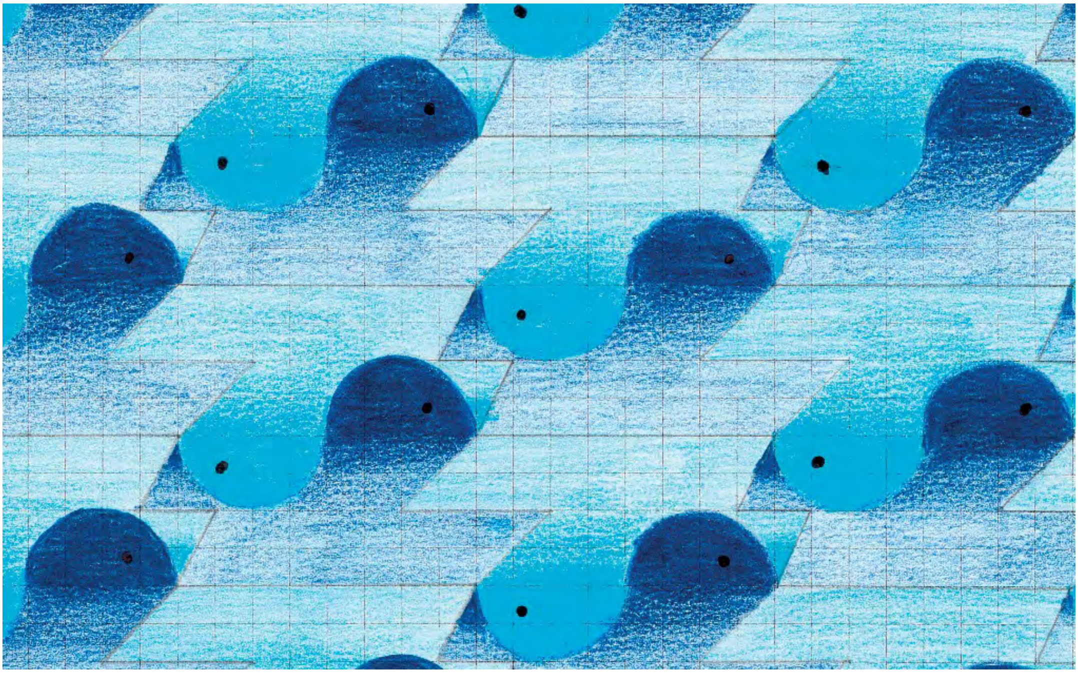
MATH-ÉCOLE

224

Novembre 2015



Math-École (web)
ISSN 2296-715X

MATH-ÉCOLE

224
Novembre 2015

sommaire

Éditorial

Laura Weiss

Université de Genève

Dans un des derniers éditoriaux de Math-École avant l'interruption de sa publication, François Jaquet comparait notre revue à un petit commerce qui ne peut rivaliser avec les grandes surfaces. Celles-ci sont dans notre domaine tout d'abord internet, mais aussi les revues françaises comme *Science et vie* avec leurs couvertures en papier glacé, ou encore les *Cahiers Pédagogiques* qui publient pour un pays de 50 millions d'habitants. Et Jaquet de conclure : « *une modeste revue comme la nôtre ne peut pas soutenir la concurrence [mais elle] peut survivre à condition d'apporter un 'service après-vente'* ».

Pour ma part, et pour poursuivre la métaphore, je préfère imaginer Math-École comme une épicerie fine qui propose des produits de niche que les hypermarchés n'imaginent même pas pouvoir se procurer. Les produits de notre revue sont d'abord des délicatesses locales, s'appliquant à notre école suisse-romande, produites par des auteurs impliqués sur le terrain, enseignants, formateurs, étudiants et destinées à leurs collègues. Les articles publiés parlent, pour la plupart, de situations vécues en classe ou en formation qui peuvent être reprises, réadaptées, et parfois ré-expérimentées avec succès. Certains autres proposent des réflexion autour de la didactique et de ses applications possibles.

Par exemple, dans ce numéro 224, on peut lire des partages d'expériences à travers un article sur l'analyse par deux étudiants d'une activité de construction de tours avec des boules de couleurs pour les élèves de 1P-2P ; un article sur l'enseignement de l'analyse au collège de Genève. Trois auteurs portent un regard sur la didactique à travers des dispositifs de groupes collaboratif dans l'éllaboration de leçons avec les « Lessons studies » dans le canton de Vaud ; un texte par une didacticienne canadienne sur les apports de la didactique pour les élèves en difficulté ; et une analyse de la pensée des élèves. Une activité pour les tout petits, des approches pour l'enseignement spécialisé et l'enseignement gymnasial, voici donc une belle variété.

A côté de cela, d'autres contributions, dans d'autres registres de communications sont également présentes. J. Serment et T. Dias rapportent leur expérience à Londres où ils ont participé au concours « Science on stage » avec des constructions de solides de grandes dimensions qui ont eu un énorme succès avec un prix à la clé ; R. Kopp et L. Weiss proposent la suite des résultats d'une enquête internationale à laquelle la Suisse a participé sur les pratiques en classe de mathématiques et de sciences.

Enfin un hommage évoque le souvenir de Philippe Depommier, membre du groupe de Didactique des Mathématiques de l'Enseignement Spécialisé (ddmes), brusquement enlevé à l'affection de ses proches. Qu'ils sachent que le comité de rédaction s'associe aussi à leur douleur.

Si la revue Math-Ecole a pu être relancée et qu'elle commence même à avoir un petit stock d'articles d'avance, c'est que – avec des ambitions locales et limitées sans doute – elle s'efforce de remplir un besoin et qu'elle semble petit à petit y arriver.

Difficultés des élèves en mathématiques au primaire : Les apports de la didactique

Jacinthe Giroux

Professeure titulaire, Département d'éducation et formation spécialisées, Université du Québec à Montréal

Ce texte fait suite à une conférence donnée à la HEP de Lausanne dans le cadre d'un cycle de conférences sur la dyscalculie. Il vise à caractériser la contribution de la didactique des mathématiques, dans l'espace francophone, à la compréhension des difficultés d'apprentissage en mathématiques[1] et à esquisser des pistes d'intervention didactique.

L'apport de la didactique des mathématiques, dans l'espace francophone, sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques

La didactique des mathématiques, en particulier la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), se distingue dans le champ des études sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques par sa perspective systémique. Ce qui caractérise la perspective didactique est clairement énoncé par Brousseau, dès 1981, dans l'étude de cas de Gaël, texte emblématique de la didactique des mathématiques :

> *Une approche classique des enfants en difficulté consiste à identifier les erreurs ou les fautes qu'ils commettent et si elles se répètent, à les interpréter comme des anomalies du développement de l'élève, ou comme des carences dans leurs acquisitions auxquelles il convient de remédier parce «qu'elles vont rendre l'enfant incapable à accéder aux mathématiques. [....].* ***L'approche que nous tentons ici est très différente, il s'agit d'agir au niveau des situations d'apprentissage, d'en manipuler les caractéristiques pour obtenir les changements d'attitudes souhaités.*** *(Brousseau, 1981, p.9).*

En bref, la posture didactique sur les difficultés d'apprentissage présente les caractéristiques suivantes :

- Les difficultés d'apprentissage ne sont pas considérées sous l'angle strict de dysfonctionnements propres à l'élève.
- Le contexte, les caractéristiques de la situation dans lesquels se font les mathématiques sont pris en compte dans l'analyse des difficultés.
- L'évaluation ou l'enseignement sont construits en tenant compte de la spécificité du savoir et du niveau scolaire des élèves.

Les recherches en didactique des mathématiques sur les difficultés d'apprentissage forment deux grandes catégories. La première regroupe les études qui visent la caractérisation des phénomènes didactiques en contexte d'adaptation scolaire. La seconde catégorie regroupe les études qui portent sur la mise à l'épreuve des situations d'enseignement. Nous rapportons, dans ce qui suit, quelques résultats de ces deux catégories de recherche.

Les phénomènes didactiques spécifiques en adaptation scolaire

Partons d'un exemple tiré d'une leçon de mathématiques d'une classe d'adaptation scolaire d'élèves de 7-8 ans. Cet exemple sera utile pour dégager les principaux phénomènes didactiques et mettre en évidence le poids du savoir sur les interactions didactiques. Dans cette leçon, les élèves doivent remplir une fiche tirée d'un manuel scolaire, présentée à la figure 1. Cette fiche implique un saut de stratégies très important qui échappe cependant à l'analyse de l'enseignante. Pour les exercices a à c, il suffit de dénombrer les points déjà inscrits, d'en ajouter d'autres, et de dénombrer à nouveau la collection pour s'assurer qu'elle contient le nombre de points qui correspond au nombre inscrit sur la locomotive. Le dénombrement est alors suffisant pour former la collection de points désirée. Cette première stratégie est bien celle qui est mise en

[1] Pour une synthèse plus exhaustive, on peut se référer à Giroux (2014).

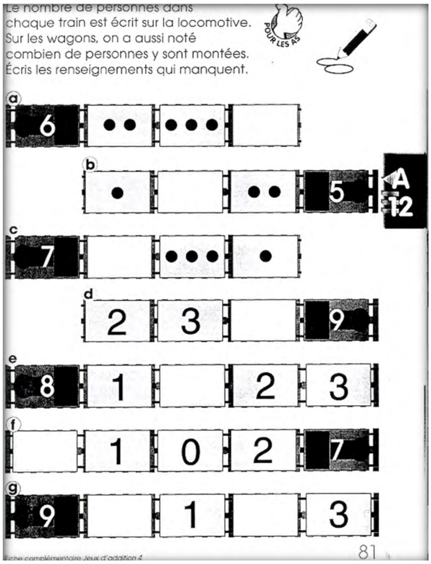


Figure 1

Fiche mathématique à compléter dans une classe d'adaptation scolaire d'élèves de 7-8 ans.

œuvre par les élèves. Confrontés aux exercices d à g, qui impliquent des nombres, ils éprouvent toutefois des difficultés car leur stratégie n'est alors plus efficace. La résolution de ces exercices implique des stratégies, et donc des connaissances, beaucoup plus évoluées sur l'addition et la suite numérique. Nous illustrons cette stratégie en nous appuyant sur l'exercice d. Il faut d'abord composer additivement 2 et 3 et, par stratégie de comptage, identifier ce qu'il manque à 5 pour obtenir 9 : 5 à 6 (1), 7 (2), 8 (3), 9 (4). Le niveau de complexité de cette stratégie est semblable à celui exigé pour compléter des égalités lacunaires de type : 5 + ___ = 9. Pour trouver un terme manquant à une addition, il faut considérer simultanément le tout et une de ses parties, ce qui est conceptuellement difficile puisque cela fait appel à la structure hiérarchique de type partie/tout (Kamii, 1990).

L'enseignante s'impatiente un peu puisqu'elle juge que les élèves n'utilisent plus la stratégie qui a pourtant fonctionné sur d'autres exercices. La confusion est amplifiée du fait que les élèves complètent des suites numériques aux exercices d et e et obtiennent, malgré cette stratégie erronée, des réponses numériques justes (par exemple, en complétant la suite 2, 3, 4 plutôt que 2, 3 et 4 qui font 9). Pour permettre aux élèves de réussir et de boucler l'activité, l'enseignante morcelle le travail de composition. Ce morcellement est visible lors d'une intervention à propos de l'exercice e puisqu'elle prend alors à sa charge une partie du travail. Comme le montre l'extrait suivant, ce sont les deux doigts levés par l'enseignante qui permettent à l'élève d'identifier le nombre recherché plus que la stratégie de comptage qu'elle cherche à lui exposer.

Enseignante : Il faut qu'il y en ait 8. On en a 3 + 2, ça fait 5, + 1 ça fait 6 ... plus quoi, pour faire 8 ? 6, …. 7, 8 ... je viens de te le montrer, 1,2,3 (rapide) 4, 5,… 6,… 7,… 8 (en levant 2 doigts).
Élève : 2.
Enseignante: BON !

Cet exemple montre l'écart entre la stratégie attendue par l'enseignante et celle mise en œuvre par les élèves, la confusion dans l'échange à propos du savoir en jeu et l'absence de moyens didactiques pour faire progresser les élèves. Le fait que les situations d'enseignement sont souvent peu spécifiques du savoir visé, et ce à l'insu des enseignants, est largement documenté. L'acception et la définition de ce phénomène diffèrent cependant selon la théorie convoquée. Par exemple, c'est depuis la théorie de l'anthropo-didactique que Roiné (2009) met en évidence comment l'idéologie psychologisante, institutionnellement imposée aux enseignants, les rendrait aveugles aux propriétés didactiques pouvant être à l'origine des erreurs des élèves. Cette idéologie conforterait l'idée que les difficultés ne relèvent que des caractéristiques cognitives des élèves.

Si les situations ne présentent pas les caractéristiques propres à rencontrer le savoir visé, on ne peut pas s'étonner que les enseignants développent des stratégies d'enseignement compensatoires qui produisent des interactions ralentissant le temps didactique. C'est le cas notamment du morcellement de savoir et de l'algorithmisation rapide qui visent à outiller les élèves de techniques leur permettant de produire des réponses justes (René de Cotret et Giroux, 2003 ; Salin, 2007). De plus, ces stratégies sont considérées comme économiques en terme de temps d'enseignement. Les études montrent cependant que les connaissances acquises dans un tel cadre n'ont souvent qu'un caractère local et ne sont pas utiles dans des situations différentes (Lemoyne et Lessard, 2003). La question du temps d'enseignement étant très sensible en adaptation scolaire a donné lieu à plusieurs études sur le rythme d'avancée dans le savoir (Favre, 2004 ; Toullec-Théry et Marlot, 2013). L'ensemble de ces travaux montre que la progression dans le savoir peut s'y étirer indûment. Ce phénomène est lié, en partie, à la reprise des mêmes contenus (par exemple, les algorithmes d'addition, de soustraction, de multiplication et de division) au détriment d'autres savoirs (par exemple, la géométrie) (Conne, 1999).

Les phénomènes didactiques identifiés éclairent les interactions en adaptation scolaire, mais ils mettent surtout en évidence les contraintes qui pèsent sur les gestes des enseignants. En effet, il nous semble que les actions des enseignants sont commandées par une culture sur les difficultés scolaires et par l'injonction institutionnelle d'adapter l'enseignement aux caractéristiques personnelles et cognitives des élèves. Par ailleurs, les moyens didactiques pour réaliser cette adaptation[2] sont peu diffusés aux enseignants et ne sont pas vraiment relayés, au Québec à tout le moins, dans les orientations ministérielles et les moyens d'enseignement. Comme nous venons de le montrer, si une analyse centrée sur le savoir mathématique est nécessaire, elle n'est cependant pas suffisante pour comprendre les échanges didactiques et remédier aux difficultés que pose l'apprentissage des mathématiques pour certains élèves. C'est dans cette perspective qu'un certain nombre d'études ont mis à l'épreuve des situations d'enseignement construites en fonction des contraintes propres à l'adaptation scolaire.

Des pistes didactiques à étudier pour soutenir l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en adaptation scolaire.

Un résultat souvent rapporté, par les chercheurs qui ont expérimenté des situations d'enseignement en adaptation scolaire, est la difficulté d'obtenir et de maintenir tout au long de la situation un investissement cognitif et mathématique de la part des élèves. Si des facteurs d'ordre motivationnel ou cognitif ont été invoqués pour expliquer ce résultat, nous proposons de le cadrer à partir des théories didactiques pour offrir aux enseignants des pistes de solution.

Selon la théorie des situations didactiques, la situation doit être organisée pour favoriser, dans un premier temps, des interactions fertiles et autonomes entre l'élève et le milieu didactique. Cela n'est possible que si l'élève investit sa rationalité, met en œuvre et finalise une stratégie et si le milieu didactique lui fournit une rétroaction sur la justesse des connaissances qu'il a engagées. L'information que l'élève tire de la rétroaction permet alors de relancer l'interaction, s'il y a échec de la stratégie. Une question qui se pose en adaptation scolaire est : comment soutenir cette interaction sans affecter l'autonomie intellectuelle de l'élève? L'accompagnement de l'élève à s'inscrire dans un processus de mathématisation nous parait essentiel. Pour cela, il faut organiser le milieu pour que la stratégie mise en œuvre soit accompagnée d'une anticipation explicite du résultat attendu. L'élève est ainsi appelé à finaliser sa stratégie pour confronter son anticipation au résultat obtenu. Aussi, pour que l'élève puisse tirer de l'information de la rétroaction, il faut s'assurer que le délai entre l'action menée sur le milieu et la rétroaction du milieu soit court. Le milieu didactique doit donc également être organisé pour offrir une rétroaction rapide (ce que permet la calculatrice, par exemple). Un tel milieu didactique ne peut se construire que si les consignes, le matériel ou encore le contexte n'écrasent pas le savoir en tant qu'enjeu de la situation. Ainsi, l'étude sur la manière d'engager les élèves en difficulté à faire fonctionner le savoir pour contrôler des situations mathématiques est la voie privilé-

2 *Notamment en jouant sur les valeurs des variables didactiques des situations d'enseignement pour provoquer l'émergence de stratégies adaptées à la fois au problème soumis et qui engagent le savoir visé.*

giée par l'approche didactique.

Conclusion

Nous avons cerné de manière très brève ce que nous offre la didactique des mathématiques pour interpréter non seulement les difficultés d'apprentissage, mais également les difficultés d'enseignement. Si nous n'avons esquissé que quelques pistes pour soutenir l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, il nous semble que la confrontation des cadres théoriques aux contraintes propres à l'adaptation scolaire doit être accélérée pour favoriser non seulement la réussite scolaire en mathématiques des élèves en difficulté, mais également leur entrée dans la culture mathématique.

Références

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat, *Recherches*, 41, 177-182.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne. In G. Lemoyne et al. (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 31-69). Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

Favre, J.-M. (2004). Étude des effets de deux contraintes didactique sur l'enseignement de la multiplication dans une classe de l'enseignement spécialisé. In V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (Éds). *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques* (pp. 109-126). Paris : IREM Paris 7.

Giroux, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. In C. Mary et L. Theis (éds), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques* (pp. 11-44). Presses de l'Université du Québec.

Kamii, C. (1990). *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique*. Berne: Peter Lang.

Lemoyne, G. et Lessard, G. (2003). Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants, *Éducation et francophonie*, XXXI, 2, 13-44.

René de Cotret, S. & Giroux, J. (2003). Le temps didactique dans trois classes de secondaire I (doubleurs, ordinaires, forts). La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire. *Éducation et francophonie*, XXXI, 2, 155-175.

Salin, M.-H. (2007). À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour des élèves en grande difficulté scolaire, In J. Giroux et al. (éds.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (pp. 195-218). Montréal : Éditions Bande didactique.

Marlot, C., & Toullec-Théry, M. (2011). Caractérisation didactique des gestes de l'aide à l'école élémentaire : une étude comparative de deux cas didactiques limites en mathématiques. *Éducation et didactique*, 3-5, 7-32.

Suivre le fil de la pensée des élèves…

Christine Del Notaro

Université de Genève

Propos introductifs

Les programmes peuvent paraitre parfois très lourds dans les derniers degrés du cycle 2 (élèves de 8 à 12 ans), ce qui a pour conséquence que les enseignants pensent devoir supprimer de leur enseignement les situations plus ouvertes ou les ateliers, qu'ils estiment superflus, pour des raisons diverses, qui leur appartiennent.

Ces décisions sont prises dans le but d'accéder de manière plus directe, pense-t-on, à l'essentiel. La question qui se pose alors est de savoir, premièrement, de qui émane cet essentiel (de l'élève ? de l'enseignant ?) et quelle est la consistance d'un apprentissage qu'un élève ne construit pas lui-même.

En ma qualité de formatrice universitaire en didactique des mathématiques, c'est un phénomène que j'observe souvent chez les étudiants : ils élaborent des séquences didactiques qui semblent cohérentes sur le papier, mais qui ont tôt fait de s'écrouler lors du passage à la contingence. J'en donne un exemple ci-après.

L'une des théories qui ont inspiré l'enseignement primaire est la TSD (Théorie des Situations Didactiques), dont l'auteur, Guy Brousseau, est une figure marquante dans le domaine. Cette théorie préside aux manuels COROME des degrés 1P-8P en vigueur ; en effet, dans la seconde moitié des années 1990, lors de l'élaboration des manuels, les auteurs très empreints du courant de la didactique des mathématiques français en ont tenté une application aux moyens d'enseignements dont ils avaient la mission. Que cette tentative ait été incomplète et, sans nul doute, approximative, j'en conviens d'autant plus aisément que j'ai fait partie de l'équipe des auteurs 3-4 (5PH-6PH[1]) ; j'en connais donc les moindres rouages.

Le chemin scientifique parcouru depuis lors, me fait dire que la théorisation de Brousseau est une formidable modélisation de l'enseignement des mathématiques, mais qu'en tant que telle, elle est difficile à appliquer en classe, dans la mesure où les conditions scientifiques et les cautions institutionnelles sont absentes.

Cela dit, c'est un puissant modèle pour penser la relation didactique et envisager la notion d'expérience. Comme nous le verrons, c'est au cours de la situation d'action que les élèves devraient avoir l'occasion de recourir à de l'expérimentation et de se fabriquer de ce fait, non seulement une représentation du savoir, mais aussi une expérience.

Situations adidactique et expérience

Sans entrer dans trop de détails, rappelons que Brousseau a distingué plusieurs situations[2] : deux situations didactiques, la dévolution et l'institutionnalisation, et trois situations a-didactiques : action, formulation et validation. C'est dans ces situations adidactiques que l'élève apprend. La dévolution de la tâche est de l'ordre du didactique et implique que l'enseignant propose une tâche par laquelle il fait accepter la responsabilité du problème à résoudre ; Brousseau dit que « *la dévolution est l'acte par lequel le professeur obtient que l'élève accepte la responsabilité de faire quelque chose qu'on ne lui a pas enseigné au préalable* ». (Brousseau, 2009).

Les trois situations a-didactiques, sont aussi dialectiques, dans le sens qu'elles se répondent : il ne faut pas y voir de hiérarchie, mais des mouvements d'aller-retour entre l'une et l'autre.

Ainsi, si la situation d'action doit permettre à l'élève d'entrer en matière, il s'agit pour ce dernier d'effectuer la tâche en élaborant une connaissance outil, en contexte,

1 *Élèves de 8-10 ans.*

2 *Trop souvent qualifiées de « phases », ce qui représente un glissement de sens car Brousseau parle bien de situations, avec ce que cela implique d'interactions.*

qui permet d'agir, de prévoir, de décider. Il reçoit des informations de la situation et des sanctions, peut réagir par des actions, des prises de décisions … et surtout, construire un modèle mental de cette situation. C'est donc la situation par excellence, durant laquelle l'élève va pouvoir procéder par tâtonnement, expérimentation, essais/erreurs. Lors de la situation de formulation, l'élève en interaction avec ses pairs, va formuler des éléments de solution, échanger des informations, élaborer un code. On trouvera des illustrations de la formulation dans les situations dites de communication entre élèves (par exemple, un élève transmet des informations à un camarade pour qu'il dessine une figure géométrique, ce qui implique une vérification, un débat, un questionnement). Enfin, par validation, on entend le fait d'argumenter, de convaincre, de prouver et d'élaborer une vérité collectivement, prouvée auparavant en situation de formulation, après avoir été éprouvée durant la situation d'action. L'institutionnalisation marque le retour au didactique (l'enseignant reprend la main) et fait office de pendant à la dévolution. Lors de l'institutionnalisation, l'enseignant donne un statut social et scientifique à la connaissance, en fixe les conventions et les notations.

Si les stagiaires s'approprient relativement bien les notions de validation et de formulation, la situation d'action est souvent évincée au profit d'une situation de validation (qui plus est, menée par le/la stagiaire au détriment des élèves), voire d'institutionnalisation.

Qui valide ?

Pour illustrer ce phénomène, voici un exemple dans lequel une stagiaire valide à la place des élèves ; elle est quelque peu débordée par l'afflux de connaissances qui fusent de la part des élèves, et décide de couper court, pour institutionnaliser.

Contextualisation : après deux leçons sur une situation de divisibilité par 4, la stagiaire désire clore ce chapitre, mais les connaissances résistent ; elle dit ceci aux élèves :

> *donc vous avez tous constaté la même chose … vous êtes d'accord que si on remplace ce chiffre (la centaine) par un autre, cela n'a pas d'importance quand on divise par 4 c'est pas important on trouvera de toutes façons 0, c'est ces deux derniers chiffres qui sont importants donc vous êtes tous d'accord avec ça ?*

Ce à quoi les élèves répondent par l'affirmative ; un élève insiste cependant : « *mais ils doivent être pairs* » et revient à la charge plusieurs fois, avec l'argument de la parité. La stagiaire lui demande si les multiples de 4 peuvent être des chiffres (nombres !) impairs. Les autres élèves répondent que non, elle continue ainsi : « *donc forcément ça sera un chiffre pair mais est-ce que c'est suffisant ?* » L'élève se raccroche à la règle de la parité et lance « *oui* » ! Cette connaissance entre en conflit avec la règle fraichement construite à propos des multiples de 4 (les deux derniers chiffres doivent former un nombre multiple de 4). La stagiaire tente de rétablir les acquis : « *mais il faut que ce soit un multiple de 4 quand même* » ; l'élève reste sur sa position, répétant que ce n'est « *pas obligé* » ; pas obligé qu'ils soient multiples de 4, pair ça suffit […].

Les échanges se poursuivent longuement, activant une concurrence des connaissances entre la parité et la formation des multiples de 4 qui se règle ici à l'aide des connaissances sur la table de 4. La stagiaire quelque peu dépassée répond de manière péremptoire : « *Alors je crois qu'on va s'arrêter là. Notez ce qu'on a constaté dans vos cahiers* ». Elle coupe court aux dernières objections des élèves, valide à leur place et institutionnalise.

L'expérience que les élèves peuvent se constituer dans une situation dite adidactique occupe sans aucun doute la part la plus importante de leurs apprentissages. Cela se traduit dans les faits par l'acceptation de la part du maitre, de la place à accorder à l'expérimentation et la décision de laisser les élèves suivre le fil de leur pensée. Ceci suppose toutefois de leur permettre de s'engager dans la tâche sans contrôler ce qu'ils font en termes de juste ou faux, d'apprentissage, de régulation, ou encore, d'évaluation.

Les problèmes ouverts, de l'ordre d'une technique pédagogique, permettent de mesurer l'importance de ne pas avoir d'intention d'enseignement au préalable autre que, par exemple, l'exploration du nombre, les essais/erreurs ou encore l'organisation de données et l'élaboration de règles et/ou lois. Ce sont souvent les relations entre les nombres, mises en évidence par la situation, qui vont alimenter l'expérience.

Des questions surgissent alors : laisser explorer le nombre et enseigner, est-ce compatible ? Comment concilier l'enseignement et l'expérience de l'élève ? Nous constatons que l'expérience est très variable et se montre instable : on ne la retrouve pas forcément à chaque fois qu'on souhaiterait la convoquer.

De la parité des nombres ...

Pour sonder les connaissances des élèves à partir de ce que j'ai observé dans la classe de la stagiaire, je leur ai proposé des nombres inhabituels par leur formation et leur longueur, pour voir de quoi était faite leur expérience et leur ai demandé si ce nombre était un multiple de 4. Voici quelques exemples :

31111111111111111111. Réponse non : les élèves invoquent la forme du nombre et le réduisent en éliminant les 1 superflus. Ils en concluent que 31 n'est pas multiple de 4, s'appuyant en outre sur les connaissances de la parité et de la multiplication par 4.

55555555555222222222. Réponse non : ils invoquent là encore, la forme du nombre et révèlent leurs connaissances de l'imparité (le nombre est impair car il y a plus de 5 que de 2). D'autres élèves répondent que le nombre est pair, justifiant leur propos par la réduction du nombre (ils suppriment les chiffres superflus) « *c'est comme 52 et 52 est multiple de 4* ».

27777777777777777774. Réponse oui / non : ceux qui disent oui regardent le dernier chiffre (ça finit par 4) et ceux qui disent non, les deux derniers chiffres, orientant leur réponse sur leurs connaissances de l'imparité (7 est impair).

44444477777777666666. Réponse non : invoquent la forme du nombre (à cause des 7, le nombre est impair). Certains le réduisent à 476 mais disent que non, probablement parce qu'ils en reviennent à considérer le dernier chiffre, le 6.

Etc.

Les représentations des élèves à propos de la formation d'un multiple de 4 sont de natures fort diverses et nécessitent de ménager un espace d'expérimentation pour les élèves, afin de pouvoir se constituer une expérience autour de ces multiples, sans quoi ces connaissances ont peu de chances d'être mises en évidence.

Pour le chercheur, ce sont autant de perles à cultiver pour comprendre, toujours mieux, quelles connaissances sont mises en œuvre dans la justification de certaines affirmations.

Références

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2009). L'école et la didactique des mathématiques. Conférence Nova Scola 2009, http://guy-brousseau.com/3205/didactique-des-mathematiques-2009/ consulté le 1 octobre 2015.

Résultats d'une enquête internationale sur la démarche d'investigation
Partie II – Pratiques de classe chez les enseignants genevois.

Rémy Kopp et Laura Weiss

Institut Universitaire de Formation des Enseignants, Université de Genève

Introduction

Dans un contexte international de promotion de la démarche d'investigation (DI)[1] comme stratégie d'enseignement visant notamment à enrayer la désaffection des jeunes à l'égard des sciences et des mathématiques (Rocard et al., 2007), de nombreux projets internationaux ont vu le jour. Entre 2009 et 2013 une équipe de recherche de l'Institut universitaire de formation des enseignants de Genève (IUFE) a participé au projet PRIMAS (Promoting inquiry based learning in mathematics and science education across Europe)[2] qui encourage la pratique de la DI dans les classes. Dans ce cadre, une enquête a été menée auprès des enseignants de mathématiques et de sciences des pays partenaires de PRIMAS[3] pour estimer leur intérêt et leur implication dans ce type de démarche. Notre propos s'appuie sur le rapport de l'enquête PRIMAS (Euler, 2011) et l'analyse des réponses des enseignants genevois (Kopp & Weiss, 2014a).

La présente communication fait suite à un premier article publié dans Math-Ecole n° 221 qui présentait les résultats de l'enquête concernant l'attitude des enseignants vis à vis de la DI (Kopp & Weiss, 2014b). Dans cette seconde partie, nous analysons ce que les enseignants disent de leurs pratiques de classes.

Comme dans la première partie, nous présentons les résultats de l'enquête, en comparaison internationale et en fonction des caractéristiques des répondants genevois, pour identifier des difficultés potentielles à la mise en œuvre de la DI dans notre région.

Pour mémoire : à propos de démarche d'investigation

Les différentes définitions de la DI (Calmettes, 2009, 2012; Dorier & Maass, 2014 ; Grangeat, 2011, 2013) ont en commun de valoriser les méthodes actives tout en permettant la construction de sens en vue d'induire des changements conceptuels chez l'élève. En d'autres termes, il s'agit de rendre l'élève intellectuellement actif et responsable de ses apprentissages à travers la dévolution. Ainsi, la DI est une approche résolument centrée sur l'élève (sur ses apprentissages) par opposition à un enseignement centré sur l'enseignant et sur la transmission de connaissances.

Pour son enquête, PRIMAS (Euler, 2011) définit la DI de façon assez large :

> *La DI est une manière, centrée sur l'élève, pour apprendre des contenus, des stratégies et développer des compétences d'apprentissage par soi-même. Les élèves*
>
> - *développent eux-mêmes les questions à examiner,*
> - *s'engagent dans une recherche autodirigée (diagnostiquer les problèmes, formuler des hypothèses, identifier des variables, recueillir des données, documenter le travail, interpréter et communiquer les résultats),*
> - *collaborent les uns avec les autres.*
>
> *Le but de la DI est de stimuler les élèves à adopter un esprit de recherche critique et des aptitudes à la résolution de problèmes. (Euler, 2011, p. 38, notre traduction).*

1 *Inquiry based learning (IBL) en anglais.*

2 *Lié au programme-cadre européen n°7 (FP7).*

3 *Pays partenaires : http://www.primas-project.eu/artikel/en/1298/partners/view.do.*

Questions de recherche

En analysant les données de l'enquête PRIMAS, nous avons l'opportunité de mieux connaître les pratiques des enseignants vis à vis de la DI. Comment la DI est-elle pratiquée à Genève comparativement à d'autres pays européens ? Est-ce que cette pratique est uniforme dans les différents niveaux d'enseignement ? Est-ce qu'elle dépend de la discipline enseignée ? Ou encore de l'expérience de l'enseignant ?

Méthodologie

L'enquête repose sur un questionnaire élaboré au sein du projet PRIMAS. Celui-ci a été envoyé aux enseignants de mathématiques et de sciences durant l'année 2010-2011 dans les 12 pays ou régions partenaires du projet selon des modalités qu'ils ont eux-mêmes définies. Bien que l'échantillonnage ne soit pas strictement représentatif (Euler, 2011), l'enquête nous donne de précieux renseignements sur les pratiques des enseignants.

A Genève, le questionnaire a été adressé à l'ensemble des enseignants du primaire et à tous les enseignants de mathématiques et de sciences du secondaire I et II.

Rappelons quelques données du corpus des réponses obtenues. Au niveau international, l'enquête a recueilli les réponses de 925 enseignants. A Genève, nous avons reçu 162 réponses dont 83 proviennent d'enseignants primaires et 79 d'enseignants secondaires, soit respectivement environ 3% et 10% des enseignants genevois, selon le mémento statistique du SRED (2012)[4]. Ces taux de retour sont tout à fait comparables à ceux obtenus dans d'autres études du même type. Notons encore que le nombre de réponses obtenues à Genève est, en chiffres absolus, le plus important de tous les pays et régions participants.

Le recueil des questionnaires reposant sur le bon vouloir des enseignants fait que l'on peut s'attendre à une surreprésentation des personnes concernées par la DI. De plus, ce sont les enseignants eux-mêmes qui parlent de leurs pratiques. Ce sont là des limites qui, à l'instar d'autres enquêtes du même type (Monod-Ansaldi & Prieur, 2011), obligent à considérer nos résultats avec prudence et à les interpréter en termes de tendances générales plutôt que de statistiques précises.

Résultats

Dans la partie du questionnaire concernant les pratiques de classe, chaque enseignant est invité à choisir une de ses classes. Il indique ensuite avec quelle fréquence il met en œuvre dans cette classe les pratiques proposées. Il répond en utilisant une échelle de 1 à 4 (1 jamais ou rarement, 2 dans quelques leçons, 3 dans la majorité des leçons, 4 pratiquement toujours).

Pour l'analyse, les questions sont regroupées selon 5 variables dont on calcule la fréquence de mise en œuvre chez les enseignants.

- EXE se réfère à la pratique d'exercices. Elle reflète une pratique centrée sur l'enseignant qui donne la théorie puis fait faire des exercices.
- APP décrit un enseignement focalisé sur les applications pratiques des mathématiques et des sciences, mettant l'accent sur les liens avec la vie quotidienne.
- EDI correspond aux pratiques fondées sur les discussions de résultats expérimentaux.
- HON se rapporte aux activités pratiques proposées par l'enseignant et réalisées par les élèves.
- INV représente les activités de type investigation dans lesquelles les élèves testent leurs propres idées et conçoivent leurs propres expériences.

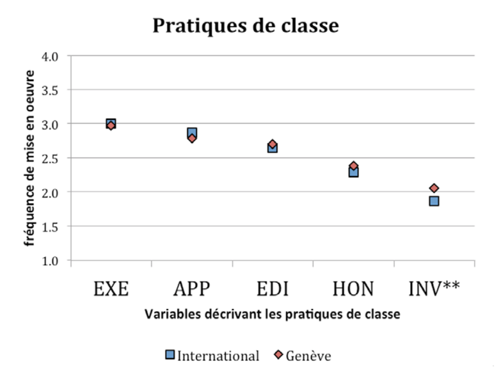
Notons que les deux dernières variables (HON et INV) concernent des pratiques dans lesquelles les élèves sont actifs.

Comparaison internationale

Globalement, dans tous les pays concernés par l'enquête, les pratiques centrées sur le maître et les exercices sont beaucoup plus fréquentes que les approches centrées sur l'élève, qu'il s'agisse d'activités pratiques ou de DI. En effet, les données synthétiques (Figure 1) montrent que la pratique d'exercices (EXE) concerne la majorité des leçons alors que la DI (variable INV) reste globa-

4 http://www.geneve.ch/recherche-education/doc/publications/docsred/mementos/2012/memento.pdf.

lement peu fréquente. Dans ce contexte général, les enseignants font fréquemment référence à des applications dans la vie quotidienne (APP) et accordent de l'importance aux discussions en lien avec les expériences (EDI) afin de donner du sens à leurs cours et motiver les élèves.



Mise en œuvre : 1 jamais ou rarement ; 2 dans quelques leçons ; 3 dans la majorité des leçons ; 4 pratiquement toujours.

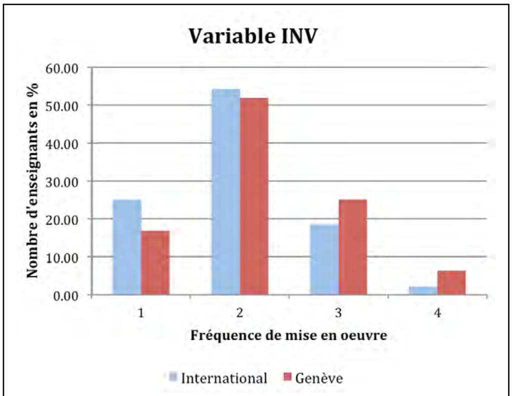
Différences statistiquement significatives :

* seuil $p<0.05$; ** seuil $p<0.01$.

Figure 1 : Fréquence de mise en œuvre de différentes pratiques dans les classes.

Si les enseignants genevois ne font pas exception pour ces pratiques majoritaires, ils se distinguent en revanche par un recours plus fréquent à l'investigation : ils sont proportionnellement plus nombreux à recourir régulièrement (dans la majorité des leçons ou presque toujours) à la DI (31% contre 21%) (cf. Figure 2). Ils sont aussi moins nombreux (17% versus 25%) à ne jamais pratiquer la DI.

Cette caractéristique est relevée par Euler (2011) qui compare les résultats de l'enquête PRIMAS avec ceux de PISA 2006 et conclut que « *Genève est une des régions qui a le plus intégré une culture d'enseignement centrée sur l'élève* ».

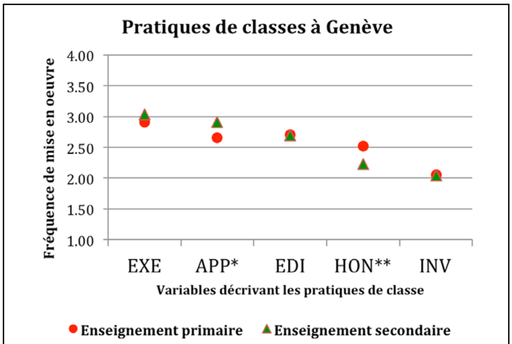


Mise en œuvre : 1 jamais ou rarement ; 2 dans quelques leçons ; 3 dans la majorité des leçons ; 4 pratiquement toujours.

Figure 2 : Mise en œuvre de démarches d'investigation: répartition des réponses.

Analyse locale

À Genève, les pratiques qui mettent en avant les applications des mathématiques et des sciences (APP) sont largement répandues. Il est intéressant de noter qu'elles sont un peu plus fréquentes au secondaire qu'au primaire (cf. Figure 3). Par ailleurs, elles sont nettement plus fréquentes au secondaire II (PO) qu'au secondaire I (CO)[5]. Les approches des concepts abordés au secondaire étant souvent plus abstraites,



Mise en œuvre : 1 jamais ou rarement; 2 dans quelques leçons; 3 dans la majorité des leçons; 4 pratiquement toujours.

Différences statistiquement significatives :

* seuil $p<0.05$; ** seuil $p<0.01$.

Figure 3 : Fréquence de mise en œuvre de différentes pratiques dans les classes à Genève.

5 Le Cycle d'orientation (CO) correspond au secondaire I (12-15 ans) et le Post-Obligatoire (PO) correspond au secondaire II (élèves de 15-19 ans).

on peut penser que les enseignants portent une attention plus grande à signaler les applications des concepts qu'ils traitent.

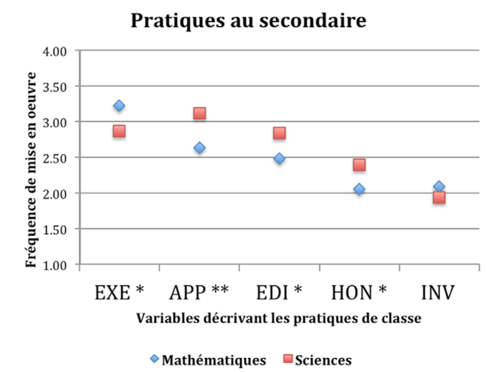
En revanche, les activités pratiques encadrées (HON) sont significativement plus développées au primaire qu'au secondaire. Ainsi les élèves du primaire font plus d'activités pratiques et ont plus souvent l'occasion de « *tirer des conclusions à partir d'expériences qu'ils ont réalisées eux-mêmes* » pour reprendre les termes du questionnaire. Toutefois le recours à la DI n'y est pas plus fréquent. En effet, les activités du type investigation (INV) sont mises en œuvre avec une fréquence semblable dans les deux niveaux d'enseignement.

Les résultats montrent encore que les enseignants du primaire sont beaucoup plus attachés à suivre le manuel ou le protocole que leurs collègues du secondaire, ce qui peut s'expliquer par leur formation généraliste, moins à l'aise que les spécialistes dans chaque discipline. Ils accordent plus d'importance à « *laisser aux élèves le temps de réaliser les activités* » et ont moins souvent recours à un enseignement collectif. Ceci est en lien avec la prégnance du cours magistral au secondaire, mais aussi avec la pratique de la différenciation pédagogique dans les classes primaires hétérogènes.

A l'école primaire, seul un petit nombre d'enseignants (9/83) choisit de décrire ses pratiques dans un cours de sciences, la plupart préférant décrire une leçon de mathématiques. Bien sûr, cette répartition reflète le temps alloué à ces disciplines dans l'horaire de l'élève (2 périodes hebdomadaires de sciences pour 6 périodes de mathématiques), mais peut aussi traduire une plus grande aisance en mathématiques qu'en sciences[6]. Vu le déséquilibre dans le nombre d'enseignants concernés, nous ne pouvons pas comparer plus en détail les pratiques de mathématiques et de sciences dans les classes du primaire.

Au secondaire, notre échantillon compte environ autant d'enseignants se référant à une classe de science (35/79) qu'à une classe de mathématiques (38/79). La comparaison des pratiques de ces deux groupes (cf. Figure 4) met en évidence des différences qui paraissent liées aux fondements des disciplines et à leur didactique propre. Bien que courante dans les deux branches, la pratique d'exercices est nettement moins fréquente en sciences (EXE). Outre le fait que l'enseignement des mathématiques a une longue tradition dans ce domaine, une discipline comme la biologie se prête mal aux exercices d'application en série.

Nous avons vu que les maîtres du secondaire font fréquemment des liens entre ce qu'ils enseignent et des applications en dehors de l'école (APP). En classe de sciences, les enseignants attachent significativement plus d'importance à ces liens. On peut y voir un reflet du fondement même des sciences expérimentales qui visent à expliquer le monde réel, alors que les mathématiques sont par nature plus théoriques.



Mise en œuvre : 1 jamais ou rarement; 2 dans quelques leçons; 3 dans la majorité des leçons; 4 pratiquement toujours.

Différences statistiquement significatives :

* seuil $p<0.05$; ** seuil $p<0.01$.

Figure 4 : Fréquence de mise en œuvre de différentes pratiques en mathématiques et en sciences dans les classes genevoises.

Comme attendu, les travaux pratiques (HON) sont plus fréquents en sciences qu'en mathématiques. Il s'agit surtout d'activités encadrées, de type protocole à suivre. Un examen détaillé des questions qui composent cette variable montre que les activités pratiques sont plus encadrées en sciences. Les leçons où « *les élèves ont l'opportunité de travailler avec peu ou aucun*

6 *Dubois, L. (2013). Communication personnelle.*

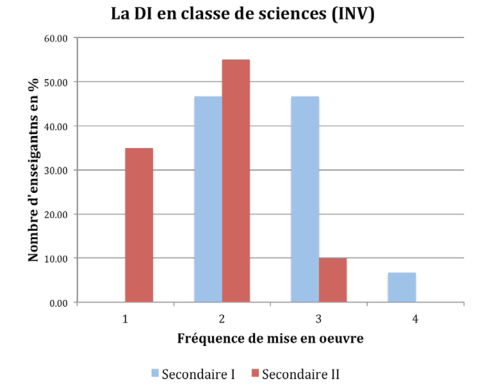
guidage » sont significativement moins fréquentes au cours de sciences qu'au cours de mathématiques[7]. En mathématiques, l'enseignant peut laisser plus de liberté aux élèves sur les stratégies de recherches, alors que les expériences scientifiques sont souvent contraintes par l'utilisation de matériel et de substances nécessitant des précautions.

Enfin, les activités d'investigation ne sont pas plus fréquentes en mathématiques qu'en sciences.

En mathématiques (38 enseignants), les pratiques déclarées au cycle d'orientation (CO) et au post-obligatoire (PO) ne se distinguent pas significativement au vu des petits effectifs concernés (respectivement 21/38 et 16/38). La tendance irait dans le sens d'un peu plus de DI au PO qu'au CO. Une seule question révèle une différence marquée : les enseignants du CO accordent significativement plus d'importance à essayer « *de faire en sorte que les élèves n'aient pas peur de se tromper* » que leurs collègues du PO. Cela traduit sans doute une posture orientée vers l'élève et visant à favoriser son implication dans la résolution de problèmes. C'est aussi la marque d'un statut de l'erreur qui est alors vue comme une opportunité d'apprendre (Astolfi, 1997) plutôt que comme une faute ou un bug.

Une dernière comparaison concerne l'enseignement des sciences au secondaire (35 enseignants). Les enseignants du CO se distinguent nettement par un recours moins fréquent à une progression organisée du simple au complexe, sans doute reflet des changements intervenus dans le plan d'études du CO de 2001[8], accompagné de formations continues développant l'idée d'aborder des questions complexes avec les élèves. À l'opposé, les enseignants du PO restent plus attachés à une vision linéaire de l'apprentissage et transmissive de l'enseignement. Dans la même ligne, au CO les activités dans lesquelles « *les élèves tirent des conclusions à partir d'une expérience qu'ils ont faites eux-mêmes* », ainsi que des démarches d'investigation (INV) sont pratiquées plus souvent (Figure 5). Cette distinction – hautement significative – montre qu'au PO l'enseignement s'inscrit souvent dans une logique donnant la priorité à l'explication (théorique), alors qu'au CO, les enseignants adoptent une posture davantage orientée vers l'élève et plus cohérente avec la DI. Ceci correspond aux observations faites en France par Monod-Ansaldi et Prieur (2011) et peut s'expliquer par la réforme des plans d'études de 2001, qui prônent explicitement une approche par situation problème et/ou par investigation.

Pour terminer, nos données ne montrent pas d'influence de l'expérience des enseignants sur la pratique de la DI, même si les enseignants expérimentés recourent moins souvent que leurs collègues à des pratiques centrées sur la transmission et les exercices (variable EXE).



Mise en œuvre : 1 jamais ou rarement; 2 dans quelques leçons; 3 dans la majorité des leçons; 4 pratiquement toujours.

Figure 5 : Démarches d'investigation en sciences, bien plus fréquente au secondaire I qu'au secondaire II.

7 *Mise en œuvre : 1.74 pour les sciences et 2.08 pour les mathématiques, différence significative au seuil p<0.05.*

8 *En 2000-2001 le CO genevois a renouvelé les plans d'études de toutes les disciplines, suite à un processus de réflexion de 5 ans partant des finalités de l'enseignement au CO. Ont été alors introduites et généralisées les idées d'enseignement par le problème, de situations complexes, de travail de groupe en lien avec des théories didactiques dans une vision socio-constructiviste.*

Discussion

Dans un contexte institutionnel qui était globalement favorable à la DI (Kopp & Weiss, 2014b) nous observons que les activités pratiques et la DI sont bien présentes dans l'enseignement des mathématiques et des sciences. Par rapport aux autres pays du groupe PRIMAS, cela confirme l'attitude positive des enseignants vis à vis de la DI et une plus grande centration de l'enseignement sur les activités des élèves que dans d'autres pays.

Cependant, toutes les activités pratiques ne sont pas synonymes d'investigation. En effet, les activités pratiques peuvent être très guidées et n'impliquent pas toujours une réelle dévolution du problème à l'élève. Outre les contraintes des programmes déjà évoqués dans la première partie, on observe en sciences que plus on avance dans le cursus, plus les activités sont fermées. On constate ainsi une situation où les élèves les plus âgés (mûrs) sont moins souvent confrontés aux démarches de haut niveau taxonomique[9] qui sont en jeu dans la DI. Il y a certainement là une difficulté propre aux sciences où les élèves ont, moins souvent qu'en mathématiques, l'opportunité de travailler avec peu ou aucun guidage. Cela peut s'expliquer car le recours à l'expérimentation dans les degrés élevés implique souvent d'orienter les élèves vers un protocole déjà établi en fonction du matériel expérimental et d'autres contraintes (sécurité notamment) et qui laisse peu de marge de manœuvre à l'élève pour s'approprier une expérience ou en proposer une variante. Le passage de la dévolution du problème à l'application d'un protocole donné est un nœud difficile de la DI en sciences. Cet obstacle n'apparaît pas en mathématiques où une dévolution plus large du problème est possible. Tout comme ses collègues de sciences, l'enseignant de mathématiques se trouve cependant confronté au choix difficile de la situation problématique : trop ouverte les élèves partent dans toutes les directions et ne construisent pas le savoir visé, trop fermée les élèves ne font qu'appliquer les dernières notions étudiées.

Conclusion

Cette seconde facette de l'enquête menée en 2011 donne une vision plus précise des pratiques de classe et de l'attitude des enseignants genevois envers la DI. Cela est d'autant plus intéressant que cet instantané sur les pratiques intervient au moment de l'introduction à l'école obligatoire du Plan d'études romand (CIIP, 2010), qui réaffirme dans ses priorités les références à la résolution de problèmes et qui promeut plus globalement le recours à la DI.

Comme nous l'évoquions dans la première partie, les enseignants étaient très préoccupés par la mise en œuvre des réformes au moment où ils ont rempli le questionnaire. Après la période chargée de l'introduction de ces nouveaux programmes, il sera intéressant d'observer l'influence de ceux-ci sur leurs pratiques. En effet, la contrainte du programme étant forte, on peut s'interroger sur la place qui sera effectivement dévolue à la DI. Cependant, nous parions que les enseignants, très impliqués dans de telles démarches, ne sont pas prêts à y renoncer.

Notons encore que le nouveau cours de Démarches scientifiques et modélisation mis en place à Genève à l'intention des élèves de 11e profil Sciences est précisément un lieu propice à la démarche d'investigation impliquant à la fois les mathématiques et les sciences.

Références

Astolfi, J.-P. (1997). *L'Erreur, un outil pour enseigner.* Paris : ESF Editeur.

Calmettes, B. (2009). Démarche d'investigation en physique. Des textes officiels aux pratiques en classe. *Spirale Revue de recherches en éducation,* 43, 139-149.

Calmettes, B. (Éd.). (2012). *Didactique des sciences et démarches d'investigation : Références, représentations, pratiques et formation.* Paris : L'Harmattan.

CIIP. (2010). *Plan d'études romand.* Neuchâtel : CIIP. http://www.plandetudes.ch/home. Consulté le 10 novembre 2015.

Dorier, J.-L., & Maass, K. (2014). Inquiry Based Mathematics Education. In S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education.* Dordrecht: Springer. http://www.springerreference.com/docs/html/chapterdbid/335725.html. Consulté le 10 novembre 2015.

9 *Voir par exemple : http://edutechwiki.unige.ch/fr/Niveaux_et_types_d%E2%80%99apprentissage.*

Euler, M. (2011). *PRIMAS WP9 Report about the survey on inquiry-based learning and teaching in the European partner countries (No. Deliverable n° 9.2)*. http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=8&supportId=1247. Consulté le 10 novembre 2015.

Grangeat, M. (Éd.). (2011). *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique - Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves.* Lyon : École normale supérieure de Lyon.

Grangeat, M. (Éd.). (2013). *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation : des formations et des pratiques de classe*. Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

Kopp, R., & Weiss, L. (2014a). L'attitude des enseignants genevois vis-à-vis de la démarche d'investigation. In *Skholê/ Cahiers de la recherche et du développement,*

18(1), 311-321. Marseille : Actes des 8e rencontres scientifiques de l'ARDIST.

Kopp, R., & Weiss, L. (2014b). Résultats d'une enquête internationale sur la démarche d'investigation Partie I – Attitude des ensei-gnants genevois. *Math-Ecole,* 221, 30-34. http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/221-Kopp-Weiss.pdf consulté le 13 novembre 2015.

Monod-Ansaldi, R., & Prieur, M. (2011). *Démarches d'investigation dans l'enseignement secondaire : représentations des enseignants de mathématiques, SPC, SVT et technologie Rapport d'enquête IFÉ – ENS de Lyon*. Lyon : IFÉ - ENS.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui. Luxembourg: Union européenne : Direction générale de la recherche Science, économie et société*. http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_fr.pdf. Consulté le 10 novembre 2015.

Analyse de l'activité "Tours de perles"

Lionel Fontana et Anouchka Haifi-Blandin

Etudiants à l'Université de Genève

L'énumération, définie comme le parcours organisé d'une collection, n'est pas inné chez les jeunes enfants, mais est bien le résultat d'un apprentissage de différentes démarches qui peuvent être travaillées à l'école. Il nous a alors paru intéressant de développer une question de recherche portant sur la mobilisation de connaissances en lien avec l'énumération chez les élèves les plus jeunes pour résoudre l'activité « Tours de perles » (Bugnon, Choquet, Corthésy, 2006). Cet article présente tout d'abord notre analyse de cette activité, puis des éléments de notre observation de la réalisation de « Tours de perles » dans une classe.

Présentation de l'activité

L'activité « Tours de perles » est conçue pour les classes de degrés 1P (4-5 ans) et 2P (5-6 ans) HarmoS. Les élèves ont à disposition une plaque de Sagex avec un certain nombre de cure-dents plantés (Image 1) ainsi qu'une boîte contenant un nombre déterminé de perles de couleurs différentes (deux à quatre couleurs différentes). Les élèves doivent construire un maximum de tours différentes de deux ou trois étages en enfilant les perles sur les cure-dents.

Image 1

Analyse didactique de l'activité

Résolution de l'activité

Pour construire un (le) maximum de tours différentes, il faut s'assurer que toutes les tours sont différentes et que toutes les combinaisons sont représentées. L'unicité de chaque tour est plus facile à maitriser si à chaque nouvelle tour on s'assure qu'elle est différente des tours déjà construites. Pour s'assurer que les combinaisons sont toutes représentées il faut s'organiser dans la construction de chaque nouvelle tour. Ces deux contraintes peuvent être maitrisées par la mobilisation de connaissances liées à l'énumération. La collection des tours possible n'est pas disponible, elle est à créer. Construire toutes les tours de 3 étages avec 4 couleurs par exemple, revient à créer matériellement une collection, qui existe indépendamment de sa représentation matérielle. La création de la collection matérielle revient alors à parcourir la collection immatérielle (souvent inconnue), sans considérer deux fois le même élément, sans en oublier et de savoir quand on a terminé. Par exemple il est possible de s'organiser dans la construction en commençant par les tours avec des couleurs d'étages fixes (les deux premiers par exemple et le troisième variable). Cela permet de travailler sur des sous-collections de la collection de tours possibles. La résolution de l'activité revient alors à la reconstruction d'un ensemble de sous-collections.

Étude des variables didactiques

Plusieurs variables didactiques sont présentes dans cette activité. Nous avons choisi de présenter les quatre que nous avons fait varier au cours de sa réalisation en classe.

- le nombre de couleurs : plus il y a de couleurs à disposition, plus la collection à construire est importante. Ainsi, le nombre de combinaison de couleurs pour construire des tours (avec un nombre fixé d'étages) sera élevé. L'élève devra être organisé pour être sûr de ne pas construire deux tours identiques ou pour ne pas oublier une combinaison. Dans le cas de peu de couleur, la collection est plus petite l'organisation dans sa construction peut être optionnelle.

• le nombre d'étage de chaque tour peut aussi influencer la difficulté de résolution de l'activité et le besoin d'organisation. L'élève doit avoir une organisation plus poussée si les tours doivent être constituées d'un nombre important d'étage. A l'inverse, si le nombre d'étage est bas, cela simplifie sa progression et il peut alors plus facilement identifier les tours manquantes sans nécessairement s'organiser.
• le nombre de cure-dents plantés sur la plaque : si un élève reçoit une plaque comprenant autant de cure-dents que de tour à construire, il n'a pas besoin de s'inquiéter d'avoir construit la dernière tour de la collection. Si le nombre de cure-dents est supérieur au nombre de tours à construire, l'élève doit s'assurer lui-même qu'il a construit la dernière tour. Il est aussi possible qu'il décide de remplir tous les cure-dents disponibles, en créant alors des doublons.
• le placement des cure-dents : si ceux-ci sont disposés linéairement, l'élève est aidé dans son organisation. Il est probable qu'il suive la ligne de cure-dents pour créer ses tours. Au contraire, si les cure-dents sont désordonnés sur la plaque, l'élève doit s'organiser seul dans la construction de sa collection. Il est plus probable qu'il ne s'organise pas et remplisse les cure-dents aléatoirement, prenant le risque de doublons ou d'oublis.

Question de recherche

Nous souhaitons au travers de cette activité identifier quelles sont les connaissances des élèves liées à l'énumération et comment ils les mobilisent pour résoudre un problème d'énumération.

Notre question de recherche fait écho à l'article de Briand (1999), notamment quand il décrit que « *Lorsque le professeur commande une action de comptage, l'élève doit mettre en œuvre des connaissances (de nature spatiale) qui permettent d'explorer la collection à dénombrer afin de n'oublier aucun élément et de ne pas repasser deux fois sur le même* » (Briand, p.124).

Choix des valeurs des variables didactiques

Afin d'identifier les connaissances des élèves, nos choix des valeurs des variables didactiques évoluent au cours de la séance. Elle s'organise en trois sous-activités, chacune d'elles ayant ses spécificités.

• activité 1 : 2 couleurs de perles à disposition dans une boîte posée devant le groupe d'élèves, qui doivent constituer des tours de 2 étages (collection de 4 tours), 4 cure-dents sont placés linéairement sur la plaque de Sagex.
• activité 2 : même procédé mais avec 3 couleurs de perles pour des tours de 2 étages (collection de 9 tours), 9 cure-dents placés linéairement sur la plaque.
• activité 3 : idem, mais avec 2 couleurs de perles pour des tours de 3 étages (collection de 8 tours), 16 cure-dents, placés en X, soit 2 lignes de 8 cure-dents s'entrecoupant en leur milieu.

Ces choix de valeur de variables didactiques permettent une approche spécifique à chaque activité. Lors de la première activité, les élèves doivent construire 4 tours avec juste ce qu'il faut de cure-dents alignés. Le milieu mis à leur disposition accompagne l'élève dans sa résolution. Dans la deuxième activité, le nombre de tours à construire devient plus important mais les cure-dent restent alignés et leur nombre correspond au nombre de tours à construire. Bien que la collection soit plus grande, le milieu reste porteur pour l'organisation des tours. Dans la troisième activité, la collection ne grandit pas mais l'organisation et le nombre de cure-dents ne sont plus dans une configuration de soutient. Ainsi l'élève doit s'organiser lui-même dans la disposition des tours et la construction. Pour cela il peut s'appuyer sur les deux premières activités. Notre but est d'identifier les connaissances autour de l'énumération des élèves dans des configurations plus ou moins complexes. Ce dispositif permet aussi d'accompagner les élèves dans leur réflexion, étant donné que cette activité est proposée à des élèves de 1P et 2P et qu'il peut y avoir de grandes différences de niveau entre eux.

Étude des stratégies

Stratégies de base et stratégies erronées

Une stratégie de base pourrait être que l'élève ne soit pas organisé dans la construction de ses tours et qu'il fasse des doublons ou qu'il en oublie sans que cela ne le dérange. Une autre stratégie de base serait que l'élève n'utilise pas l'organisation des cure-dents (alignés) et les utilise aléatoirement. Les élèves pourraient aussi construire chaque tour sans prendre en compte les tours précédentes.

Une autre stratégie erronée que les élèves peuvent mettre en place serait de ne construire que des tours sans répétition de couleur.

Une autre stratégie serait que les élèves utilisent tout le matériel qu'ils ont à disposition (perles et cure-dents), et ce sans se soucier d'avoir des doublons ou de ne pas faire un nombre d'étages suffisant pour chaque tour.

Stratégie(s) visée(s)

Ce que nous attendons de l'élève est qu'il se donne les moyens d'organiser sa construction des tours. Par exemple, il construit tout d'abord les tours en commençant par une même couleur pour la base et a une progression organisée, s'appuyant sur les sous-collections de tours. Il peut aussi construire chaque nouvelle tour en s'appuyant sur les tours construites, en choisissant par exemple une configuration non exploitée.

Traitement de la question de recherche

Nous avons analysé les différentes actions réalisées par les élèves et comparé les stratégies utilisées pour la résolution des activités. Pour ce faire, nous nous sommes focalisés sur les activités 2 et 3. L'activité1 nous a permis de nous assurer que tous les élèves se sont appropriés la situation.

Groupe 1

Lors de la seconde activité, la stratégie du groupe 1 s'est apparentée à une des stratégies visées. Ils ont en effet construit leurs tours linéairement (de gauche à droite) et méthodiquement en se servant de la couleur rouge comme base de la tour (rouge/rouge), puis en insérant la seconde couleur, puis la troisième, et ce, toujours en ne variant la couleur de base que lorsqu'il n'était plus possible de faire de nouvelles tours avec. Ils ont ainsi anticipé le fait qu'il y aurait des paquets de tours avec des éléments communs.

Ils ont donc utilisé des éléments du milieu matériel à disposition (notamment le fait d'avoir des cure-dents disposés linéairement) pour construire leur stratégie (construction linéaire et observation). En outre, lors de cette étape, le nombre de cure-dents leur a permis de conclure qu'ils avaient construit l'ensemble des tours possibles.

Pour la troisième activité, le groupe a débuté avec une stratégie de base consistant à remplir tous les cure-dents aléatoirement. Les élèves ont pris cette initiative en sachant qu'il y aurait des tours identiques à supprimer. Pour ce faire, les élèves ont travaillé individuellement sur la même plaque en disposant pour l'un les perles sur la gauche de la plaque et pour l'autre sur la droite.

Toutefois, cette stratégie leur prenait du temps et ne semblait pas aboutir à une résolution de l'activité, ils ont alors décidé de tout recommencer de façon linéaire comme précédemment. Ainsi, la stratégie visée consistant à construire les tours en s'appuyant sur les sous-collections de tours a été préférée par ce groupe, car celle-ci leur a permis d'identifier la dernière tour à construire sans faire de doublon. Ils ont su adapter leur stratégie sur un milieu moins inducteur que pour les activités précédentes, puisqu'il y avait plus de cure-dents que nécessaire et disposés non linéairement.

Concernant les connaissances liées à l'énumération, on voit ci-dessus que le groupe 1 a été capable de construire une tour de la collection, d'identifier deux tours différentes, d'identifier les tours non encore construites, de répéter ce processus plusieurs fois pour construire l'ensemble des tours possibles et de savoir quand il a construit la dernière tour. Ainsi, ce groupe a pu mettre en place des stratégies de résolution en se basant sur l'ensemble de leurs connaissances liées à l'énumération.

Ils ont toutefois été déconcertés par la disposition en croix durant la troisième activité dont la linéarité n'était pas visible au premier abord. C'est pourquoi ils ont essayé de s'adapter au milieu avec une nouvelle stratégie. Or, ils ont su retourner à la stratégie précédente quand ils se sont aperçus de son potentiel par rapport à la deuxième stratégie.

Ils se sont appuyés sur les caractéristiques de la collection pour soutenir leur énumération. C'est-à-dire qu'ils ont anticipé les sous-collections possibles définies par l'étage de base et ont construit les sous-collections. Cela leur a assuré qu'ils ne construisaient pas deux fois la même tour, et à la fin qu'ils avaient obtenu l'ensemble des tours possibles.

Groupe 2

Lors de l'activité 2 de construction, une des deux élèves a pris l'initiative de commencer à construire des tours au bout de la ligne de cure-dents, de gauche à droite. Ensuite, l'élève a continué ses tours à l'autre extrémité de la ligne de cure-dents, de droite à gauche en débutant avec une combinaison de couleur déjà présente à la première extrémité, créant ainsi un doublon.

Après avoir rempli tous les cure-dents, le binôme s'est aperçu ne pas avoir assez de place pour la combinaison bleu/bleu et a commencé à chercher s'il n'y avait pas une erreur. Ils ont alors reconnu deux tours identiques bleu/rouge qu'ils ont remplacées par la bonne tour.

Après cette activité, nous pouvons donc déjà voir que ces deux élèves n'ont pas des connaissances optimales de l'énumération, en particulier pour la construction d'une nouvelle tour. Ils ne s'appuient pas sur les tours déjà construites afin d'en construire une nouvelle. Les tours sont construites aléatoirement puis comparées afin d'identifier d'éventuels doublons. Cette stratégie de base peut fonctionner sur de petites collections, mais elle risque d'être fastidieuse avec des collections plus importantes.

Pour l'activité 3, le groupe 2 est resté sur la même stratégie de base consistant à placer aléatoirement les tours et a rencontré les mêmes difficultés que précédemment (certaines répétitions de couleurs qu'ils ont parfois modifiées, parfois laissé telle quelles). Toutefois, les deux élèves n'ont cette fois pas rempli tout le plateau.

Les connaissances liées à l'énumération de ce groupe sont en construction. Ils sont capables de construire des éléments de la collection, mais contrôlent l'unicité de chaque élément a posteriori. Ils ne s'assurent pas au cours du traitement d'un élément de la collection que cet élément n'a pas déjà été traité.

Groupe 3

L'activité 2 a pu être réalisée dans le temps imparti par ce groupe. Les élèves ont utilisé une stratégie de base consistant à remplir les cure-dents linéairement de 2 perles, sans prendre en compte les tours déjà construites. Le groupe a construit sa collection par tâtonnement en construisant une tour après l'autre, de gauche à droite, en s'assurant parfois que la dernière construction soit différente des premières et en remplissant tous les cure-dents. Ils ont toutefois obtenu deux tours identiques qu'ils ont modifiées par la suite, obtenant ainsi la collection attendue. Ils ont conclu qu'ils avaient construit l'ensemble des tours disponibles quand ils ont rempli tous les cure-dents. Ils sont donc basés sur le nombre de cure-dents disponible pour savoir si la collection était complète.

Pour l'activité 3, les élèves ont directement démarré en remplissant les 16 cure-dents. Puis, ils ont essayé d'éliminer les tours à double. Ils ont utilisé une stratégie de base qui peut devenir laborieuse avec des collections importantes. Cette stratégie ne leur permet pas de savoir s'ils ont trouvé toutes les tours possibles.

Concernant l'énumération, ce dernier groupe utilise les mêmes connaissances que le groupe 2. Les élèves sont capables d'identifier deux tours différentes mais ne le font pas au cours de la création d'une tour. Concernant l'identification des tours non encore construites, les élèves ont eu besoin de construire par tâtonnement une tour et de la comparer avec les précédentes pour être sûrs que cette tour était manquante (tandis que le groupe 1 les visualisait directement mentalement). Les élèves de ce groupe 3 ont en outre été capables de répéter ce processus plusieurs fois pour construire l'ensemble des tours possibles.

Concernant la question de savoir quand la dernière tour a été construite, nous ne pouvons affirmer que ce groupe maîtrise cette dimension. En effet, lors de la deuxième activité, ils se sont arrêtés lorsque les cure-dents étaient tous remplis. Lors de la troisième activité, la disposition des cure-dents en croix les a perturbés dans l'organisation de leur collection.

Efficacité de la situation

Lors de cet exercice, les principales connaissances visées au niveau des apprentissages concernaient l'organisation dans la construction d'une collection. En effet, au fil des trois activités les élèves pouvaient mettre à l'épreuve diverses stratégies et les optimiser. Lors de la discussion finale, l'enseignante a d'ailleurs axé les échanges sur ce point, en demandant aux élèves comment ils s'étaient organisés et si cela était important. Elle a ensuite expliqué aux enfants divers moyens possibles (bien regarder, construire les tours en lignes droites, etc.).

Les actions des élèves témoignent de certaines connaissances, plus ou moins robustes et complètes, autour de l'énumération. L'enseignante a mis en place plusieurs moments d'échange avec les élèves au cours de la séquence. Elle a ensuite repris une grande partie de ces échanges lors de la dernière discussion. Ce dernier moment collectif mené par l'enseignante a permis de partager avec tous les élèves les différentes actions pertinentes ou insuffisantes. Ce dernier moment collectif pourrait être rapproché d'une institutionnalisation où les différents éléments formulés concernent un savoir lié à l'énumération. Cependant il s'agit pour un si petit degré d'un vrai challenge que de formuler un tel savoir qui souvent reste un implicite fort dans les classes.

Références

Briand, J., Lacave Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D., Goua De Baix, V. (1999). Enseigner l'énumération en moyenne section, *Grand N*, 66, 7-22.

Bugnon, J.P., Choquet, B. & Corthésy, M. (2006). *Mathématiques 1E-2E, Livre de l'enseignant*. Genève : Direction de l'Instruction Public.

Les Lesson Study ? Ke-sako ?

Stéphane Clivaz

Laboratoire Lausannois Lesson Study, HEP Vaud

Originaire du Japon, une nouvelle forme de développement professionnel des enseignants se déploie depuis peu en Suisse romande, en particulier en mathématiques. Autour de l'élément de base du métier d'enseignement, la leçon, ces Lesson Study (LS) sont une occasion de développement des connaissances professionnelles des enseignants ainsi que de développement de celles des autres acteurs de l'école. Cet article propose une brève présentation du dispositif et évoque quelques exemples de son utilisation. Certains de ces exemples pourraient être développés dans des articles à venir.

Des Jugyo Kenkyu aux Lesson Study

Popularisées dans les années 2000 à la suite des comparaisons internationales TIMMS[1], les *Jugyo Kenkyu*, littéralement études de leçon, sont nées au Japon dans les années 1890. À l'occasion d'une réforme scolaire, les enseignants ont commencé à se réunir afin d'observer des leçons, en particulier de mathématiques, et de les examiner de manière critique (Shimizu, 2014). Ces études de leçons se sont ensuite généralisées dans l'ensemble du Japon. Dans les années 1990, à la suite des études internationales montrant les bonnes performances des élèves japonais en mathématiques, l'étude TIMMS a comparé en détail les leçons de mathématiques de 8ème année[2] (10ème HarmoS), notamment japonaises et étatsuniennes. Les chercheurs ont été frappés de constater que ces leçons variaient énormément d'un pays à l'autre, mais fort peu à l'intérieur d'une même culture. Stiegler et Hiebert (1999) ont ainsi parlé d'un Teaching Gap, un fossé en matière d'enseignement, entre le Japon et les USA en particulier. Ils ont décrit ce qui, selon eux, expliquait pourquoi, par contraste avec l'enseignement essentiellement procédural aux USA, les enseignants japonais avaient un enseignement des mathématiques à la fois efficace et essentiellement axé sur la compréhension des mathématiques et la résolution de problèmes : la pratique des *Jugyo Kenkyu* (Stigler & Hiebert, 1999). Fort de cette promotion, et grâce en particulier aux travaux de Lewis qui a formalisé et popularisé les LS aux USA (Lewis, 2002, 2015 ; Lewis & Hurd, 2011), ce mode de développement professionnel s'est développé aux USA, mais aussi en Europe du Nord et dans le reste de l'Asie.

Le cycle de Lesson Study

Les LS partent d'une difficulté à propos d'un sujet d'enseignement, relevée par un groupe d'enseignants. Les enseignants analysent l'apprentissage visé, étudient la notion mathématique, consultent les divers moyens d'enseignement, étudient des articles de revues professionnelles… Cette étude leur permet de planifier ensemble une leçon.

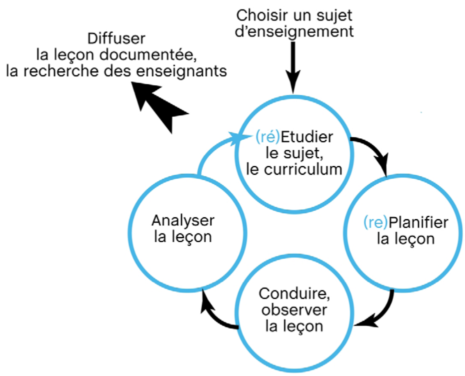


Figure 1 : Le processus de LS (d'après Lewis & Hurd, 2011, p. 2)

Cette leçon est mise en œuvre dans la classe d'un des membres du groupe. Les autres enseignants observent la leçon en direct et analysent son impact sur les apprentissages des élèves. Le groupe peut décider de planifier une version améliorée de la leçon qui sera donnée dans la classe

1 Voir http://www.timss.org.

2 Élèves de 13-14 ans.

d'un autre enseignant et la boucle recommence. Le résultat du travail est diffusé, à la fois sous la forme d'un plan de leçon détaillé utilisable par d'autres enseignants et d'articles dans des revues professionnelles.

De Tokyo à Lausanne

Des LS de divers types sont menées au sein du tout nouveau Laboratoire Lausannois Lesson Study (3LS) à la HEP Vaud. Nous en décrivons ici fort brièvement trois exemples, qui seront peut-être développés dans d'autres articles.

LS en maths en 5H-6H

Une équipe de huit enseignant-e-s de 5H-6H (8-10 ans) de deux établissements primaires de la région lausannoise a travaillé durant deux ans autour de leçons de mathématiques (article dans l'Éducateur de décembre 2015). Encadré par deux coaches, un didacticien des maths et une spécialiste des processus d'enseignement-apprentissage, le groupe a travaillé sur quatre cycles (voir Figure 1) de leçons de mathématiques consacrés à la numération décimale, aux transformations géométriques et à la résolution de problèmes (deux cycles).

Les plans de leçon produits par le groupe sont disponibles sur le site du laboratoire 3LS (www.hepl.ch/3LS). La tâche proposée est souvent une activité des manuels d'enseignement romands qui a été décortiquée et parfois recomposée par le groupe. Ces plans contiennent une ou plusieurs « fiches élèves » ainsi qu'une description détaillée de la leçon pour l'enseignant. Ils peuvent être directement utilisés, clef en main, par tout enseignant intéressé, mais ils incluent surtout les réflexions du groupe et des développements mathématiques, didactiques ou pédagogiques. Ils peuvent ainsi également servir de base à un travail plus approfondi. Toutefois, si ces plans représentent un aboutissement du processus de LS, ils ne sont, comme la réponse à un problème de mathématiques, que la réalisation visible d'un « *exercice de développement professionnel* » (Clivaz, 2015b, p. 103). La leçon n'est ainsi qu'un but apparent, un moyen de développer les connaissances professionnelles des enseignants.

Autour de ce dispositif de formation s'articulent plusieurs projets de recherche en cours visant à étudier le développement professionnel des enseignants, du point de vue de leurs connaissances mathématiques pour l'enseignement (Clivaz, 2012, 2014), de l'évolution de leurs pratiques (Batteau, 2013), de leurs connaissances pédagogiques ainsi que de leurs postures (Clerc, 2013) au cours du dispositif.

LS en échange avec Singapour

Dans le cadre du programme d'échange PEERS[3] de la HEP Vaud, des échanges ont lieu entre trois étudiants en formation initiale à l'enseignement et un formateur de la HEP et un groupe similaire d'une institution de formation étrangère. Plusieurs groupes utilisent le processus de LS, à l'instar de ce qu'ont vécu trois étudiantes de la HEP dans un échange avec leurs collègues singapouriennes en 2014.

Parallèlement à plusieurs visites d'écoles, ces trois étudiantes et un formateur ont ainsi travaillé à Singapour durant une semaine afin d'étudier un problème de mathématiques et de construire une leçon. Cette leçon a ensuite été peaufinée au retour en Suisse pour être donnée et observée dans la classe de stage d'une première étudiante. Les observations ont permis d'approfondir encore le sujet et d'améliorer la leçon pour la deuxième, puis, de manière analogue pour la troisième leçon. Cette troisième leçon a été observée également par les collègues singapouriens lors de leur semaine en Suisse.

La comparaison des deux leçons « finales », singapourienne (via une vidéo) et romande, a été riche d'enseignements sur les conceptions différentes de la résolution de problème dans les deux régions. Cette comparaison a en particulier mis en évidence une forte tendance à enseigner ***à*** résoudre des problèmes (de manière partiellement standardisée et en utilisant Polya (1945)) à Singapour et d'enseigner ***en*** résolvant des problèmes en Suisse romande.

3 *Projet d'Étudiants et d'Enseignants-chercheurs en Réseaux Sociaux. Pour plus de renseignements consulter le site de la HEP Vaud : www.hepl.ch.*

Des micro-LS en formation initiale

Dans le cadre du module « Régulations des apprentissages et évaluation » de la formation initiale des futurs enseignants préscolaire-primaire à la HEP Vaud, tous les étudiants réalisent des micro-LS (Fernandez & Robinson, 2006), en mathématiques, en sciences ou en français (Clerc & Martin, 2011; Martin & Clerc-Georgy, 2015). Pour ce qui est des mathématiques, un groupe de quatre étudiants étudie une erreur typique en calcul réfléchi produite par un élève réel et planifie une interaction avec cet élève afin de le guider dans son apprentissage, en particulier en utilisant des éléments de métacognition. Un des étudiants vivra ensuite cette interaction dans sa classe de stage avec l'élève concerné, enregistrera et transcrira cette interaction. Cette transcription sera analysée par le groupe en séminaire afin d'identifier les effets des interventions de l'enseignant sur les apprentissages des élèves et de préparer une nouvelle version de l'interaction qui sera vécue par un deuxième étudiant avec un autre élève la semaine suivante, et ainsi de suite.

Les effets des LS, nos premiers constats

Le centre d'une LS est la leçon. Toutefois, le processus se déroule à plusieurs niveaux documentés dans nos recherches :

- l'apprentissage des élèves est l'objectif de la leçon, il est au centre des observations des enseignants ;
- cette focalisation sur l'apprentissage des élèves et sur les effets de l'enseignement sur cet apprentissage est le moteur d'une amélioration de l'enseignement, en vue d'améliorer les apprentissages ;
- cette amélioration de l'enseignement, et le travail de réflexion pour y parvenir sont générateurs de développement des connaissances professionnelles, didactiques et pédagogiques des enseignants.

Ce développement est favorisé par plusieurs éléments. Tout d'abord le processus est proche de la pratique ordinaire des enseignants mais il permet également une prise de distance. Comme le disent Lewis et Hurd (2011, p. 3) :

> *L'idée des LS est simple. Si vous voulez améliorer l'enseignement, quoi de plus évident que de collaborer avec vos collègues enseignants pour planifier cet enseignement et examiner son effet sur les élèves ? Pourtant, si l'idée peut être simple, les LS sont un processus complexe.*[4]

Ce caractère collaboratif de recherche est un autre élément essentiel. La recherche collaborative de solutions à une difficulté d'enseignement-apprentissage permet d'une part de développer des connaissances professionnelles et d'autre part de focaliser le regard sur l'enseignement et non sur l'enseignant lui-même. Cette collaboration s'étend d'ailleurs aux autres collègues de l'établissement, aux directions, aux cadres du département, aux associations professionnelles, aux étudiants, aux formateurs et aux chercheurs. Lors des réunions de notre laboratoire 3LS tous dialoguent autour de l'objet leçon dans ces divers aspects.

Enfin, le processus de LS se déroule dans la durée. La participation à un groupe de LS « en emploi » correspond environ à trois jours de formation continue, en partie sur temps scolaire. Ce temps est toutefois réparti régulièrement sur l'année scolaire et s'ancre dans la pratique quotidienne.

Les effets de développement de compétences et de connaissances professionnelles étudiés par les recherches internationales en Asie, aux USA ou en Europe du nord sont avérés (voir par exemple Hart, Alston & Murata, 2011 ; Lewis, Perry, Friedkin & Roth, 2012). Pour ce qui est des trois exemples relatés dans cet article, une première indication des effets se trouve dans les déclarations des enseignants et des étudiants sur ce que le processus a permis de changer dans leur pratique. Par exemple, les enseignants disent qu'ils ont développé une attention plus grande aux apprentissages des élèves en classe, aux étayages à apporter ou encore aux savoirs en jeu dans les tâches issues des manuels, et ceci, y compris dans d'autres disciplines. Par ailleurs les effets des micro-LS en formation initiale ont été décrits par Clerc et Martin (2011) et les recherches autour du dispositif LSM sont en cours.

Le travail à faire dans le domaine des LS

4 *Ma traduction.*

reste conséquent. Un des axes de travail de notre laboratoire concerne les développements théoriques liés aux LS en didactique des mathématiques, particulièrement francophone (Clivaz, 2015a ; Miyakawa & Winsløw, 2009), ou en sciences de l'éducation (Martin & Clerc-Georgy, 2015).

Un autre axe essentiel concerne les difficultés et les adaptations des LS dans notre contexte culturel[5] et le développement dès la rentrée 2015 de nouveaux groupes, dans plusieurs disciplines et à tous les degrés de la scolarité.

Pour être tenu au courant de ces développements ou pour plus de renseignements, vous pouvez consulter les pages web du laboratoire 3LS (www.hepl.ch/3LS), vous y inscrire sur la liste de diffusion ou nous écrire à 3LS@hepl.ch.

Références

Batteau, V. (2013). *Une étude de l'évolution des pratiques d'enseignants primaires vaudois dans le cadre du dispositif de formation de lesson study en mathématiques*, Canevas de thèse, FPSE, Université de Genève.

Clerc, A. (2013). *Rôle des savoirs théoriques de référence dans les parcours de formation des futurs enseignants des premiers degrés de la scolarité*. Thèse en sciences de l'éducation. Université de Genève.

Clerc, A. & Martin, D. (2011). L'étude collective d'une leçon, une démarche de formation pour développer et évaluer la construction des compétences professionnelles des futurs enseignants. *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur,* 27(2). https://ripes.revues.org/514 consulté le 24 novembre 2015.

Clivaz, S. (2012). Des mathématiques pour enseigner : une comparaison entre enseignants étatsuniens, chinois et vaudois. *Math-Ecole*, 218, 61-63.

Clivaz, S. (2014). *Des mathématiques pour enseigner ? Quelle influence les connaissances mathématiques des enseignants ont-elles sur leur enseignement à l'école primaire ?* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Clivaz, S. (2015a). French Didactique des Mathématiques and Lesson Study: a profitable dialogue? *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 4(3), 245-260.

Clivaz, S. (2015b). Les Lesson Study : Des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Revue des HEP et institutions assimilées de Suisse romande et du Tessin* 19, 99-105.

Dudley, P. (2014). *Lesson Study: Professional Learning for Our Time*: Routledge.

Fernandez, M. L. & Robinson, M. (2006). Prospective Teachers' Perspectives on Microteaching Lesson Study. *Education,* 127(2), 203-215.

Hart, L. C., Alston, A. S. & Murata, A. (Eds.). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*: Springer.

Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*: Research for Better Schools.

Lewis, C. (2015). What Is Improvement Science? Do We Need It in Education? *Educational Researcher*, 44(1), 54-61.

Lewis, C. & Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*: Heinemann.

Lewis, C., Perry, R., Friedkin, S. & Roth, J. (2012). Improving Teaching Does Improve Teachers Evidence from Lesson Study. *Journal of teacher education*, 63(5), 368-375.

Martin, D. & Clerc-Georgy, A. (2015). Use of theoretical concepts in Lesson Study: an example from teacher training. *International Journal for Lesson and Learning Studies,* 4(3), 261-273.

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : Étude collective d'une leçon. *Education et Didactique*, 3(1), 77-90.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical model*: Princeton University Press Princeton.

Shimizu, Y. (2014). Lesson Study in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360): Springer Netherlands.

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap. Best ideas from the worlds teachers for improving education in the classroom.* New York: The Free Press.

5 Ces questions se posent également aux USA ou en Europe du Nord et, dans certains pays occidentaux, les LS se sont fortement implémentées. Le développement des LS est par exemple impressionnant dans les écoles londoniennes. Voir à ce sujet le livre de Dudley (2014).

Prochain Colloque COPIRELEM : Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : quelles orientations ? Quels enjeux ?[1]

COPIRELEM[2]

Le 43ème colloque international de la COPIRELEM aura lieu au Puy-en-Velay (France) du 14 au 15 juin 2016.

Le thème du colloque 2016

« Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : quelles orientations ? Quels enjeux ? »

Depuis plusieurs années, l'enseignement des mathématiques et la formation des maîtres sont dans une période de profond renouvellement en France. Dès 2016, les nouveaux programmes pour l'école primaire et pour le collège (secondaire 1) prévoient en effet une réorganisation des cycles d'enseignement, avec notamment la définition d'un nouveau cycle CM1/CM2/6ème (6H à 8H, élèves de 9-12 ans). Les approches transversales et interdisciplinaires y sont renforcées, ainsi que la place du numérique. D'autre part, les conditions de formation et de recrutement des professeurs des écoles ont été modifiées par la création des Ecoles Supérieures du Professorat et de l'Education (ESPE), par les nouvelles modalités du concours, par le référentiel des compétences des enseignants de 2013, ainsi que par le renforcement de la formation en alternance.

Quelles sont les orientations et les enjeux de ces nouveaux rapports au savoir et à la formation ? Quelles libertés et quelles contraintes apparaissent dans ces espaces d'apprentissage, d'enseignement et de formation ?

Un premier axe de réflexion portera sur les enjeux de la formation pour les élèves. On pourra s'intéresser notamment à la relation entre la formation et les situations d'apprentissage, leurs évaluations, la remédiation, la différenciation et les ressources pour les élèves. Les nouvelles demandes institutionnelles au niveau des élèves pourront être étudiées : place du numérique, place des disciplines, organisation curriculaire et impact sur les programmes et la formation.

Le deuxième axe concernera les enjeux de la formation pour les enseignants et leurs formateurs : contenus de formation (mathématiques, didactiques et pédagogiques) ; modalités de formations ; ressources pour la formation ; analyse des formations (et de leur impact sur les formés) ; évaluation des formations mises en œuvre.

Un dernier axe étudiera les enjeux de la formation sur plan institutionnel : commandes institutionnelles ; évolution curriculaire ; implantation dans la formation et dans l'enseignement. Le colloque contribuera à la réflexion sur ces questions, en échangeant notamment expériences et recherches, tant au niveau national qu'international.

De nombreux ateliers et communications seront proposés autour des axes présentés. Ces ateliers seront complétés par trois conférences présentées par : Jean-François Chesné, Docteur en Didactique des mathématiques et Directeur scientifique du Conseil national d'évaluation du système scolaire ; Laurent Theis, Professeur de Université de Sherbrooke (Canada) et Floriane Wozniak, Maîtresse de Conférences de l'Université de Strasbourg et de l'Institut de Recherches interdisciplinaires sur les Sciences et la Technologie (IRIST).

Les informations concernant les modalités d'inscriptions et le programme seront ouverts début 2016 sur http://www.copirelem.free.fr/.

À bientôt au Puy-en Velay !

---

1 Ce colloque est organisé par la COPIRELEM, nous renvoyons les lecteurs à la présentation de ce colloque dans le math-école 221.

2 Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire-http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique12.

Learning by doing : des maths pour tous à Londres

Jimmy Serment et Thierry Dias

Collège de Pully - DDMES - HEP Vaud

Pensez aux mathématiques… Visualisez-vous des expériences où l'on manipule des objets, des expériences de construction, des jeux créatifs ? Non, et pour cause ! Rares sont les occasions que vous avez eues, en tant qu'élèves, de « toucher » les mathématiques de vos doigts. Bien dommage, car le fait de manipuler rend la discipline tellement plus attrayante. La main à la pâte en mathématiques, mais si, c'est possible !

Science on Stage

Après les qualifications suisses du concours Science on Stage[1] à Winterthur en novembre 2014, nous sommes allés présenter nos expérimentations géométriques en Angleterre : London, here we are! Nous avons ainsi rejoint 450 autres participants européens et canadiens, tous candidats à la distinction du meilleur projet d'enseignement scientifique. Science on Stage a été créée en 2005 à l'initiative de l'Union européenne dans le but de revitaliser les champs de l'éducation par le réseautage. L'association Science on Stage réunit aujourd'hui plus de 100'000 professeurs de science (physique, chimie, biologie, mathématiques et informatique) à travers le monde. Son but est d'encourager des méthodes d'enseignement inédites au cours d'un festival international organisé tous les deux ans dans différentes régions d'Europe et du Canada. Un événement à l'issue duquel les participants aux projets les plus novateurs se voient remettre le titre de «Best Science Teacher» par un jury d'enseignants. Cette année, pour le festival européen, le projet idéal devait :

- favoriser l'intérêt des jeunes pour la science,
- se référer à la vie quotidienne,
- avoir un effet durable,
- être réalisable facilement et à moindre prix dans les classes,
- et favoriser l'apprentissage basé sur la démarche scientifique.

Notre projet

Nous proposons diverses expériences géométriques toutes ancrées au sujet des célèbres solides de Platon[2]:

- un puzzle en 3D,
- des constructions géantes,
- des cubes transformables,
- et quelques autres petits défis…

Ces expériences permettent de rencontrer les objets de la géométrie dans l'espace selon un tout nouveau point de vue. Nous bouleversons le rapport à la taille de ces objets, et faisons intervenir le jeu et le corps dans leur découverte. Nous présentons ici quelques activités phares de notre projet pour permettre aux élèves de construire des connaissances spatiales et géométriques.

Image 1

Une balade au cœur des polyèdres

Munis d'un matériel rudimentaire, les élèves entrent dans l'univers des polyèdres en les créant de leurs propres mains. Des polyèdres de tailles variées, allant du petit solide de quelques centimètres à d'immenses constructions plus grandes qu'eux-mêmes dans lesquelles ils peuvent se mouvoir (Image 1), observer et toucher. En utilisant des morceaux de bois, de la laine et

1 Article de référence dans Math-école 222

2 *Les solides de Platon sont les 5 polyèdres réguliers : tétraèdre, octaèdre, cube, icosaèdre et dodécaèdre.*

quelques connecteurs en plastique, tout devient possible : l'exploration, la reproduction de figures, les allers et retours entre montage et démontage, la compréhension de faits géométriques. D'autres figures prennent naissance lorsque la laine s'étire, lorsque les baguettes de bois ses croisent : triangles, hexagones, pyramides, etc…

Un puzzle en trois dimensions

Nous proposons une autre expérience à succès : une boîte cubique en carton enferme une succession de polyèdres en carton d'autres couleurs, qui s'emboîtent parfaitement et permettent aux élèves de découvrir tous les solides platoniciens. Ce puzzle en 3D est composé des 5 solides platoniciens et de quelques autres pièces, le tout remplissant complètement un cube.

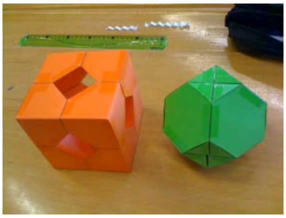


Image 2

Image 3

Des origamis étonnants

Nous adorons faire des surprises à partir du cube : l'ouvrir, le plier, l'articuler pour dévoiler des facettes inattendues de cet objet pourtant si prévisible ! Nos deux préférés (Image 2, Image 3) sont le cube de Yoshimoto et la double boule-cube (octaèdre tronqué). Ils sont particulièrement spectaculaires et réservent de nombreuses surprises lorsqu'on les plie et qu'on les manipule. Eux aussi sont à l'origine de nombreuses rencontres esthétiques et géométriques.

In London!

Un stand en émulation permanente

Durant les 4 jours de ce colloque, notre plan de bataille était simple. Nous devions partager notre temps en deux : l'un de nous devait rester au stand pour exposer et commenter les différentes facettes de notre projet, pendant que l'autre allait à la pêche aux idées en flânant autour des stands des autres participants. Hélas, trois fois hélas, ceci ne fut, au final, que peu possible. Les enseignants des autres pays ont pris d'assaut notre stand, venant essayer nos constructions, nous posant des questions, téléchargeant nos fichiers pdf et prenant nos coordonnées pour de futurs échanges. Tous (y compris les membres du staff d'organisation de l'Université Queen Mary) venaient construire les solides en grand, puis reconstruire le puzzle en 3D et ceci toujours avec des yeux éblouis comme des enfants face à une œuvre d'art à la fois splendide et toujours surprenante. Le caractère esthétique de ces solides plaisait en effet beaucoup à ces enseignants scientifiques, et l'aspect concret de cette géométrie a certainement fait voir les mathématiques autrement. Le plaisir de réussir et terminer un de ces beaux objets provoquait toujours un énorme sourire, une satisfaction, voire même une révélation.

Image 4

Le show des polyèdres

En fin de troisième journée du colloque, les organisateurs nous ont confié la difficile tâche de présenter sur scène notre projet en 3 minutes exactement. « Faites nous un show avec votre projet, ok ? » Malgré une tentative de préparation de notre intervention entre un verre d'eau et un sandwich salvateur, le temps manquant cruellement, nous avons finalement privilégié un show improvisé en jouant avec tous nos polyèdres sur scène (Image 5, Image 6). Nos objets et les expériences qu'ils induisent nous permettent cette improvisation. Ils ont une telle histoire, une telle beauté que l'on a pu se laisser porter par ce qu'ils avaient envie de nous faire dire et nous faire faire sur scène. Les flashs dans l'auditoire et les retours oraux nous ont confirmé l'attrait incroyable pour ces solides réguliers. Le pari du show était gagné !

Image 5

Image 6

Une récompense plus qu'un prix

Au final, le dernier jour fut consacré aux récompenses et nous avons gagné le prix de «Best Science Teacher» dans la catégorie créativité, celle qui était d'ailleurs la plus largement investie par les projets internationaux. Le fait de constater qu'un projet de mathématiques l'emportait au milieu d'un océan de projets en physique, en chimie et en biologie nous a particulièrement surpris. En cela nous sommes assez fiers d'avoir pu montrer la dimension expérimentale des mathématiques trop souvent négligée ou incomprise. Ce prix nous est personnellement relativement anecdotique même si nous en avons apprécié le symbole de la reconnaissance de nos travaux. Cela fait en effet déjà plusieurs années que nous travaillons ainsi, il nous encourage donc à continuer dans cette orientation. Mais ce prix récompense surtout une autre manière de penser l'enseignement des mathématiques, une dimension dans laquelle les enseignants spécialisés et leurs élèves jouent un rôle majeur dans l'innovation didactique. Pour intéresser, pour révéler les compétences de nos élèves qui ont de la difficulté à apprendre, on se doit de proposer des alternatives à l'enseignement classique. Nous devons être plus concrets, plus intelligibles, plus ludiques et ce point de vue nous amène à penser les apprentissages différemment. C'est là que nous revendiquons notre victoire.

Retrouvez-nous sur le site de Simply Science pour télécharger nos ressources :

http://www.simplyscience.ch/a-faire-enseignants/articles/la-geometrie-dans-lespace-cest-facile.html

Crédits photo Mark Sammons Photography pour les images 1, 4, 6.

Analyse et proximités

Richard O'Donovan

CEC André-Chavanne, Genève

Introduction

Les difficultés de l'apprentissage et de l'enseignement de l'analyse au gymnase sont bien connues. La littérature abonde en exemples d'utilisations de métaphores, de manipulations d'adverbes, de ce qui se passe « juste avant » la limite, etc. Faire un lien avec l'intuition est sans doute nécessaire, le problème majeur étant qu'en général on ne parvient pas à quitter le domaine de l'image, ce qui nuit à l'apprentissage de la rigueur.

Avec mon collègue Olivier Lessmann du Collège Rousseau (Genève) et le professeur Karel Hrbacek de l'université CUNY (New York) nous avons entrepris une démarche radicalement différente : adaptons les mathématiques plutôt que la didactique ! Le résultat est une approche qui utilise des « infiniment petits » (qu'on appellera ici « ultrapetits »). Comme pour tout cours d'introduction à l'analyse, on admet l'existence des réels. Ceux-ci sont une donnée de type axiomatique. Dans l'approche discutée ici, on donne une description qui, par rapport à l'enseignement classique, comporte des propriétés supplémentaires. L'idée est de présenter des axiomes « de bas niveau », des propriétés des réels et d'en déduire les propriétés des limites plutôt que d'introduire (de manière tout aussi axiomatique) des propriétés des limites qui, étant des propriétés de fonctions, sont des objets beaucoup plus complexes. Les axiomes sont donnés au départ, ensuite tout se démontre relativement facilement dans une démarche complètement déductive de sorte que tout ce qui porte le nom de théorème est réellement démontré, comme par exemple celui concernant la dérivée de la composition. Cette approche – qui est un sous-produit de l'analyse nonstandard – est utilisée par des enseignants de plusieurs collèges de Genève depuis une dizaine d'années.

Le problème

Qu'est-ce qu'une limite ? Ce que l'on approche ? Mais on sait bien que les nombres ne bougent pas... Ce dont on peut être arbitrairement proche ? Mais quelle est la mesure d'arbitrairement proche ?

Commençons par rappeler la définition classique de la continuité :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$$

$$(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Ici, la notion de « proche » est vraiment bien cachée ! L'utilisation de plusieurs quantificateurs différents ; leur ordre ; le fait qu'on choisisse d'abord ε qui n'est utilisé qu'à la fin ; le fait que le choix de δ dépende de ε (bien que ce soit pour tout ε); le fait qu'on ne puisse étudier indépendamment ce qui est à gauche de la flèche de ce qui est à droite : tout cela rend cette formule extrêmement indigeste pour les néophytes.

Tentatives de contournement du problème

Face à la difficulté de la formule précédente, l'enseignant doit se résoudre à raconter une histoire : une narration qui rend intuitivement acceptables les résultats. Il s'en suit une liste de règles à apprendre telles que : la limite des sommes est la somme des limites, la limite des produits est le produit des limites, idem pour le quotient si la limite du dénominateur n'est pas zéro. Toutes ces règles sont données sans preuve tout simplement parce que, dans le cadre de ces définitions non rigoureuses, c'est impossible. On peut admettre que ces règles prennent le statut de donnée axiomatique, mais il reste néanmoins le flou dans la définition même de la limite. La dérivée est souvent présentée comme la pente de la tangente. Le problème est alors de définir la tangente sans recourir à la notion de dérivée. Le problème cognitif est qu'une droite reposant entre deux points (sécante) est bien déterminée, mais lorsqu'elle repose sur un seul point, on se retrouve face aux problèmes fondamentaux des origines de l'analyse. Une autre approche consiste à faire des zooms successifs, jusqu'à faire apparaître certaines courbes comme localement quasi droites (Maschietto, 2005), ce qui présente des similarités avec notre approche.

Plusieurs démonstrations classiques se font en ajoutant et en retranchant les quantités appropriées ou en multipliant et en divisant par une même quantité (souvent la quantité que l'on fait apparaître intervient à l'intérieur d'une limite, ce qui est rarement justifié explicitement...). Il n'est en général pas possible de faire trouver par les élèves quel tour de passe-passe fera l'affaire.

L'étude des limites est en général difficile pour les élèves car l'image mentale de ce concept n'est pas aisée à développer. Des élèves, vus lors d'un dépannage, ne comprenaient pas pourquoi on leur demandait de démontrer : « si une fonction est dérivable en un maximum local, alors la dérivée en ce point est nulle. » La démonstration passe par des limites (concept non évident) pour démontrer un théorème considéré comme évident. Pourquoi ne pas demander à l'élève d'accepter directement le théorème ?

Dans la plupart des cas, l'introduction à l'analyse est présentée sans le formalisme ε, δ complet , considéré comme tellement difficile que trop d'élèves seraient laissés en arrière et que le sens est obscurci par la technicité. La présentation qui en résulte se fait au moyen de gesticulations des mains et de beaucoup de métaphores telles que des x qui bougent vers... Il ne s'agit pas de critiquer l'usage des métaphores. Lakoff et Nunez ont clairement montré leur efficacité et même leur nécessité fondamentale (Lakoff & Nunez, 2000) ; mais il faudrait pouvoir aller au-delà de l'image mentale et aboutir au plus près du concept mathématique lui-même. Pour le mathématicien enseignant que nous sommes, cette situation est frustrante parce que nous ne montrons pas ce qui est au cœur de notre passion et de notre sujet : l'argumentation et la rigueur dans la démonstration. Par ailleurs, quand il y a des démonstrations, elles reposent sur un mélange de définitions imagées, quelques explications informelles et quelques étapes rigoureuses. La décision de quelles sont les parties qui doivent être formelles est une décision de l'enseignant. Pour certains élèves, les étapes données sans preuve sont moins intuitivement acceptables que le théorème qu'elles permettent de démontrer, causant un conflit entre le statut de l'intuition et celui de la preuve.

Une solution possible

C'est pour tenter de remédier à cette situation que nous avons travaillé plus de dix ans avec le professeur Hrbacek.

Nous voulions trouver une formulation – bien évidemment mathématiquement correcte – qui décrive les concepts de manière aussi proche que possible de l'intuition. Le résultat est une théorie où la dérivée peut être enseignée en premier, la continuité venant ensuite et la limite définie au moyen de la continuité, soit un retournement quasi complet de l'ordre habituel des chapitres. Cet ordre est plus proche du développement historique de l'analyse, ce qui n'est pas une exclusivité de cette approche (Maschietto, 2005).

Le point de départ est un constat : autant la limite « que l'on approche sans nécessairement atteindre » est un concept difficile, autant nous avons observé que la notion « d'infiniment petit » semble exister dans l'esprit des élèves de telle manière qu'on peut se dire que cela fait partie d'un bagage acquis sans en être conscient. De nos jours, le zoom avant et le zoom arrière font partie des notions connues et intégrées en tant qu'intuition par tous. L'idée que, si l'on zoome sur la droite réelle en se centrant sur un point, on verra apparaître des détails auparavant invisibles est perçue comme une évidence. Après tout, s'il y a une infinité de points sur [0,1], il doit bien y en avoir qui sont trop proches pour être distinguables à l'œil nu.

En classe, la présentation qui en résulte est complètement déductive et la plupart des démonstrations peuvent être découvertes par les élèves après quelques exercices préparatoires.

Ce qui est présenté ici a été développé avec deux objectifs : être utilisable en classe et être une théorie mathématique correcte. Ce dernier point est établi : Hrbacek a publié une démonstration qu'il s'agit d'une extension cohérente. C'est-à-dire que les nouvelles notions introduites – en plus des notions classiques – n'ajoutent pas de contradiction. Une version de cette preuve est disponible sur ultrasmall.org/foundations/consistency-of-rbst.

Un théorème classique sur les fonctions réelles est vrai dans une des théories si et seulement si il est vrai dans l'autre. La comparaison entre l'analyse classique et l'analyse avec ultrapetits n'est pas faite ici sur les mérites mathématiques respectifs de chaque approche, mais sur le plan pédagogique.

Une discussion des axiomes et des principes mathématiques peut être trouvée sur le site http://ultrasmall.org, de même qu'on y trouvera un manuel enseignant et des supports de cours (en anglais et en français).

L'introduction aux limites prend du temps en classe – même quand on se contente de définitions imagées non rigoureuses. Cela prend environ la même durée pour introduire – de manière rigoureuse – le nouveau concept d'observabilité et les propriétés qui en découlent : les quantités ultrapetites et les quantités ultragrandes. L'image mentale que l'on se forme est celle d'échelles de grandeur. Les nombres usuels (définis sans référence au concept d'observabilité) sont ceux que l'on peut voir sans microscope ni télescope. Ensuite il y a des nombres ultrapetits (non nuls et plus petits en valeur absolue que n'importe quel nombre observable strictement positif). Bien que ce soient des réels, un microscope est nécessaire pour les voir. Leurs inverses seront bien évidemment ultragrands. Un télescope est nécessaire pour voir ces nombres. Si on zoome sur un nombre observable, par exemple 2, des nombres ultraproches de 2 deviennent observables. Mais on peut recommencer : il n'y a pas de fin au nombre de fois que l'on peut zoomer : c'est la différence majeure avec les autres approches nonstandard.

Ce qui doit être noté est que bien que ces concepts puissent être rendus assez intuitifs, ils sont ici complètement formalisés et mathématiquement cohérents. Une fois les bases établies lors des premières leçons, il n'est plus nécessaire d'introduire de nouvelles propriétés ni résultats.

On montre ici deux preuves (avec les définitions nécessaires) pour illustrer comment cela peut fonctionner en classe. Il faut se rappeler que tous les mots auront été au préalable définis de manière précise. Le but ici n'est pas de faire du lecteur un expert en la matière mais un témoin de ce qui peut se passer en classe.

Continuité

Le formalisme utilisé exprime que la continuité préserve la proximité. Une fonction *f* est continue en a si

$$(\forall x)\big(x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq f(a)\big)$$

Ce qui se lit : si x est ultraproche de *a* alors *f(x)* est ultraproche de *f(a)*. Le quantificateur indique que la proximité de *f(x)* avec *f(a)* ne doit pas dépendre du choix de x. Le théorème suivant est un des théorèmes classiques sur la continuité :

> Si g est continue en a et f est continue en g(a), alors f∘g est continue en a.

Démonstration : Soit $x \simeq a$. Alors $g(x) \simeq g(a)$ par continuité de *g* en *a* et $f(g(x)) \simeq f(g(a))$ par continuité de *f* en *g(a)*. □

Cette preuve peut aussi être présentée en utilisant $g(a)=y$ et $g(x)=u$. Alors $u \simeq y$ par continuité de *g* en *a* et par continuité de *f* en *y* on a $f(u) \simeq f(y)$. □

Cette démonstration est complète et doit être comparée avec la preuve classique dont l'énoncé

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f\big(g(a)\big)$$

annonce déjà la difficulté de montrer que la limite passe à l'intérieur.

Dérivée

On continue par la dérivée de la composition. Une fonction *f* est dérivable en *a* s'il existe un nombre observable *d* tel que pour tout *h* ultrapetit, on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq d$$

alors on écrit $f'(a)=d$.

Il est aisé de démontrer que si f est dérivable en $f(a)$ et h ultrapetit, on a

$f(a+h)=f(a)+f'(a).h+\varepsilon.h$

avec $\varepsilon \simeq 0$ et la partie qui est un nombre observable multiplié par un incrément ultrapetit est la dérivée. C'est l'équation de l'incrément. On remarquera ici une expression assez proche du formalisme de Carathéodory (Hairer 1996) ou de l'utilisation de et o(h) et O(h) de Newton ou de Landau. Ce qui ne devrait pas être vraiment une surprise dans la mesure où ce sont les mêmes concepts que l'on étudie.

Le théorème sur la dérivée de la composition s'énonce de la manière suivante :

> Si g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$, alors $(f \circ g)$ est dérivable en a et $(f \circ g)'(a)=f'(g(a)).g'(a)$.

La démonstration classique commence en général par

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x) - f(g(a))}{x-a}$$

et continue par l'introduction (à l'intérieur de la limite !) du produit/division par

$g(x)-g(a)$.

Mais en respectant les règles données sur les limites, on pourrait tout aussi bien écrire

$$\lim_{x \to a} \frac{f\big(g(x)\big)}{x-a} - \lim_{x \to a} \frac{f(g(a))}{x-a}$$

comme pour la dérivée de la somme, ce qui est une différence de deux formes indéterminées. C'est-à-dire que selon l'ordre dans lequel on procède, on trouve un résultat ou non. Et donner comme règle qu'on ne doit prendre les limites qu'à la fin, c'est introduire une règle arbitraire de plus. A la différence de « ∞ » qui n'est pas un nombre, un ultragrand est un nombre réel et la différence de deux réels existe – même si son ordre de grandeur n'est pas toujours facile à déterminer.

Ici, on procède de manière directe sans introduction de facteurs/diviseurs supplémentaires.

Démonstration : On commence avec l'équation de l'incrément ∞ : Soit h ultrapetit. On pose :

$f(g(a+h))=f(g(a)+g'(a)\cdot h+\varepsilon\cdot h)$ et on note, pour clarifier, $k=g'(a)\cdot h+\varepsilon\cdot h$. On a donc $f(g(a+h))=f(g(a)+k)$.

D'où $f(g(a)+k)=f(g(a))+f'(g(a))\cdot k+\delta\cdot k$. Le dernier terme est un ultrapetit fois un ultrapetit et ne fera donc pas partie de la dérivée. On développe

$$\begin{aligned} f'(g(a))\cdot k &= f'(g(a))(g'(a)\cdot h+\varepsilon\cdot h) \\ &= f'(g(a))\cdot g'(a)\cdot h+f'(g(a))\cdot\varepsilon\cdot h. \end{aligned}$$

La partie qui est un observable multiplié par h est $f'(g(a))\cdot g'(a)$; c'est donc la dérivée. □

Commentaire didactique

Nous procédons à la première étape dans une étude didactique, qui est de tester une méthode et de rassembler des informations basées sur les expériences personnelles.

On explique la dérivée de, par exemple, $f(x)=x^2$ en $x=3$ en disant qu'on fait un zoom sur $\langle 3,f(3)\rangle$ et on compare $f(3)$ avec $f(3+h)$ (pour un h ultrapetit). Ce qu'on voit est extrêmement proche d'une ligne droite dont la pente est $6+h$. Tout cela est sans problème. La dérivée est alors définie comme la partie observable de cette pente et donc $f'(3)=6$. On pourra faire remarquer que, fondamentalement, la démarche est identique à la démarche traditionnelle – ce qui est vrai. Mais cognitivement, la différence est énorme. Avec la définition classique, la difficulté cognitive bien connue est que la dérivée est définie lorsque la droite ne repose plus que sur un seul point et semble pouvoir alors prendre n'importe quelle pente. L'utilisation de la tangente pour justifier le résultat pose la question de la circularité dans la définition de la tangente elle-même. La préservation de la proximité semble une étape intellectuelle plus simple.

De manière générale, le formalisme suit de près l'image mentale que l'on se fait de grande proximité. Il n'y a pas de conflit avec le fait que les nombres ne bougent pas les uns vers les autres ni ne tendent à aller où que ce soit. Arbitrairement petit est directement interprété comme ultrapetit.

Les étudiants sont préparés pour leurs

études supérieures par le fait qu'on donne une définition de la limite, mais après que les concepts de base aient été bien compris. La continuité étant définie comme ci-dessus, la limite d'une fonction en un point est donnée par la valeur que devrait prendre cette fonction pour être continue en ce point. Il faut noter que cela suffit pour que les élèves puissent trouver la définition exacte : une fonction *f* a une limite en *a* s'il y a un nombre observable *L* tel que pour tout x on a : $x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq L$.

Nous avons revu des élèves après leur passage à l'université ou à l'EPFL. Dans l'ensemble, ils ont bien compris les concepts de base (continuité, dérivée, intégrale), ont eu un bon entraînement à la démonstration avec rigueur et ont pu facilement transposer la notion d'ultraproximité à celle de « tendre vers » et celle de « voisin observable » avec « prendre la limite ». Certains élèves de formation habituelle, c'est-à-dire ayant appris les limites sans ε, δ mais avec force gestes et mouvements de doigts, souffrent beaucoup plus de la découverte de l'apprentissage de la rigueur. Ce dernier point aurait besoin d'être corroboré par des études extérieures.

Qu'il n'y ait pas de malentendu : nous ne prétendons pas que l'analyse avec ε, δ devrait être remplacée par l'analyse avec ultrapetits dans tous les cas. Pour le contrôle de l'erreur – ou ε n'est pas ultrapetit – cette méthode est même nécessaire et très naturelle. Nous nous sommes concentrés sur les avantages pour un cours d'introduction.

La motivation première de cette recherche était de remettre plus de rigueur dans les cours d'analyse au gymnase. Nos élèves auront vu toutes les démonstrations de ce qu'ils citent – y compris, par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires.

Des collègues qui ont adopté cette approche la trouvent plus satisfaisante. Pour l'enseignant comme pour les élèves, elle devient vite très naturelle. Pour la prochaine étape, il faudrait que des didacticiens viennent voir. Ils seront les bienvenus.

Références

Hairer, E. & Wanner, G. (1996). *Analysis by its History*. New York : Springer Verlag.

Hrbacek, K., Lessmann, O. & O'Donovan, R. (2015). *Analysis with Ultrasmall Numbers. Boca Raton*, London, New York : CRC Press.

Hrbacek, K., Lessmann, O. & O'Donovan, R. (2010). Analysis with Ultrasmall Numbers. *American Mathematical Monthly* 117(9), 801-816.

Lakoff, G. & Nunez, R. (2000). *Where Mathematics Come From*. New York : Basic Books.

Maschietto, M. (2005). Exploration de fonctions, linéarité locale et calculatrices graphiques. *Math-Ecole* 216, 37-44.

O'Donovan, R. (2009). Teaching Analysis with ultrasmall numbers. *Mathematics Teaching Research Journal* 3(3), 1-22.

Philippe s'en est allé...

Philippe Depommier est décédé le mercredi 30 septembre dernier. Il avait rejoint le groupe ddmes (didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé) en septembre 2002, au terme de sa formation d'enseignant spécialisé. Philippe présentait le profil atypique, et sans doute unique en son genre, d'un enseignant ayant accompli à la fois une formation mathématique académique et une formation d'enseignant spécialisé. Au collège de Pully où il enseignait, il a ainsi porté pendant plusieurs années la double casquette de « prof de maths » et d'« enseignant de classe spéciale ». Passionné par les questions soulevées par l'enseignement des mathématiques auprès des élèves qui se trouvent en marge de l'école ordinaire, il avait apporté une contribution (Depommier, 2004) à Math-école en 2004 et animé un cours intitulé « Mathématiques et créativité » dans le cadre de la formation des enseignants spécialisés à la HEP de Lausanne. Au sein du groupe ddmes, sa disparition laisse un grand vide : il en était le trésorier et avait activement participé aux travaux de recherche, ainsi qu'aux événements qui, depuis bientôt vingt ans, ont marqué la vie du groupe.

Jean-Michel Favre

Depommier, P. (2004). Une expo pour le bicentenaire : le nombre 1803 ou une expérience mathématique en classe développement. *Math-école* 210, 26-28.

Math-École, pour ceux qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques !

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences.

Les articles doivent parvenir en version électronique, par email adressé à la rédaction (mathecole@ssrdm.ch). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Contact : mathecole@ssrdm.ch

Site internet :

http://www.mathecole.ch

Pour commander des numéros de Math-Ecole vous pouvez adresser vos demandes à mathecole@ssrdm.ch ou utiliser le formulaire de commande disponible sur le site.

- CHF 5.- les numéros 218 - 222

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 50 depuis la rubrique *Consultation en ligne*.

Couverture

Détail d'un oeuf géométrique pavé réalisé par Alessia, Collège de Delémont.