient les élèves face à cette nouvelle situation. Nous nous penchons donc sur la question des stratégies auxquelles les élèves font appel pour trouver la bonne réponse. C'est autour de cette question de stratégies mises en place que nous avons construit notre problématique : comment réagissent des élèves inexpérimentés face au problème ouvert ? Cependant, la mise en œuvre de l'activité en classe ne s'est pas déroulée comme prévu. Nous n'avons donc pas pu observer des stratégies qui nous permettent d'apporter des éléments de réponse à notre problématique. Nous avons donc choisi de la modifier : quels effets ont les interactions entre l'enseignante et les élèves sur les difficultés présentées par ces derniers ? Quand intervient-elle et quel est l'impact sur les procédures des élèves ? Nous allons néanmoins vous présenter notre analyse à priori, la manière dont les résultats ont été biaisés et nos observations autour de la nouvelle problématique.

Analyse a priori

Compétences pré-requises

Afin de réussir ce problème ouvert, les élèves ne nécessitent pas de connaissances pré-requises particulières liées aux concepts mathématiques (addition, connaissances géométriques…). Ils ont néanmoins implicitement besoin d'être capables d'interpréter des images (comprendre ce qu'implique l'ordre des personnages, faire le lien entre leurs noms et les emblèmes sur leurs drapeaux…). Aussi, allons-nous parler de compétences, définies dans le PER par :

> *Possibilité, pour un individu, de mobiliser un ensemble intégré de ressources en vue d'exercer efficacement une activité considérée généralement comme complexe*[2].

Concernant le problème « La course », il existe tout de même certaines compétences que les élèves doivent maîtriser avant de l'aborder. Pour commencer, ils doivent maîtriser la compréhension de mots simples afin de pouvoir évoluer dans la tâche. Ils doivent ensuite être capables de comprendre ce qu'implique chacun des énoncés par rapport à la résolution du problème (la lecture des trois énoncés permet de trouver l'image correcte parmi les trois propositions). S'ils commencent l'apprentissage de la lecture, en deuxième partie d'année scolaire, ils savent reconnaître des mots comme : juste avant.

La résolution du problème

Pour résoudre ce problème, dans un premier temps, il faut lire chaque énoncé et interpréter les images. Le premier énoncé annonce que Victoric est arrivé juste avant Jossic. La première image peut être éliminée car Gwenola est entre Victoric et Jos-

1 *Élèves de 6-7 ans.*

2 http://www.plandetudes.ch/web/guest/pg2-lexique

sic. Il reste les images 2 et 3. Le deuxième énoncé annonce que Zolda est arrivé juste avant Victoric. L'image 3 ne correspond pas à l'énoncé car le Zolda est le dernier, ce qui implique qu'elle peut être éliminée. Il ne reste plus que l'image 2. Le troisième énoncé la confirme : Gwenola arrive juste avant Zolda. Le gagnant de la course s'appelle donc Gwenola. Le problème peut ainsi être résolu. Deux mouvements sont essentiels : premièrement, comprendre les énoncés proposés, secondement, les mettre en lien avec les images proposées.

La résolution du problème proposée ici présente la stratégie optimale : l'élimination. Il existe d'autres stratégies de résolutions que nous avons envisagées pour les élèves.

Étude des variables didactiques

Notre objectif est de recueillir les différentes stratégies utilisées par les élèves pour arriver à résoudre le problème « La course ». Nous avons donc choisi certaines variables didactiques qui pourraient avoir un impact sur la résolution des élèves.

Prise de repère :

Chaque énoncé proposé commence par un prénom différent. Nous avons décidé de conserver l'énoncé initial.

Compréhension du vocabulaire :

Dans les énoncés les personnages sont situés les uns par rapport aux autres avec uniquement le qualificatif « juste avant », alterner « juste avant » et « juste après » apporterait une difficulté qui nous semble intéressante car elle concerne l'interprétation des énoncés.

Organisation sociale :

Nous avons choisi d'alterner les moments de travail individuel et en groupe. Nous souhaitons que les élèves soient seuls devant l'exercice, et en groupe afin de pouvoir recueillir leurs stratégies et leur permettre de travailler avec leurs camarades. En effet, les élèves en difficulté pourraient trouver de l'aide précieuse plutôt que rester bloqués devant le problème.

L'appui de l'enseignante :

L'enseignante n'apporte aucune aide aux élèves. Son intervention se limite à l'explication du problème. Nous souhaitons que les élèves se débrouillent seuls. Nous craignons que les stratégies ne soient biaisées par l'aide apportée par leur enseignante.

A l'issue de l'étude des variables didactiques, nous avons conçu un nouvel énoncé présenté en annexe 3. C'est ce dernier énoncé qui est utilisé pour la suite de l'analyse.

Stratégies des élèves

Comme nous sommes initialement intéressées par les stratégies utilisées par les élèves pour résoudre le problème, nous en listons quelques-unes. Elles nous servent d'indicateurs, étant donné que nous souhaitons voir ce que les élèves utilisent lorsqu'ils sont livrés à un tel exercice. Nous n'avons pas pour objectif de les diriger vers la stratégie optimale. Néanmoins, il nous semble nécessaire de citer la stratégie d'élimination, présentée précédemment, lors de la mise en commun pour consolider une stratégie parmi toutes celles – plus ou moins valables – qui peuvent sortir de cette expérimentation.

Stratégies efficaces :

- Stratégie d'élimination : Le premier énoncé annonce que Jossic est arrivé juste après Victoric. La première image peut être éliminée car Gwenola est entre Victoric et Jossic. Il reste les images 2 et 3. Le deuxième énoncé annonce que Zolda est arrivé juste avant Victoric. L'image 3 ne correspond pas à l'énoncé car le Zolda est le dernier, ce qui implique qu'elle peut être éliminée. Il ne reste plus que l'image 2. Le troisième énoncé la confirme : Gwenola arrive juste avant Zolda. Le gagnant de la course s'appelle donc Gwenola.
- Stratégie d'association : Le premier énoncé annonce que Jossic est arrivé juste après Victoric. Il est possible de relier l'énoncé aux images 2 et 3 (ou de faire un signe qui fasse le lien entre l'énoncé et les images correspondantes). Le deuxième énoncé annonce que Zolda est arrivé juste avant Victoric. Les images 1 et 2 peuvent y être reliées. Le troisième énoncé annonce que Gwenola arrive juste avant Zolda. En le reliant à l'image 2, on constate que chaque énoncé est en lien avec cette image-là. On comprend donc

que c'est celle que l'on recherche et que le gagnant s'appelle Gwenola.

Stratégies erronées :

L'élève part dans mauvais sens dans l'interprétation de l'image, il ne comprend pas de quel côté est l'arrivée.

L'élève constate les alternances « juste avant », « juste après », mais ne les applique pas correctement lors de l'identification des images correspondantes. Il ferait des liens erronés.

L'élève tente de deviner l'image correspondante et propose une réponse aléatoire.

Déroulement prévu de l'activité

Le déroulement de l'activité est prévu en cinq étapes : dans un premier temps, l'enseignante donne la consigne de la tâche. Dans un deuxième temps, elle laisse les élèves travailler seuls pendant une dizaine de minutes, temps qu'elle utilise à les observer pour les mettre ensuite en groupe, en fonction des stratégies qu'ils utilisent. Dans un troisième temps, les élèves se regroupent selon les critères de l'enseignante et mettent en commun leur méthode de résolution. L'enseignante possède une grille créée par nos soins pour recueillir les informations fournies par les élèves pendant les interrogations des différents groupes : comment procèdent-ils pour la compréhension du problème et comment font-ils les liens entre les énoncés et les photos ? Dans un quatrième temps, l'enseignante rassemble les élèves sur les petits bancs pour faire un résumé des stratégies de chacun et les vérifier.

Context d'observation

L'expérimentation a lieu en milieu d'année dans une classe de 3P Harmos composée de 20 élèves. Leur niveau en mathématiques est hétérogène et trois élèves sont ceux que l'enseignante appelle « chronogènes » : ils ont beaucoup de facilité et font généralement avancer le savoir durant les leçons. Nous savons que nous pouvons nous appuyer sur eux pour aider certains élèves à trouver une stratégie qui fonctionne avant et pendant les mises en commun prévues.

L'analyse du déroulement de l'activité s'appuie sur un enregistrement audio de la séance. Au total, l'activité a duré 45 minutes, soit une période.

Avant de proposer ce problème, l'enseignante a reçu une copie de notre analyse a priori, afin qu'elle connaisse nos objectifs. Elle n'a posé aucune question supplémentaire, convenant que les informations reçues lui suffisaient.

Analyse a posteriori

Déroulement effectif de l'activité

L'activité ne s'est pas déroulée comme nous l'avions prévu. L'enseignante a réagi en fonction de sa classe et a modifié la présentation de la consigne en proposant à ses élèves le scenario de la résolution du problème. Quatre élèves tiennent le rôle des participants de la course et se placent les uns derrière les autres à fur et à mesure que l'enseignante lit la consigne. La configuration finale est réalisée par les élèves. La solution est à ce moment visible par tous les élèves, et pourtant il n'en parait rien. Cette théâtralisation n'évite pas les difficultés au cours de la résolution. Lors du moment de travail individuel, beaucoup d'élèves manquent d'autonomie. L'enseignante se retrouve rapidement avec de nombreuses demandes simultanées liées à la compréhension des énoncés. Les élèves ont de la peine à relire chaque phrase, ce qui les bloque dans leur travail. Face à cette situation imprévue, l'enseignante rassemble les élèves sur les bancs pour indiquer la stratégie de l'élimination comme « possible » pour résoudre le problème. De retour à leur place, les élèves bloquent à nouveau devant l'obstacle des informations à gérer et des lectures des énoncés. En fin de période, l'enseignante rassemble une nouvelle fois ses élèves et fait une mise en commun en demandant aux élèves de proposer leurs stratégies pour trouver la bonne réponse. Elle se base sur les élèves chronogènes pour mettre en avant la stratégie d'élimination.

Retour sur des variables choisies et de leurs valeurs

La première variable didactique que nous avions choisi de traiter (prise de repère avec un prénom différent à chaque phrase) surcharge en informations les élèves et cette perturbation ne leur permet pas d'avancer comme nous le pensions. Certains utilisent des couleurs pour s'aider (annexe 4), mais d'autres stoppent leur recherche.

La deuxième variable didactique concernait la compréhension du vocabulaire et a également contribué à la surcharge d'informations que certains élèves ne gèrent pas.

L'organisation sociale alternant le travail collectif et le travail individuel n'a pas l'effet souhaité. De par l'organisation spatiale de la classe (les élèves sont regroupés par 4), ils ne travaillent pas seuls, mais en groupe. Nous trouvons cela intéressant. En effet, si le problème avait été à leur portée, ils auraient travaillé seuls, sans problème. Or, ils expriment leur besoin d'aide en se regroupant pour travailler.

Enfin, les élèves ne peuvent pas se concentrer sur le développement de leurs propres stratégies tant qu'ils ne sont pas au clair sur la manière de résoudre ce problème. Ainsi, l'enseignante doit soutenir cette compréhension et se trouve impliquée dans la résolution.

Difficultés des élèves

Pendant la résolution individuelle de la tâche, ni nous, ni l'enseignante n'avons anticipé la difficulté de compréhension et le manque d'autonomie des élèves. L'enseignante se retrouve à devoir répondre à plusieurs demandes d'aide à la fois. Sa réaction est d'y répondre au cas par cas, à la manière d'un tutorat. Si cette méthode aide certains élèves, d'autres reviennent régulièrement demander de l'aide. Nous interprétons cette sollicitation, malgré la consigne de travailler seul, comme une difficulté tant chez un grand nombre d'élèves que chez l'enseignante qui n'arrive pas à accorder le temps et l'énergie nécessaires à chacun. Dans notre situation, au cours de la présentation du problème, l'enseignante a dû déceler chez certains élèves un manque de compréhension. Elle a donc dû décider de faire vivre la course pour aider les élèves à mieux se la visualiser. Cependant, nous ne sommes pas sûres que cela les aide vraiment. On déduit de cette interaction que les effets visés ne correspondent pas toujours à ceux que les enseignants peuvent avoir pensé. Ici, la résolution vivante du problème ne permet pas à la classe de réfléchir de manière autonome à une stratégie de résolution.

Une nouvelle problématique

La question de notre recherche visait les stratégies des élèves : quelles stratégies développent-ils pour résoudre un problème ouvert comme « La course ? » Nous constatons, en analysant la séquence d'enseignement, que, lors du moment collectif final, toutes les stratégies ne sont pas mises en avant. Quelques-unes sont exprimées, mais elles ne suffisent pas à dresser un portrait schématique de la capacité des élèves à résoudre ce problème. Notre analyse se détourne donc de cette problématique initiale pour aller à l'encontre d'une nouvelle : quels effets ont les interactions entre l'enseignante et les élèves sur les difficultés présentées par ces derniers ? Quand intervient-elle et quel est l'impact sur les procédures des élèves ?

Nous l'avons relevé précédemment, l'enseignante multiplie ses interventions avec le groupe-classe, par opposition à notre scénario qui n'en avait prévu qu'une seule. Cela nous amène à réfléchir sur l'impact des interventions au sein d'un groupe d'élèves et celles entre les élèves et leur enseignante. Nous avons observé que les élèves entre eux ne s'aident pas beaucoup. En effet, même s'ils travaillent ensemble (la configuration des pupitres les amène à discuter par groupe), ils n'avancent pas, ou alors recopient ce que leur voisin fait. Par contre, lorsque l'enseignante les prend en groupe collectif, les réactions sont tout autres : ils écoutent et participent à la réflexion générale. Les élèves chronogènes apportent des informations qui permettent à l'enseignante de mettre en avant les stratégies de résolution et les autres élèves alimentent la discussion du groupe-classe en apportant leurs propres arguments. Par exemple, ceux-ci permettent de mettre en avant une stratégie erronée (un énoncé ne correspond qu'à une seule image) et l'enseignante peut mettre en garde ses élèves pour qu'ils ne tombent pas dans ce piègelà. La discussion en classe a permis de mettre en place l'idée de stratégie (même si elle n'a pas été nommée explicitement).

Cette expérience nous permet de comprendre que, pour résoudre un problème, les élèves doivent savoir décoder les consignes écrites mais aussi avoir une certaine habitude de résoudre des problèmes en cherchant. Dans cette classe, ils découvrent les problèmes et n'ont donc pas su se mettre dans la tâche. Des devinettes, proposées régulièrement, permettraient de développer l'esprit de recherche : vouloir trouver une réponse à une question difficile ne se propose pas à la volée, mais se prépare. Cet apprentissage se met en place progressivement. Nous éviterons ainsi une situation trop compliquée aux élèves et leur abandon face à la tâche. « La course » est un problème ouvert qui offre peu d'éléments de résolution. Le rôle de l'enseignant est essentiel dans le processus de recherche des élèves par les relances à leur donner pour leur permettre d'évoluer dans leurs procédures par exemple.

Conclusion

L'activité n'a pas été menée ainsi que nous l'entendions. Notre problématique de départ a donc été modifiée au cours de notre analyse a posteriori : les stratégies que nous voulions initialement analyser nous ont finalement permis de mettre en évidence les difficultés rencontrées par les élèves. Les difficultés principales relevées durant la tâche sont les suivantes : la compréhension du problème, la lecture et l'interprétation de l'énoncé, les liens entre les personnages des énoncés et des images, le choix d'une stratégie efficace et l'autonomie des élèves pendant la tâche. Ce travail nous a permis de mettre en avant la nécessité de la diversification des interactions entre l'enseignante et ses élèves. Les interactions des élèves entre eux n'ont pas été des plus constructives.

Ce travail nous a appris beaucoup d'éléments importants. Tout d'abord, une planification, aussi structurée et préparée soit-elle, peut être chamboulée à tout moment. Chaque classe réagit d'une manière bien différente et il est fort probable que notre activité fonctionne dans une autre classe. Ensuite, nous avons constaté à quel point, en tant que chercheur, nous devons faire preuve de flexibilité. Il est important d'être prêt à voir ses hypothèses mises entre parenthèses, voire annulées. Enfin, avant de proposer un problème ouvert à sa classe, il est important d'avoir soi-même (en tant qu'enseignant) compris les enjeux de cette tâche. L'importance de laisser ses élèves se débrouiller doit dépasser notre envie de leur venir en aide.

Ceci nous amène à nous faire quelques réflexions : Quelles sont les conditions idéales au niveau des interactions (anticipées, notamment pour la préparation des élèves à ces problèmes) entre l'enseignant et les élèves ? Comment susciter des interactions entre les élèves pour les amener à entrer dans la résolution de problèmes, à trouver des stratégies pour répondre à la question de l'énoncé ? Leur jeune âge ne serait-il pas un obstacle à cette interaction ?

Il serait intéressant de reprendre ce travail et de comparer les réactions d'une classe initiée aux problèmes et d'une classe débutant dans ce domaine. Nous pourrions revoir les variables et déterminer si nous choisissons de les modifier d'une classe à l'autre, pour nous adapter au mieux à chaque niveau ou si nous gardons les mêmes pour les deux classes afin d'analyser les interactions entre les élèves et l'enseignant.

Finalement, ce problème ouvert qui n'a pas fonctionné dans le sens que nous voulions, nous propose un grand nombre de questionnements.

Références

Arsac, G. & Mante, R. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : CRDP

Charnay, R. (1992). Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N* 51, 77-83.

Ging, E., Sauthier, M.-H. & Stierle, E. (1996). *Mathématiques 1P (Fichier de l'élève)*. Neuchâtel : COROME.

Annexe 1 – Enoncé initial

La course

Quatre gnomes font une course.
Parmi les trois photos d'arrivée de la course, une seule correspond aux affirmations suivantes :

1 - Victoric est arrivé juste avant Jossic

2 - Zolda est arrivé juste avant Victoric

3 - Gwenola est arrivé juste avant Zolda

Le gnome qui est le premier sur cette photo a gagné la course.

Comment s'appelle-t-il?

Annexe 3 – Nouvel énoncé

La course

Quatre gnomes font une course.
Parmi les trois photos d'arrivée de la course, une seule correspond aux affirmations suivantes

1 - Jossic est arrivé juste après Victoric

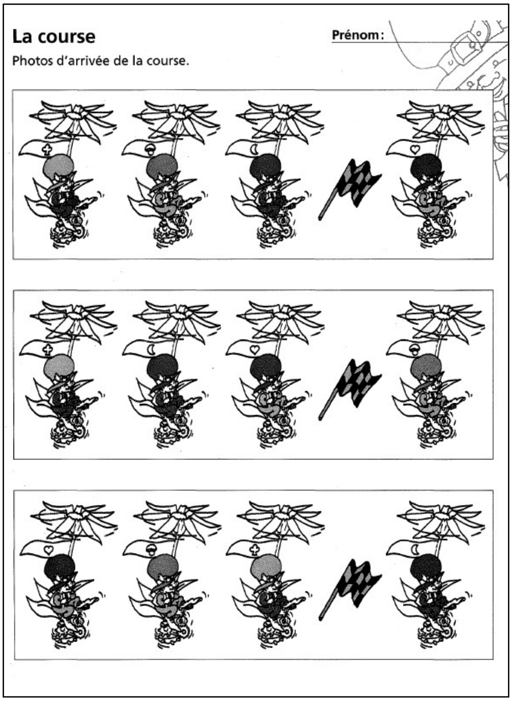
2 - Zolda est arrivé juste avant Victoric

3 - Gwenola est arrivé juste avant Zolda

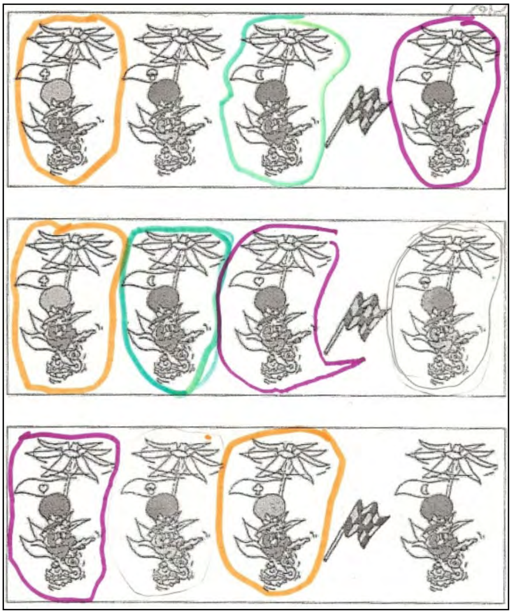
Le gnome qui a dépassé le drapeau d'arrivée a gagnée la course.

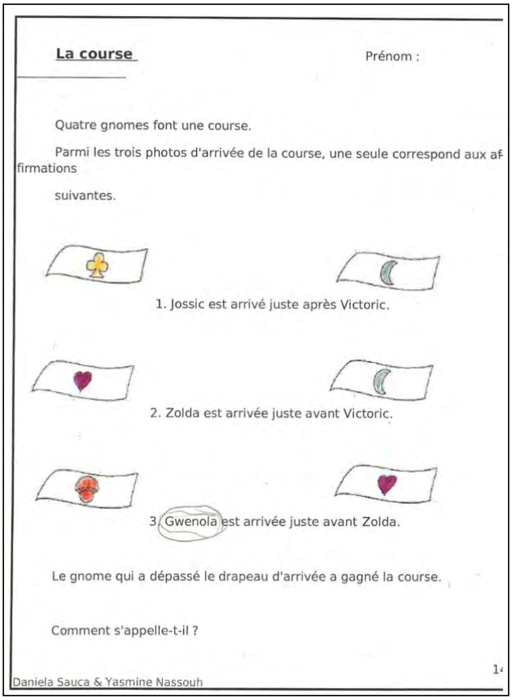
Comment s'appelle-t-il?

Annexe 2 – Image d'accompagnement



Annexe 4 – Production élève





La course

Prénom :

Quatre gnomes font une course.

Parmi les trois photos d'arrivée de la course, une seule correspond aux affirmations suivantes.

1. Jossic est arrivé juste après Victoric.

2. Zolda est arrivée juste avant Victoric.

3. Gwenola est arrivée juste avant Zolda.

Le gnome qui a dépassé le drapeau d'arrivée a gagné la course.

Comment s'appelle-t-il ?

Daniela Sauca & Yasmine Nassouh

Sommes de carrés et d'inverse pour «petits» et «grands»

Christian Aebi

C.O. de la Gradelle & Collège Calvin, Genève

En hommage à Nicolas Rouche, grand maître de l'écoute, de la pédagogie et de la mathématique, ayant toujours défendu une approche à large spectre de l'enseignement de cette dernière.

Introduction

L'arithmétique est certainement le seul domaine mathématique dans lequel un jeune élève peut comprendre, tester et s'émerveiller devant des conjectures dont la démonstration demeure momentanément encore hors de portée de la connaissance humaine. Citons trois exemples célèbres : le problème 3n+1, l'existence d'une infinité de premiers jumeaux et la conjecture de Goldbach.

Je me propose ici d'exposer une expérience pédagogique portant sur les sommes de carrés et d'inverses. Bien souvent il suffit de partir d'un exercice classique, puis d'effectuer une légère perturbation sur les hypothèses de départ pour faire apparaître un problème défiant les experts actuels en théorie des nombres. Une de mes plus grandes joies dans mon métier d'enseignant consiste justement à montrer à mes élèves que nos préoccupations mathématiques sont très proches de celles des chercheurs d'aujourd'hui, que la grande quête à démystifier l'inconnu ne cesse de gagner du terrain et qu'ils pourront peut-être, qui sait, un jour y contribuer.

Une activité arithmétique pour secondaire I et II

Rien de tel que de soumettre à des élèves de 11e année (14-15 ans) un problème d'arithmétique comme ci-dessous, en apparence très innocent[1], pour susciter leur curiosité et les amener à se questionner sur les généralisations possibles.

> **Question 1.** Est-il vrai que la somme des carrés des entiers de même parité compris strictement entre deux multiples de 5 consécutifs est encore un multiple de 5 ?

Souvent, il leur faut quelques minutes pour bien comprendre la question, maîtriser le vocabulaire en jeu, comme « parité », voire même « somme ». Mais ensuite, un peu d'expérimentation les convainc rapidement qu'il semble que la réponse soit affirmative. Deux types de preuves peuvent être trouvées :

a) Observer les résultats pour les nombres plus petits que 10 : $1^2+3^2 = 10$; $2^2+4^2 = 20$; $6^2+8^2 = 100$ et $7^2+9^2 = 120$. Puis, l'algorithme de multiplication implique que pour deux entiers supérieurs ou égaux à 10 la somme de leurs carrés est divisible même par 10.

b) Sinon, une preuve classique consiste à regarder les nombres en question « modulo 5 » :

$(5n+1)^2+(5n+3)^2$

$= 50n^2+40n+10$

$= 5(10n^2+8n+2) \in M_5$

et

$(5n+2)^2+(5n+4)^2$

$= 50n^2+60n+20$

$= 5(10n^2+12n+4) \in M_5$

A la leçon suivante, je n'ai pu m'empêcher de leur proposer une petite extension :

> **Question 2.** Est-il vrai que la somme des carrés des entiers de même parité compris strictement entre deux multiples de 7 consécutifs est encore un multiple de 7 ?

Cette fois-ci, je leur ai demandé d'obtenir une réponse sans mon aide et évidemment de prouver leur conjecture. A ma grande satisfaction, tout le monde a investi rapidement la recherche et un tout petit nombre est même arrivé jusqu'au bout. Par ailleurs, l'approche « modulo 7 » semble indispensable. A force de développer des expres-

1 *Car ne nécessitant essentiellement que l'identité* $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

sions comme ci-dessous

$$(7n+1)^2+(7n+3)^2+(7n+5)^2$$

les élèves réalisent peu à peu que la réponse ne dépend que de $1^2+3^2+5^2$ dans ce cas, puisque tous les autres termes sont des multiples de 7. Impossible alors de ne pas leur dire de se comporter comme « de vrais mathématiciens en herbe » en généralisant leur conjecture : *Est-il vrai que la somme des carrés des entiers de même parité compris strictement entre deux multiples de 9 consécutifs est encore un multiple de 9 ?* Et là, déception dès le premier essai $1^2+3^2+5^2+7^2 = 84 \notin M_9$. Mais, comme le résultat est vrai pour 5 et 7, des nombres premiers et que 9 est composé, l'on peut encore espérer que pour 11, voire même 13, la propriété de divisibilité se remanifeste. Et en un rien de temps, le simple calcul

$1^2+3^2+5^2+7^2+9^2 = 165 = 11\text{x}15$

$2^2+4^2+6^2+8^2+10^2 = 220 = 11\text{x}20$

permet de s'en assurer. A mon plus grand regret, je n'ai pu aller plus loin avec les élèves du C.O., qui en sont restés provisoirement sur leur faim, en s'imaginant que le résultat n'est vrai que pour des premiers > 3.

J'ai donc poursuivi la recherche avec mes élèves de 3e année du gymnase qui avaient déjà démontré par récurrence en début d'année scolaire l'identité,

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \quad (1)$$

Je n'ai pas hésité à leur faire part du résultat obtenu par mes 11e, afin de leur soumettre directement la question :

> **Question 3.** Quels sont les entiers impairs n qui divisent chacune des sommes $1^2+3^2+5^2+...+(n-2)^2$ et $2^2+4^2+6^2+...+(n-1)^2$?

Rapidement, à l'aide de leur calculatrice, ils ont obtenu la conjecture : *n ne doit pas être un multiple de 3*. Malgré le fait d'avoir étudié la formule (1), ils ont mis du temps pour factoriser la deuxième somme par 2^2 et à la réduire correctement. Malheureusement, il me semble que le fait d'avoir très peu exercé l'arithmétique de base dans leur cursus scolaire leur rend la tâche difficile et j'ai dû me résoudre à leur présenter un argument qui se résume ainsi :

Démonstration. La seconde équivalence peut s'écrire sous la forme :

$$4 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (\tfrac{n-1}{2})^2) = \tfrac{1}{6}(n-1)(n+1)n.$$

Or, ces trois derniers facteurs sont premiers entre eux. Alors pour que n divise le produit, il est nécessaire et suffisant que (6,n) = 1 , c'est-à-dire dans ce cas que $3 \nmid n$. D'autre part, si l'on soustrait à

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

la somme

$$\sum_{i=1}^{(n-1)/2} (2i)^2$$

l'on obtient alors

$$\sum_{i=1}^{(n-1)/2} (2i-1)^2$$

qui se factorise en l'expression

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

De manière similaire, les trois derniers facteurs étant premiers entre eux, on obtient la même conclusion. ◊

Variation et prolongement

Un problème en apparence élémentaire et un peu du même type que celui précédemment présenté consiste à considérer un entier naturel n>1 et à observer le numérateur de la fraction irréductible de la somme des inverses des entiers de 1 à n-1.

> **Question 4.** Quels sont les entiers naturels n qui divisent le numérateur de la fraction irréductible ci-dessous ?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

En calculant à la main l'on voit aisément :

(1) pour n = 3, on a $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ Oui !

(2) pour n = 4, on a $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ Non

(3) pour n = 5, on a $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$ Oui !

(4) pour n = 6, on a $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$ Non

(5) pour n = 7, on a

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{49}{20}$ Oui !

Si l'on manque de patience alors à l'aide d'une calculatrice programmable ou d'un logiciel de mathématique il est facile d'obtenir les entiers inférieurs à 100 qui vérifient la propriété de divisibilité : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. De prime abord, une réponse semble évidente :

Lemme 1. Si p ≥ 3 est premier alors le numérateur de

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i}$$

est divisible par p.

Démonstration.

Comme dans la preuve obtenue certainement par Gauss, concernant la somme d'entiers consécutifs, il suffit d'utiliser la « symétrie centrale du calcul » pour faire apparaître la propriété recherchée.

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{(p-1)/2}\frac{1}{i}+\frac{1}{p-i}=p\sum_{i=1}^{(p-1)/2}\frac{1}{i(p-i)}$$

Le dénominateur commun de la dernière somme ne contient que des nombres premiers < p dans sa décomposition en facteurs premiers. Il ne peut donc y avoir de simplification possible avec le facteur p devant la somme. ◊

Une autre propriété élémentaire que l'on peut aisément prouver concerne les nombres pairs.

Lemme 2. Si n est pair alors il ne peut diviser le numérateur de

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i}$$

Démonstration. Voici encore un argument classique : considérer la plus grande puissance de 2 parmi les dénominateurs, que l'on notera 2^m. Il va de soi qu'il ne peut y en avoir qu'une seule. Lorsqu'on met toute la somme au même dénominateur, il n'y a que des numérateurs pairs à l'exception du numérateur de $\frac{1}{2^m}$ qui est impair.

La somme des numérateurs est donc forcément impaire. ◊

Les deux preuves ci-dessus peuvent être exposées aisément aux élèves du C.O. à condition de faire comme l'aurait suggéré Nicolas Rouche, en effectuant des preuves paradigmatiques[2].

Si l'on observe plus précisément les numérateurs du lemme alors l'on constate qu'à partir de p = 5 la divisibilité est même par p^2. Ce résultat est un grand classique de la théorie des nombres. La preuve donnée ci-dessous, qui démarre exactement de la même manière que dans celle du lemme, utilise le fait que la fonction inv : $x \to x^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}^*_p$, que

$$\frac{1}{k^2}\equiv\frac{1}{(p-k)^2}(mod\ p)$$

et se termine en appliquant (1).

Théorème (de Wolstenholme, 1862). Si p > 3 est premier alors le numérateur de

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i}$$

est divisible par p^2.

Démonstration.

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{(p-1)/2}\frac{1}{i}+\frac{1}{p-i}\equiv(-p)\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{i^2}\equiv\frac{(-p)}{2}\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i^2}$$

$$\equiv\frac{(-p)}{2}\sum_{j=1}^{p-1}j^2\equiv\frac{-1}{12}(p-1)p^2(2p-1)$$

◊

Pour amener les élèves sur le terrain de la recherche actuelle, il suffit de poser la question de la réciproque du lemme ou du théorème précédent. En fait, si l'on se base sur les résultats que fournit un logiciel tel que Mathematica ou Maple il est même très tentant d'affirmer :

Conjecture 1. Si n est un entier composé alors le numérateur de

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

n'est pas divisible par n.

ou d'une manière moins risquée :

Conjecture 2. Si n est un entier composé alors le numérateur de

2 Illustrer le mécanisme général sous-jacent sur un ou des exemples particuliers.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

n'est pas divisible par n^2.

Le plus petit contre-exemple que j'ai obtenu à la conjecture 1 est 283'686'649, qui n'est autre que le carré du nombre premier p=16843. Ce dernier a été identifié lors de la recherche de nombres premiers irréguliers (Johnson 1975). Une propriété qui le caractérise est qu'il est le plus petit nombre premier qui divise le numérateur du nombre de Bernoulli B_{p-3}. Le lien avec les sommes harmoniques a été explicité par Gardiner (1988). En revanche, je n'ai aucune idée s'il existe un plus petit contre-exemple.

Concernant la deuxième conjecture, après avoir passé plusieurs semaines à m'échiner dessus, je me suis permis d'envoyer un e-mail au Prof. Richard Guy, en lui demandant son avis sur la question. Moins de trois jours après il me répondait : « I'd like to know the answers myself ! » tout en transférant mon message à Richard McIntosh, autre grand spécialiste en la matière. Ce dernier m'a surtout souhaité bien du courage à poursuivre l'exploration, en me signalant les derniers articles parus à ce sujet.

Références

Gardiner A. (1988). Four problems on prime power divisibility, *Amer. Math.* Monthly 95, no. 10, 926–931.

McIntosh, R. J. (1995). On the converse of Wolstenholme's theorem, *Acta Arithmetica* 71 (4): 381-389

Johnson W. (1975). Irregular Primes and Cyclotomic Invariants, *Mathematics of Computation,* Vol. 29, Number 129, (1975), 113–120

Math-École, pour ceux qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques !

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences.

Les articles doivent parvenir en version électronique, par email adressé à la rédaction (mathecole@ssrdm.ch). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Contact : mathecole@ssrdm.ch

Site internet :

http://www.mathecole.ch

Pour commander des numéros de Math-Ecole vous pouvez adresser vos demandes à mathecole@ssrdm.ch ou utiliser le formulaire de commande disponible sur le site.

- CHF 5.- le numéro 218
- CHF 10.- le numéro 222

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 50 depuis la rubrique *Consultation en ligne*.

Couverture

Détail d'un oeuf géométrique pavé réalisé par Alessia, Collège de Delémont.