MATH ECOLE

37e année

184

octobre 1998

Math-Ecole,
pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros): Suisse Fr. 25.- / Etranger FS. 30.- CCP 12-4983-8

Prix au numéro : Fr. 6.-
anciens numéros : Fr. 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 Fr. 18.- par abonnement
de 10 à 50 Fr. 17.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7**,
par courrier électronique E-mail : **François. Jaquet @ irdp. unine. ch**,
ou par INTERNET : **http://www.unine.ch/irdp/math-eco/**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE

37e année 5 numéros par an

184

octobre 98

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut de Recherche
et de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél. (032) 889 8603
(de 14h à 17h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 8609
Fax (032) 889 6971

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

Editorial

Moyens d'enseignement mathématiques 5e – 6e : un toilettage au service de la cohérence

Michel Chastellain, SPES (VD)

Depuis quelques années déjà, les moyens d'enseignement mathématiques des classes de la première à la quatrième années primaires de Suisse romande sont en cours de réécriture. A ce jour, les manuels 1P et 2P sont déjà dans les classes, alors que l'élaboration de l'ouvrage de 3P est en phase terminale. Sans entrer dans trop de détails – beaucoup d'enseignants et surtout d'enseignantes ayant eu l'occasion de découvrir les concepts sous-jacents durant plusieurs modules de formation – rappelons que les nouveaux moyens 1P – 4P reposent sur des réflexions didactiques et pédagogiques qui tiennent compte des derniers résultats de la recherche et qui se réfèrent au socio-constructivisme : résolution de problèmes, phases d'appropriation, de recherche, de mise en commun, de synthèse, d'institutionnalisation, interaction entre les élèves, apprentissage différencié, rôle des conceptions préalables, etc.

Dans un autre ordre d'idée, la Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin vient d'adopter tout récemment un nouveau «*Plan d'études romand de mathématiques pour les degrés 1 à 6*»[1] qui représente une synthèse du programme de mathématiques, de ses finalités et de la manière de le concevoir pour les années concernées.

Parallèlement à cette double évolution, un avant-projet intitulé «*Conception d'ensemble pour des nouveaux moyens d'enseignement mathématiques 7-8-9*»[2], après avoir été livré aux autorités compétentes en juin 1998 par une commission ad hoc, a été soumis à une large consultation auprès des cantons et des associations professionnelles. Bien qu'il soit encore un peu tôtpour présenter les résultats de cette enquête, ce sera chose faite dans un tout prochain éditorial, on peut d'ores et déjà constater que les fondements qui sous-tendent cet avant-projet s'inscrivent dans la même ligne didactique que les conceptions théoriques adoptées par les moyens d'enseignement mathématiques 1P – 4P.

Dès lors, il devenait inconcevable de réécrire les moyens d'enseignement des «petites classes», tout en créant de nouveaux ouvrages communs pour les trois dernières années de la scolarité obligatoire, sans toucher aux méthodologies des années intermédiaires, c'est-à-dire celles de la cinquième et de la sixième. Voilà pourquoi COROME (Commission romande des moyens d'enseignement) a pris tout récemment la décision d'adapter les moyens existants pour qu'ils représentent un véritable trait d'union entre ces deux niveaux d'enseignement.

Quelle adaptation ?

Grosso modo, deux conceptions sont envisageables : soit faire table rase et élaborer de nouveaux ouvrages, soit adapter les moyens existants, afin de les réactualiser et d'assurer ainsi une continuité avec l'édition précédente. Dans le premier cas, l'opération se révèle particulièrement «lourde» et le temps à disposition – le délai d'introduction est prévu pour l'an 2001 – s'avère insuffisant. De plus, il ne faut pas oublier les résultats de l'étude menée par l'IRDP[3] dont la synthèse fait apparaître un certain nombre d'éléments pertinents, notamment :

- «... les ouvrages romands de mathématiques semblent bien répondre aux attentes des maîtres qui en acceptent les lignes directrices ...»
- « ... ils sont largement utilisés, mais en opérant des choix ...»

---

[1] voir les éditoriaux de *Math-Ecole* 181, intitulé «*Plan d'études*» et 183, «*Un modèle en Suisse romande*».

[2] voir l'éditorial de *Math-Ecole* 177, «*CIRCE III : comme un coup de baguette magique*».

[3] J.-A. Calame, *Math 5 – 6 ... pas si mal !*, IRDP, Recherches 95.102, 1995.

- « ... le livre du maître fait clairement office de référence ...»
- « ... il existe une très grande diversité de pratiques à propos de certaines activités, comme les ATELIERS MATHEMATIQUES par exemple ...»
- « ... on peut fort bien garder encore quelques années les moyens tels quels. Des adaptations sont nécessaires, mais une refonte complète ne s'impose pas ...»

Dans le second cas, non seulement le travail est réalisable dans les délais impartis, mais encore il peut répondre à l'attente exprimée dans le rapport susmentionné, rapport qui stipule également que :

- « ... les adaptations peuvent être de deux ordres :
  - des modifications, suppressions, adjonctions,
  - des indications sur la pertinence des activités, les cheminements possibles et le rôle du maître en situation ouverte.»

Le choix retenu a donc été celui d'une retouche «légère» du livre et du fichier de l'élève, sous la forme :

- D'une actualisation d'un certain nombre de données (par exemple, le problème qui évoque la victoire de Noah à Roland Garros en 1983 ne correspond plus aux références des élèves d'aujourd'hui qui connaissent Sempras ou Rios).
- D'une suppression d'un certain nombre d'exercices, justifiés à l'époque en tant que suite «logique» de notions abordées dans les anciens moyens d'enseignement des quatre premières années (par exemple, l'étude des relations entre deux ensembles n'a plus sa raison d'être puisque[4] «l'innovation actuelle propose des changements particulièrement importants à propos du symbolisme ensembliste.
- D'un certain nombre d'ajouts sous la forme de recherches complémentaires, de problèmes, de situations-problèmes et de problèmes ouverts permettant ainsi d'étoffer le thème «ATELIERS».

D'une manière générale, ces travaux de mise à jour devraient représenter une transformation des contenus de l'ordre de 25 à 30 % des activités actuelles.

En ce qui concerne le livre du maître, la modification sera plus importante, afin de tenir compte de la forte demande de formation à la gestion d'un enseignement par le problème. C'est ainsi que l'on peut raisonnablement envisager que le nouveau moyen d'enseignement fournira de nombreuses pistes pour faciliter le travail de l'enseignant, dans les domaines des propositions d'organisation de la classe, de la gestion du temps, des comptes-rendus d'élèves, de l'évaluation (formative et sommative), du rapport au programme, des obstacles et de la manière de les franchir, des pressions institutionnelles, ou encore, de la modification fondamentale du rôle du maître face à sa classe en situation de recherche.

L'an 2003 devrait marquer la sortie des nouveaux moyens d'enseignement des degrés 7,8 et 9. A cette époque, la collection complète des ouvrages mathématiques de la scolarité obligatoire de Suisse romande reflétera alors enfin une parfaite cohérence interne dans le domaine de la réflexion didactique. Cette finalité ne pouvait se passer d'un toilettage adéquat des ouvrages «Mathématiques 5-6».

La décision qui vient d'être prise par COROME est donc particulièrement réjouissante.

4 A. Gagnebin et al., «*Apprentissage et enseignement des mathématiques – Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*», COROME, 1997, p.19.

La CIEAEM au travers de ses 50 premières rencontres

Matériaux pour l'histoire de la commission

C'est le titre d'une brochure[1] de 48 pages publiée à l'occasion de la 50e rencontre de la CIEAEM à Neuchâtel, en août 1998 réalisée par Théo Bernet et François Jaquet.

Table des matières :

- Présentation, de Théo Bernet : un court historique de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM), de sa première rencontre en 1950 à aujourd'hui.
- Extraits de textes : pour aller plus loin dans l'analyse historique et percevoir les enjeux de l'enseignement des mathématiques en Europe, dans la seconde moitié du siècle. Au passage on verra apparaître de grandes figures comme celles de Jean Piaget, Caleb Gattegno, Ferdinand Gonseth, Félix Fiala, Lucienne Félix, Willy Servais, Emma Castelnuovo, ...
- Bibliographie : Tous les textes sur la CIEAEM, dont les deux livres, publiés chez Delachaux & Niestlé, rendant compte des premières rencontres.
- Tableau des rencontre de la Commission: la «colonne vertébrale de tout historique de la CIEAEM, avec la composition de ses comités successifs et la liste des actes publiés.

[1] Cette brochure est diffusée par l'intermédiaire de Math-Ecole (CHF 6.- voir p. 3 de couverture)

Un riche recueil de textes et d'informations sur les origines des réformes qui se succèdent à un rythme accéléré dans l'enseignement des mathématiques de ces trente dernières années.

A titre d'exemple, voici un document figurant dans la brochure (p. 23 et 24) qui illustre parfaitement les préoccupations de l'époque à laquelle il a été rédigé, qui sont encore celles des chercheurs et praticiens d'aujourd'hui.

«(De la main de Gattegno) ***Plan de travail de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.*** (CIEAEM) Pâques 1952

Projets à long terme

I Analyser les transformations apportées dans la compréhension des mathématiques en tant qu'activité par :

a) la crise des fondements;

b) l'oeuvre des Bourbaki;

c) les progrès de l'épistémologie ma thématique;

d) les expériences d'enseignement aux divers degrés;

e) la psychologie.

II Etudier les exigences nouvelles imposées au programme des mathématiques par :

a) l'industrialisation croissante;

b) les transformations sociales;

c) la conscience mondiale.

...

IV Intéresser le public par l'intermédiaire des Associations et faire accepter par l'UNESCO une méthode adéquate de diffusion sur le plan international.
En particulier, prendre l'initiative d'organiser des enquêtes nationales ou internationales; de constituer des comités spécialisés; de participer aux travaux de commissions similaires établies par d'autres groupements; etc.

Projets à courte échéance

I Pour les professeurs d'université.

a) Etudier avec leurs collègues de l'Université, physiciens, chimistes, naturalistes, les exigences nouvelles de la Science en vue de préciser dans quelles directions doit être orienté l'enseignement des mathématiques.

...

c) Former avec leurs collègues du second degré des séminaires où soient étudiées la transition et la façon dont peuvent être réalisées leurs exigences.

d) Tenter d'établir des contacts plus étroits avec leurs étudiants et d'étudier l'évolution de leurs structures mentales sous l'action de leur enseignement.

II Pour les professeurs des autres degrés.

a) Transformer quelques-unes de leurs leçons en enquêtes psychologiques sur la matière du programme, afin de reconnaître les structures mentales présentes et leur écart avec les structures mathématiques exigées.

...

c) Examiner comment l'élève prend conscience des transitions d'un niveau à un autre, par exemple du plan du calcul numérique au calcul algébrique et de la difficulté de l'inversion de ce passage.

...

f) Utilisation de certains moyens nouveaux d'expression tels que le cinéma.

g) Rassembler et coordonner les observations sur les difficultés rencontres le plus couramment par l'élève, sur les fautes les plus fréquentes, par exemple dans le calcul algébrique.

... »

CASSE-TETE

Corine et Mathieu se sont acheté, tout récemment, deux superbes tapis en provenance du «Sarconistan» ! Le premier mesure 1m x 8 m, alors que la taille du second est de 10 m x 10 m.

Malheureusement, la pièce dans laquelle ils comptent les placer est une surface rectangulaire de 9 m x 12 m.

Ils ne désirent couper que le plus grand des deux tapis, et seulement en deux morceaux.

Comment vont-t-ils procéder ?

Merci d'envoyer votre solution à la rédaction.

Septième Rallye mathématique transalpin

Après six ans d'expériences enrichissantes, de travail intense et d'activités toniques, les responsables du Rallye mathématique transalpin ne sont pas encore épuisés. Au contraire, ils repartent dans une nouvelle confrontation, avec des objectifs toujours mieux définis, à la lumière d'une pratique désormais bien établie.

Comme par le passé, le rallye propose aux élèves :

- de faire des mathématiques en résolvant des problèmes;
- d'apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées;
- de développer leurs capacités, aujourd'hui essentielles, à travailler en équipe en prenant en charge l'entière responsabilité d'une épreuve;
- de se confronter avec d'autres camarades, d'autres classes;

et aux maîtres :

- d'observer des élèves (les leurs lors des essais et ceux d'autres classes au cours des épreuves suivantes) en activité de résolution de problème;
- d'évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe;
- d'introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants;
- de s'engager dans l'équipe des animateurs et de participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Ces buts ont déjà largement été évoqués dans les colonnes de *Math-Ecole*, qui reste le principal vecteur d'information du rallye. Les adaptations pour cette prochaine édition sont toutefois importantes et méritent d'être signalées :

Une meilleure adaptation aux classes de 3e et 4e année

A l'origine destiné aux classes des degrés 3 à 5, le rallye s'est étendu aux degrés 6, puis 7 et 8. Ce développement a provoqué un phénomène «d'aspiration vers le haut». Les nombreux problèmes communs à différents degrés ont entraîné des objectifs trop ambitieux pour la 3e surtout, mais aussi la 4e année. Les barèmes communs ont dévalorisé le travail des petits qui n'obtiennent pas le nombre de points correspondant à la valeur de leur engagement.

Il y aura désormais deux versions pour chaque épreuve du rallye: celle des degrés 3 à 5 et celle des degrés 6 à 8. Pour les problèmes communs aux deux versions, les sujets seront différenciés par leurs présentations et par les critères d'évaluation.

Un engagement plus direct des équipes d'animation

Le développement du rallye dans de nouvelles régions et son extension à d'autres degrés de la scolarité entraînent des problèmes de communication et de coordination dans la préparation des épreuves, les traductions, l'analyse des résultats. Il faut à la fois profiter des compétences de toutes les équipes pour améliorer la qualité du travail et éviter les pièges de la centralisation qui risque de fondre les apports individuels dans une entreprise impersonnelle où l'on ne se reconnaît plus.

Il y a des responsabilités à redéfinir, des coopérations à développer, des tâches à répartir et réadapter aux compétences et intérêts de chacun. Par exemple, il est difficile, pour un animateur qui enseigne à l'école primaire de se prononcer sur la pertinence de certains sujets proposés aux classes de l'école secondaire, comme il est difficile pour un maître de ces degrés d'imaginer les difficultés de lecture des énoncés destinés aux «petits» de 8 à 9 ans. Il n'est plus possible non plus, pour une seule équipe, de conduire les analyses approfondies nécessaires au maintien de l'intérêt et de la qualité des problèmes du rallye. Une coopération élargie permettra d'atteindre ces objectifs, pour autant que les tâches soient réparties.

L'avenir immédiat

La 7e édition du rallye conserve son caractère transalpin, avec une tendance à l'élargir, au risque de quelques abus de terminologie géographique. De nouvelles coopération s'esquissent, plus ou moins proches de l'arc alpin, au Tessin, en Tchéquie, en Franche-Comté ?

Sans règles du jeu, il ne peut y avoir de comparaisons productives. Le rallye établit donc **un contrat entre l'équipe d'animateurs, les maîtres et les classes participantes**, dont voici les termes essentiels :

- Lors de chaque épreuve la classe reçoit, selon sa catégorie, une série d'une dizaine de problèmes à résoudre.
- Ces problèmes sont choisis, en nombre et en difficulté, de telle façon que chaque élève, indépendamment de son niveau, puisse y trouver son compte et que l'ensemble de la tâche soit globalement trop lourd pour un seul individu, aussi rapide soit-il.
- La classe dispose d'un temps limité, de 45 à 60 minutes, selon les régions ou les degrés, pour s'organiser, rechercher les solutions, en débattre et les rédiger.
- Les élèves doivent produire une solution unique pour chacun des problèmes; c'est la classe qui est responsable des réponses apportées, sans aucune intervention du maître.
- La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après une épreuve d'essai au cours de laquelle les uns et les autres ont pu saisir les enjeux d'une résolution collective de problèmes, à la charge des élèves seulement.
- Les épreuves qui suivent les essais se font hors de la présence du maître titulaire de la classe. Celui-ci est remplacé par un collègue avec qui, si possible, il fait un échange. Il quitte donc son rôle d'enseignant pour celui d'observateur, s'abstenant de toute intervention, de quelque nature que ce soit, dans la classe dont il a le contrôle pendant la durée de l'épreuve. Son rôle se limite à la distribution des sujets, au contrôle de la durée et à l'envoi des copies à l'équipe qui sera chargée de les évaluer.
- Il n'y a pas que la «réponse juste» qui compte, les solutions sont jugées aussi sur la rigueur des démarches et la clarté des explications fournies.
- L'évaluation des copies est faite par l'équipe régionale responsable, selon les

critères fournis par le groupe central de conception des problèmes. Pour chaque catégorie, un classement est établi, par région, sur l'ensemble des deux épreuves I et II. C'est lui qui détermine la participation aux finales régionales. Les critères d'évaluation et le résultat de chaque problème, ainsi que les classements, sont communiqués aux classes dans les meilleurs délais.

- Après chaque épreuve le maître est libre de photocopier les solutions produites par la classe, d'exploiter les problèmes, de les discuter, de les reprendre et d'analyser les résultats avec l'ensemble des élèves.

Organisation pratique

Pour la Suisse romande et le Tessin, le 7e *Rallye mathématique transalpin* s'organisera selon quatre étapes :

- **une épreuve d'essai**[1] , en novembre ou décembre 1998, pour déterminer l'intérêt de la classe et décider de son inscription[2]. Cette étape est placée sous l'entière responsabilité des maîtres qui choisissent les problèmes, les proposent selon les principes du rallye, en discutent avec leurs élèves, s'occupent de l'inscription et de son financement;
  la date limite pour l'inscription est le 31 décembre 1998;
- une **première épreuve**, entre le 20 et le 29 janvier 1999, selon entente entre les maîtres concernés, titulaires et surveillants;
- une **deuxième épreuve** entre le 18 et le 31 mars 1999;
- une **finale**, le mercredi après-midi 5 mai 1999, regroupant les classes romandes ayant obtenu les meilleurs scores dans les deux épreuves, vraisemblablement à Yverdon-les-Bains et peut être au Tessin.

Les épreuves sont envoyées deux ou trois jours avant la période de passation. Les maîtres s'organisent pour la photocopie des problèmes, ils prennent contact avec leurs collègues pour les «échanges de surveillances», ils envoient les solutions de leur classe pour l'évaluation, après les avoir - éventuellement - photocopiées pour les exploitations didactiques des problèmes.

L'équipe d'animateurs se réunit les mercredis 11 novembre, 16 décembre 1998, 4 février, 14 avril et 5 mai 1999, pour les travaux d'élaboration des problèmes, pour la correction et l'évaluation des copies reçues et pour l'analyse des résultats.

L'appui scientifique au *Rallye mathématique transalpin* est assuré par différentes institutions de recherche en didactique des mathématiques, dont l'IRDP, qui participe aussi aux tâches administratives pour la Suisse romande.

Math-Ecole diffuse l'information sur le *Rallye mathématique transalpin*, en Suisse romande et au Tessin, et le soutient financièrement. Toutefois les classes inscrites parti-

[1] Pour constituer une épreuve d'essai, on peut reprendre des problèmes des 5e et 6e *Rallye mathématique transalpin* publiés en 1997 et 1998 dans *Math-Ecole* : no 176, pp. 39 à 42 (RMT5. épr. I), no 177, pp. 16, 33, 35 et 36 (RMT5. épr. II), no 178 pp. 37 à 42 (RMT5. fin.), no 181, pp. 39 à 42 (RMT5. épr. I), no 182, pp. 28 à 31 (RMT6. épr. II), no 183 pp. 3 à 7 (RMT6. fin.). On trouve encore de nombreux problèmes dans les numéros plus anciens de *Math-Ecole*. Ceux qui ont épuisé toutes ces sources ou qui ne disposent pas des anciens numéros de *Math-Ecole* peuvent demander une épreuve d'essai au moyen du bulletin d'inscription suivant ou la prendre sur le site Internet de *Math-Ecole* : http: www.unine.ch/irdp/math-eco/.

[2] Voir bulletin d'inscription de la page suivante.

cipent aux frais pour un montant de 35 Fr., à l'exception de celles dont les maîtres sont engagés dans les travaux d'élaboration et d'analyse.

Bénévolat et engagement

L'équipe romande actuelle des animateurs est composée d'une vingtaine de personnes, dont la plupart participent au concours avec leur classe. L'an dernier, avec plus de cent quarante classes, les tâches d'élaboration et de correction ont été supportables, mais certaines analyses n'ont pas été faites et les rapports promis n'ont pas tous été rédigés. Cette année, la participation sera certainement encore plus élevée et les analyses séparées pour les catégories 3 - 5 et 6 - 8 demanderont encore plus de temps. L'objectif serait d'atteindre une trentaine d'animateurs et de pouvoir constituer une équipe tessinoise, pour éviter de longs déplacements.

La participation financière des classes suffit à peine à couvrir les frais d'expédition des nombreux courriers nécessaires, le coût des photocopies et l'achat des prix souvenirs que reçoivent chaque élève, finaliste ou non. Le travail d'animation est entièrement bénévole. Le seul avantage économique du (de la) titulaire qui y participe est l'exonération de la finance d'inscription de sa classe. Mais, en compensation, l'animation du rallye est une tâche gratifiante et d'un très grand intérêt professionnel. Il faut espérer que de nombreux maîtres et maîtresses des classes participantes accepteront de venir renforcer l'équipe des animateurs.

✂ -

Ce bulletin d'inscription est à retourner à *Math-Ecole*, IRDP, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7, avant le 31 décembre 1998.

Je souhaite participer avec ma classe au *7e Rallye mathématique transalpin*

Nom et prénom du titulaire : ....

Adresse personnelle : ....

.... **tél.** ....

J'accepte de m'engager dans l'équipe des animateurs (évaluation, analyse ou rédaction des épreuves) dans la mesure de mes disponibilités : oui non

Renseignements sur ma classe :

Classe : .... **degré (3, 4, 5, 6, 7, 8) :** .... **nombre d'élèves :** ....

Collège (nom, adresse) :

....

Je désire recevoir des problèmes pour une épreuve d'essai : oui non

Signature : .... **Date :**...

Entre arithmétique et géométrie

François Jaquet, IRDP

Introduction

Il n'est pas rare que, dès les premières années d'école primaire, on propose des problèmes numériques dans un contexte géométrique. C'est le cas pour les dénombrements d'objets disposés en lignes et colonnes lors de d'introduction de la multiplication, pour de nombreuses activités en rapport avec les mesures élémentaires de longueurs, etc.

Dans ces problèmes on fait appel au comptage, aux opérations arithmétiques élémentaires, mais aussi à des notions de géométrie qui, même si elles ne figurent pas explicitement dans les programmes, apparaissent pourtant nécessaires dans la démarche de résolution.

Nous nous proposons, dans cet article, d'examiner un de ces problèmes, tiré du 6e Rallye mathématique transalpin (RMT). Mais avant d'entrer sans son analyse, il est nécessaire de rappeler son origine et ses conditions de passation.

Parmi les objectifs du RMT[1], on relève l'approche des mathématiques par la résolution de problèmes, l'initiation au débat scientifique, le développement de la capacité à travailler en équipe, la constitution d'une source de données utiles à la didactique des mathématiques et la valorisation de la recherche auprès des enseignants.

[1] Voir article «7e Rallye mathématique transalpin, p. 6»

Ces objectifs exigent un important travail d'élaboration des problèmes. Ceux-ci doivent être pertinents au plan mathématique, satisfaire les critères généraux de qualité qu'on exige actuellement des situations d'apprentissage, être intéressants et engageants, correspondre au degré de développement des élèves, permettre des liens avec le programme de mathématiques traité en classe, offrir différentes stratégies de résolution et des occasions de faire évoluer les représentations des élèves.

Les critères de choix spécifiques des problèmes de concours, sont déterminés avant tout par les contraintes du «contrat» ou le règlement de la compétition : limitation du temps à disposition, absence du maître ou de relance extérieure, entière responsabilité des élèves dans la gestion de leur travail, choix d'une seule réponse pour chacun des problèmes proposés à la classe, obligation d'expliquer la démarche suivie et de justifier la solution, originalité des sujets présentés pour assurer la régularité de la compétition et variété des difficultés pour permettre à chacun de participer en fonction de ses compétences.

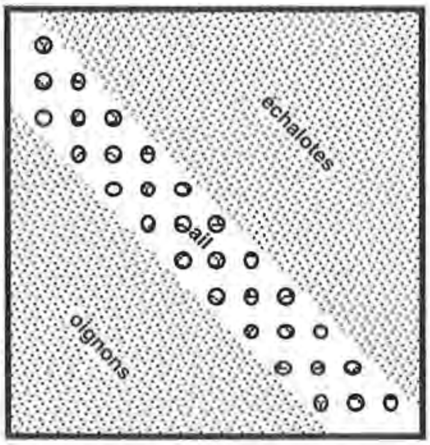
Le problème qui suit a été proposé, en février et mars 1998, dans le cadre de la première épreuve du 6e RMT, à 150 classes des degrés 3, et 4 (8 - 9 ans et 9 - 10 ans) de Suisse romande, France, Italie et Luxembourg. Chaque classe disposait de 50 minutes pour résoudre sept problèmes, dont celui-ci, et fournir une seule solution justifiée pour chacun d'eux. L'épreuve se déroulait en l'absence de l'enseignant, remplacé par une personne neutre chargée seulement de la distribution des feuilles et du contrôle de la durée. Chaque classe avait déjà résolu au moins une série de problèmes dans les mêmes conditions, lors d'une épreuve d'essai ou lors des années précédentes.

Au delà de ces informations définies par les règles de l'épreuve, on ne connaît pas le degré de préparation des classes à ce type d'épreuve, ni les modes de formation des groupes, ni l'intensité des interactions, au sein de la classe, qui ont conduit aux solutions présentées.

Le problème

LE POTAGER DE GRAND-MERE

Voici le jardin potager de Grand-mère. Il est de forme carrée.



Elle a déjà planté 30 plants d'ail et souhaite mettre des oignons et des échalotes dans les deux zones voisines.

Grand-mère est très ordonnée et précise. Elle tient absolument à ce que toutes ses plantes soient disposées régulièrement et parfaitement alignées.

Combien d'oignons et combien d'échalotes devra-t-elle planter ?

Expliquez votre raisonnement.

Analyse a priori

Tous les problèmes du RMT, sont accompagnés d'une brève description analytique destinée aux équipes régionales chargées de les relire, de les adapter éventuellement, de déterminer le choix des sujets et, finalement, de corriger l'épreuve.

Elle est rédigée par les auteurs du premier projet du problème et adaptée en fonction de l'analyse a priori. Elle est communiquée aussi à tous les maîtres qui la demandent pour connaître les critères d'évaluation, pour développer en classe certains sujets abordés, pour enrichir leur réserve de problèmes.

Voici celle du «Potager de Grand-mère» :

Domaine de connaissances

- géométrie
- dénombrement, arithmétique

Analyse de la tâche

- comprendre la disposition des alignements
- rechercher, rang par rang, le nombre d'oignons (8 + 7 + 6 + ...) et le nombre d'échalotes (10 + 9 + 8 + ...) ou dessiner tous les emplacements et les compter

Evaluation

3 Les deux réponses justes (36 et 55) avec explications

2 Une seule réponse juste avec explications ou les deux sans explications

1 Une réponse juste, sans explications

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3 - 4

Origine : Parma

A l'origine, le problème était prévu pour le degré 3 seulement, et la variable «grandeur du potager» était limitée à un carré de 8x8, dont trois rangs obliques dessinés.

Cette valeur a été jugée trop petite car elle paraissait inciter au dessin et au comptage des plantes une à une, sans faire intervenir d'opérations arithmétiques. Les dimensions du carré ont donc été légèrement augmentées (11x11) pour faire passer le nombre d'oignons de 15 (1 + 2 + 3 + 4 + 5) à 36 (1 + 2 + ...+ 8) et celui des échalotes de 28 à 55. Cet accroissement de la variable a aussi permis de proposer le problème aux classes de degré 4, afin d'analyser les stratégies de résolution en fonction de l'âge des élèves. La tâche a été jugée trop simple pour des élèves des degrés supérieurs à 4.

Le choix des plantes a été très délicat. Il fallait trouver des noms connus des élèves dans les différentes langues du RMT et des plantes de grandeurs comparables. En français, on a renoncé au mot «aulx» pour «plants d'ail» et, en italien, les choux (cavoli) ont remplacé des échalotes, au détriment de l'unité des volumes des plantes.

Le «domaine de connaissances» défini lors de l'analyse a priori se limite aux trois termes «géométrie», «dénombrement» et «arithmétique». Ceux-ci sont repris dans l'analyse de la tâche», respectivement par : «comprendre la disposition des alignements», «dessiner tous les emplacements» et par les opérations «8 + 7 + 6 + ... et 10 + 9 + 8 + ... ».

Mais les enjeux de la résolution ne sont pas encore clairement explicités à ce moment.

Solutions des élèves et justifications

Nous avons examiné 83 réponses (28 de classes de degré 3 et 55 de classes de degré 4) : celles des régions de Parme, Cagliari et Suisse romande. Elles sont regroupées selon 6 catégories, désignées par les lettres A à F, elles mêmes réparties parfois en plusieurs types, notés par les chiffres 1, 2, 3, ...

Pour chaque catégorie et chaque type, le nombre de réponses est indiqué, entre parenthèses ( ) .

A. (2) ***Sans réponse***

Deux classes (l'une de 3e, l'autre de 4e) ont rendu une feuille blanche. C'est assez rare dans les épreuves du RMT. Il peut s'agir soit d'une incompréhension totale du problème, soit d'une mauvaise répartition des sujets au sein de la classe conduisant à l'oubli ou l'abandon du sujet.,

B. (19) ***Réponses basées sur des considérations numériques, généralement sans dessin***

B.1. (5) Réponse 15 et 15 avec justifications du genre : *Abbiamo fatto la meta di 30 (On a fait la moitié de 30)* ou *:15 + 15 on a pris une calculatrice et on a essayé 14 + 14 et ça n'a pas marché.*[2]

B.2. (5) Réponse 30 et 30 avec justifications du genre : *On a fait 30 + 30 = 60 on a pensé qu'elle a voulu planter le même nombre que les ails,* ou : *Bisogna moltiplicare il 3 10 volte e si ottiene un risultato cioé 30 (Il faut multiplier 3 10 fois et on obtient un résultat qui est 30.)*

Une seule de ces explications est accompagnée d'un dessin : un quadrillage parfaitement exact, avec une plante à l'intérieur de chaque carré. Celui-ci n'a pourtant pas été pris en compte par les élèves qui justifient leur réponse ainsi : *Dato que nonna papera è molto ordinata e precisa abbiamo*

[2] L'orthographe et la ponctuation des extraits d'explications cités dans cet article, en italique, ont été rectifiés.

pensato che volesse coltivare 30 piantine di cavolo e cipolle nelle altre due zone dell'orto (Vu que grand-mère est très ordonnée et précise, nous avons pensé qu'elle voulait planter 30 échalotes et 30 oignons dans les deux autres zones du potager) .

B.3. (5) Réponses : 25 et 25 ; 33 et 33 ; 50 et 50 ; 90 et 90 ; 74 et 74

B.4. (4) Réponses : 10 et 20 ; 81 et 90 ; 20 et 26, avec l'explication :*Abbiamo calcolato il perimetro (Nous avons calculé le périmètre) - Abbiamo trovato più cavoli che cipolle (nous avons trouvé plus de choux que d'oignons).*

Les 15 premières solutions (B.1. à B.3.) qui entrent dans cette catégorie (9 de 3e, 6 de 4e) ne font appel à aucune notion géométrique, à deux exceptions près. Dans l'une, les 30 plantes d'ail sont reproduites, dans la même disposition, dans la zone des oignons comme dans celle des échalotes. Dans l'autre, la division 30 : 2 = 15 est accompagnée du dessin de 15 plantes dans chaque zone, sans aucun lien avec la disposition des aulx.

Dans toutes ces solutions, il y a égalité entre les nombres d'oignons et d'échalotes. Certains élèves ont pensé qu'il fallait encore mettre autant de plantes que d'aulx (30) répartis également dans les deux zones (réponse 15 et 15), d'autres ont pensé que les trois zones devaient contenir chacune le même nombre de plantes (réponse 30 et 30) les autres ont peut-être procédé par estimation de l'espace disponible mais n'ont pas fait de différence entre la grandeur des deux zones.

Les quatre dernières solutions (B.4.) donnent un nombre d'échalotes supérieur à celui des oignons, mais ne font pas appel à l'aire des deux zones. L'une mentionne même explicitement le périmètre.

Dans notre analyse a priori, ces types d'erreur figurent sous la rubrique «incompréhension du problème». On peut émettre de nombreuses hypothèses sur leur origine et en attribuer une part à l'énoncé. En effet, les phrases «Grand-mère est très ordonnée et précise» et «Elle tient absolument à ce que toutes ses plantes soient disposées régulièrement et parfaitement alignées», contiennent de nombreuses données implicites, sur l'extension de l'alignement des plantes d'ail aux deux autres zones, sur la conservation des distances, sur l'occupation de tout l'espace à disposition.

Dans un contexte habituel de résolution de problèmes, ces données pourraient être explicitées, lors d'une mise en commun des premières recherches par exemple ou par des relances du maître. Le contrat établi par le règlement du Rallye confie cette tâche d'explicitation au groupe classe. Cette dévolution se révèle problématique pour une partie importante des classes de degré 3 (40 %).

C. (24) **Esquisses de dispositions régulières**

Pour réaliser un «quadrillage» ou un alignement par lignes et colonnes, il est nécessaire de prendre en compte simultanément deux directions et de penser à recouvrir l'ensemble de l'espace à disposition. Dans le cas de l'alignement des plantes du «Potager de grand-mère» les deux directions sont déterminées par le cadre carré, mais s'y ajoute une troisième direction déterminée par les rangs les plus perceptibles des aulx : les trois alignements parallèles à la diagonale du carré.

Compléter la représentation des plantes initiée sur la figure n'est pas une tâche aisée, ainsi que le démontrent de nombreux dessins d'élèves.

C.1. (5) Les deux zones à compléter ne sont pas entièrement recouvertes. (fig. 1)

C.2. (12) Une seule des trois directions - ligne, colonne, diagonale - est prise en compte (fig. 2 et 3)

C.3. (7) Deux ou trois directions sont prises en compte simultanément, à proximité des aulx, mais s'estompent peu à peu en s'éloignant des trois rangs déjà donnés (fig. 4)

fig. 1

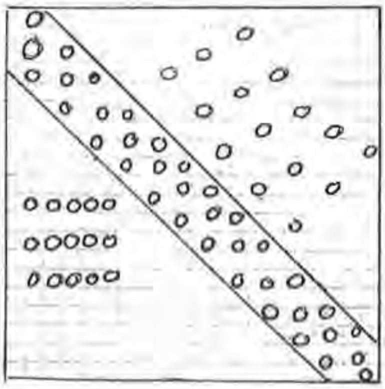


fig. 2

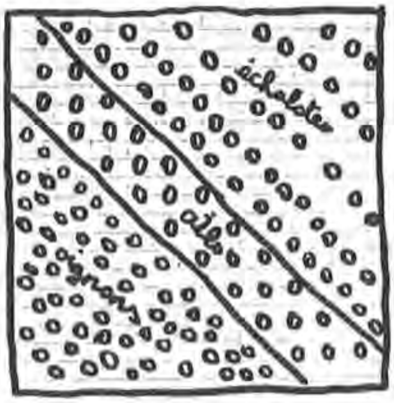


fig. 3

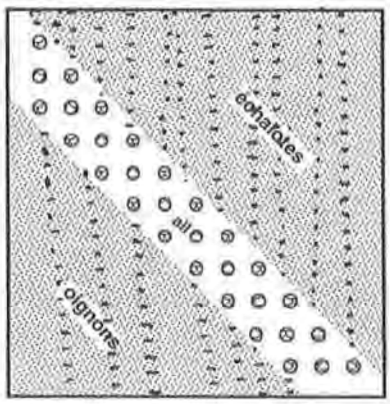
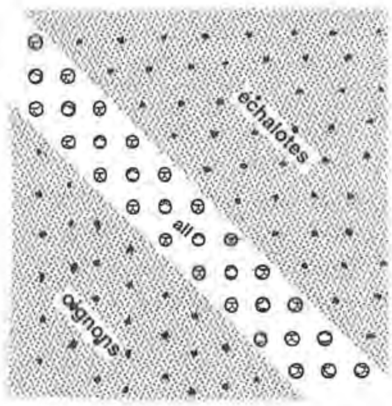


fig. 4



Dans cette catégorie de procédures, on voit clairement apparaître l'obstacle clé du problème, qui est d'ordre géométrique : comment disposer les oignons et les échalotes par extension du modèle des aulx ? Les élèves ressentent bien la nécessité de respecter les termes de l'énoncé : «ordonnée», «précise», «régulièrement» et «parfaitement alignées», mais ils ne maîtrisent pas encore la structure de cette disposition, qui repose sur des réseaux de droites parallèles (directions) et sur les équidistances entre ces droites. Ils en sont encore au niveau du dessin, plus ou moins ressemblant, sans analyse faisant appel aux propriétés géométriques de la plantation. On pourrait dire qu'ils ont une activité spatiale, dans l'espace du carré représentant le potager sur leur feuille, mais qu'ils ne font pas encore de géométrie.

D. (5) Appel à des procédures multiplicatives

Ces cinq solutions proviennent de classes de 4e année :

- 10 x 10 = 100 pour le total des plantes
- 10 x 10 = 100 pour les échalotes et

  8 x 8 = 64 pour les oignons.
- *On a mesuré l'espace entre les aulx. L'espace est de 1 cm 1/2 le repère compté et ensuite multiplié . La réponse est de 64 légumes mais les aulx ne doivent pas être comptés. Les aulx sont au nombre de 33; 64 - 33 = 31 ; la réponse est de 31 légumes.*
- Calcul par groupes de 3 : *33 oignons 42 échalotes ; on a mesuré par 3.*
- *On a fait des traits et on les a comptés. On a fait les deux calculs puis on a pris les deux réponses. Et ça fait 446 ; 22 x 24 = 204 ; 27 x 26 = 242 ; 204 + 242 = 446.* (Classe de 3e année, dans laquelle la multiplication n'a pas encore été étudiée)

Il est difficile de connaître les modèles utilisés ici. On peut imaginer, dans certains cas, une analogie avec les représentations de la multiplication associée à des dispositions d'objets en lignes et colonnes. Mais ce modèle n'est pas efficace pour déterminer les quantités de plantes dans deux zones triangulaires et d'aires différentes.

E. (10) **Dessins reposant sur des structures géométriques instables**

- 36 et 56 ; 37 et 55 (plantes alignées, avec un léger décalage entraînant une erreur),
- 55 et 55 : *A chaque croisement une échalote ou un oignon..* (avec un dessin correct),
- 35 et 49 ; 36 et 47 (avec un quadrillage correct mais des oublis dans le comptage des carrés),
- *Nous avons pris une règle et nous avons quadrillé le jardin. A chaque intersection de deux lignes nous avons planté un légume et on a trouvé 36 oignons et 77 échalotes,*
- 36 et 66 : *I cavoli sono 66 perchè la linea precedente è di 11 piantine di aglio e dopo sarà una in meno (Il y a 66 échalotes parce qu'il y a 11 plantes d'ail à la ligne précédente et, après, il y en aura une de moins.)* (malgré un dessin correct, le nombre des échalotes semble résulter de l'addition des 11 premiers nombres naturels, au lieu de 10),
- voir figures 5, 6 et 7.

  (fig. 5) : Ici, le quadrillage n'est pas adapté aux données, le cadre est un rectangle de 16x17, alors qu'il aurait dû être de 11x11.

  (fig. 6) : *D'abord, j'ai quadrillé la feuille et après j'ai compté combien il y a 30 ails et après j'ai compté deux autres ensemble ça fait 102.* Le quadrillage a une ligne de trop.

  (fig. 7) : *Abbiamo costruito una griglia traccando una linea verticale et orizzontale per ogni aglio et abbiamo dedotto che i cavoli sono 76 e le cipolle 54. (Nous avons construit une grille en traçant des lignes verticales et horizontales pour chaque plante d'ail et nous en avons déduit qu'il y a 76 échalotes et 54* *oignons.)* Il semble que, dans ce cas, les élèves ont compté les intersections de leurs lignes, entre elles et avec les côtés du cadre, sans les sommets.

fig. 5

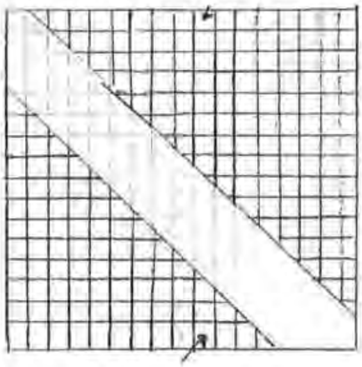


fig. 6

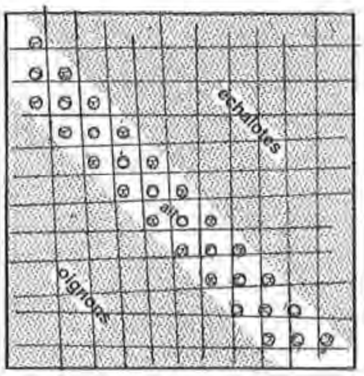
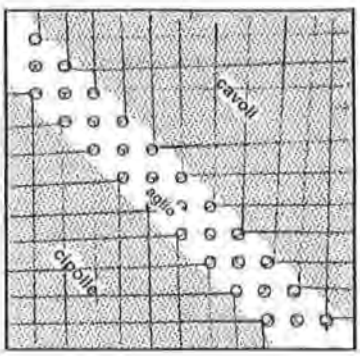


fig. 7



Dans ces dernières procédures, la représentation graphique de la situation est à peu près suffisante, mais la coordination avec les propriétés numériques de la disposition des plantes n'est pas encore efficace.

On voit nettement apparaître les notions géométriques de droites (explicitées par le dessin de lignes ou de quadrillages), de parallélisme et d'équidistance (dans la construction du réseau), d'intersection (souvent appelée «croisement» ou «carrefour»). Mais il y a des erreurs sur le nombre des plantes : soit le dessin est exact et l'erreur vient du comptage, soit le comptage est correct mais se base sur un réseau ne correspondant pas aux données initiales (oignons). Il manque un contrôle entre la représentation spatiale et les opérations arithmétiques. On peut émettre l'hypothèse qu'il existe, chez ces groupes, une insuffisance du modèle construit au plan géométrique : malgré la précision du réseau tracé, les élèves n'en ont pas saisi toute la régularité, en particulier, ils ne sont pas convaincus que, d'une ligne à l'autre, le nombre de plantes varie d'une unité.

F. (24) **Coordination efficace entre la structure géométrique et les opérations arithmétiques**

Dans les catégories précédentes, on a vu apparaître différentes procédures de résolution, conduites parfois jusqu'à une réponse très voisine de la solution exacte. Ces différentes procédures se retrouvent évidemment chez les groupes qui ont pu résoudre correctement le problème :

F.1. (7) Addition explicite des nombres de plantes des différents rangs par lignes ou par colonnes, du genre :

$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$, $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$, $36 + 55 = 91$

Elle peut planter 36 oignons et 55 échalotes. Nous avons compté combien il y avait de colonnes en plus et nous avons additionné les deux nombres ensemble et ça fait le nombre de légumes.

Bien que la question n'était pas posée, ce groupe a calculé le nombre total de plantes d'oignons et d'échalotes. Cette opération «supplémentaire» est assez fréquente, dans chacune des catégories de résolution. Nous y voyons un effet bien évident de contrat didactique : comme de nombreux énoncés de ce genre demandent un total, on le calcule dans tous les cas.

Sur les sept solutions de ce premier type, on ne trouve que quatre schémas de l'emplacement des plantes (fig. 8), dont trois sont alignés seulement selon les diagonales, comme ceux du type C.2.(fig. 9). Mais les textes sont clairs, à l'image du précédent : si le dessin n'a pas été réalisé, il existe dans la représentation mentale des élèves. Ceux-ci sont capables, à partir des propriétés géométriques du réseau, de passer au cadre numérique où s'effectue l'addition de la suite des premiers nombres.

fig. 8

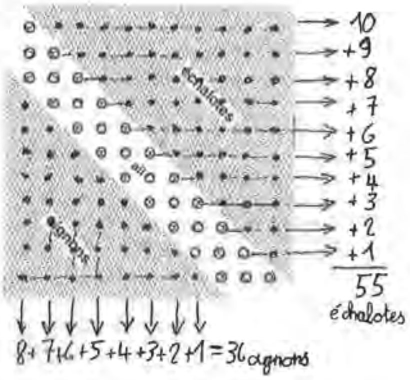


fig. 9

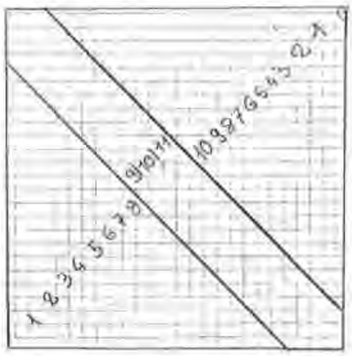
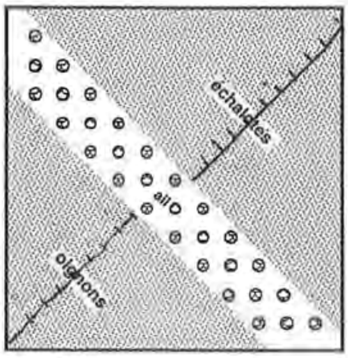


fig.10



F.2. (12) Comptage reposant sur une représentation explicite des lignes et colonnes

On retrouve ici deux manières de procéder, déjà observées dans les catégories précédentes : en traçant les droites passant par les alignements «horizontaux» et «verticaux» de plantes ou en quadrillant le terrain.

Dans les alignements, plusieurs groupes précisent qu'ils ont compté les «carrefours» ou les «croisements», comme par exemple : *On a tiré des traits sur l'ail et on mis des oignons et des échalotes aux croisements et on les a comptés.* Dans d'autres cas, les solutions précisent encore la distance entre les alignements.

Les quadrillages sont plus difficiles à réaliser car la figure originale laisse un espace plus grand entre le cadre du potager qu'entre les rangs, ce qui a provoqué quelques erreurs dans les catégories précédentes (fig. 6). Mais il est aussi une aide efficace, comme le remarque le groupe suivant : *La nonna Papera era ordinata e bastato fare i quadretti aiutandosi con l'aglio e poi abbiamo contato (Grand-mère était ordonnée et il suffisait de faire les petits carrés en s'aidant avec l'ail et puis nous avons compté.)*

F.3. (2) Comptage reposant sur une représentation des rangées parallèles à la diagonale du carré.

Les représentations fondées sur la diagonale du carré ne prennent généralement en compte que cette seule cette direction. Les plantes ne sont pas alignées «horizontalement» ni «verticalement» et il est par conséquent difficile d'en déterminer le nombre par rang sans faire appel à la suite arithmétique des premiers nombres naturels.

L'exemple suivant révèle une erreur du comptage des rangs (9 rangées d'échalotes au lieu de 10), corrigée (inconsciemment ?) par le fait que la suite doit se terminer par 1 :
36 oignons et 8 rangées ; 55 échalotes et 9 rangées ; 36 + 55 = 91 légumes.

Nous avons regardé les ails puis mesuré la distance entre les rangées d'ails. Nous avons remis cette distance dans les places où la grand-mère a planté ces plantes. Puis nous avons compté moins un etc. C'est ces rangées que nous avons comptées en premier. (fig. 10)

F.4. (3) Réponses correctes sans explications

Les règles du rallye précisent bien que ce n'est pas la réponse seulement qui compte mais sa justification. L'énoncé se termine d'ailleurs par la demande «expliquez votre raisonnement».

Les trois «justifications» regroupées ici, comme certaines des types précédents, se contentent de donner la réponse par une phrase du genre :

En complétant les échalotes et les oignons nous avons compté combien il y avait d'échalotes et d'oignons. On a trouvé le résultat de 36 + 55 = 91.

Toutes les solutions regroupées dans cette dernière catégorie, font apparaître clairement le rôle essentiel de la structure géométrique pour aboutir à la réponse exacte obtenue par addition ou par comptage, que nous pourrions qualifier de «raisonné», par rapport au simple dénombrement des points dessinés qui apparaît dans les catégories précédentes (C et E)

Remarques générales

En raison de ses contraintes d'organisation, le RMT ne procure que les textes élaborés par les différentes classes, pour expliquer leurs démarches, sans offrir d'autres justifications. Les maîtres peuvent avoir accès à des informations supplémentaires par un travail approfondi avec leurs élèves sur certains problèmes. Si une équipes de recherche souhaitait poursuivre les analyses, elle devrait se rendre dans les classes participantes, très éloignées géographiquement, et reconstituer l'élaboration de la résolution d'un problème donné. Mais les procédures seraient longues et coûteuses. Dans notre analyse, nous nous contentons des feuilles de réponse, en sachant pertinemment qu'il nous manque de précieuses informations et qu'il y aurait encore d'autres investigations à conduire sur ce problème du «Potager de Grand-mère». C'est la raison pour laquelle ce dernier chapitre est intitulé «remarques générales» plutôt que «conclusions».

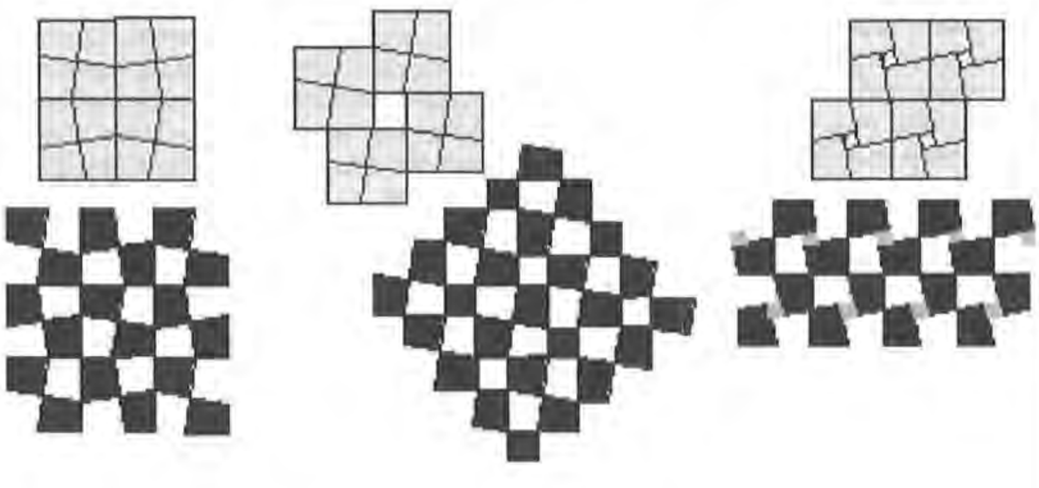
Premièrement, on relève l'intérêt et la variété des productions des élèves, malgré l'envie d'en savoir plus sur les conditions de leur élaboration, sur les représentations mentales qui les fondent et sur la dynamique de leur construction.

Deuxièmement, le problème du potager de Grand-mère met en évidence les relations étroites qu'entretiennent la géométrie et l'arithmétique, plus précisément le passage des régularités de la disposition des plantes à la progression arithmétique qui permet de calculer leur nombre.

Troisièmement, on constate l'évolution importante qui se produit entre la 3e et la 4e année d'école primaire au plan des concepts d'alignement (ligne droite) de droites parallèles et d'équidistance. Même si nous n'avons pas conduit une étude statistique des catégories de résolution, nous constatons à l'évidence une réussite plus élevée en 4e qu'en 3e (Cat. F. réussite complète : 18 classes de 4e sur 55 soit 33 % contre 6 classes de 3e sur 28, soit 21% - Cat. A et B, incompréhension du problème : 20 % en 4e contre 39 % en 3e).

Quatrièmement, en conséquence des remarques précédentes, on découvre l'intérêt qu'il y a à faire de la géométrie à l'école primaire et, en particulier, à proposer aux élèves des activités leur permettant de construire quelques notions si évidentes qu'on les sous-estime ou les ignore parfois.

Agrandissement des mosaïques de la page 44.



Pas facile de voir des carrés dans ces mosaïques!

CABRidées :

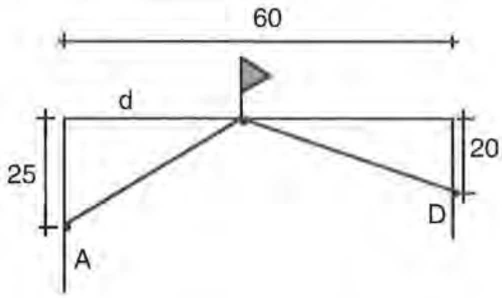
De la statique à la dynamique

Michel Chastellain, SPES (VD)

Voici trois énoncés d'un même problème «classique» :

a)[1] *Le joueur part de **D**, court planter un fanion sur la ligne **d** et se dirige vers l'arrivée **A**.*

Où planter le fanion pour que la distance soit la plus courte ?



b)[2] *Deux fermes sont situées du même côté d'un canal rectiligne, à une certaine distance de celui-ci. On veut amener l'eau du canal aux deux fermes à l'aide de deux conduites indépendantes partant d'une station de pompage commune située sur le canal.*

Où faut-il placer la station, pour économiser au maximum sur la longueur des conduites ?

c)[3] *On donne deux points **a** et **b**, situés hors d'une droite **D**.*

*Quel est le plus court chemin de **a** à **b** qui passe par un point de **D** ?*

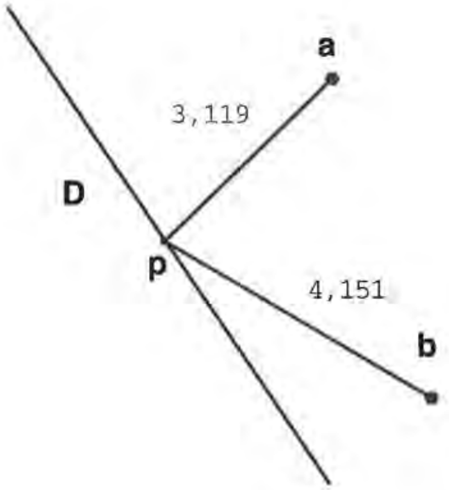
Au-delà de la nomenclature adoptée – suivant la convention retenue, les points et les ensembles de points sont désignés par des lettres majuscules ou minuscules – et des différents «habillages» proposés, arrêtons-nous un bref instant sur les procédures de résolution suivies par les élèves en fonction des outils dont ils disposent.

Dans le cas d'un enseignement «traditionnel» – ce terme n'est pas utilisé ici d'une façon péjorative, mais dans l'esprit d'une résolution géométrique à l'aide de la règle, de l'équerre et du compas – les élèves connaissent ou ne connaissent pas la solution. Dans le premier cas, il n'y a pas de problème. Dans le second, l'expérience montre que de nombreux essais successifs se révèlent nécessaires pour leur permettre de déterminer plus ou moins précisément l'emplacement adéquat. Mais un doute subsiste, car la position trouvée l'est grâce à une série de mesures approximatives. Quant à la justification, liée à la notion de «point symétrique», elle n'apparaît pratiquement jamais. A dire vrai, un tel problème laisse plus souvent les élèves passifs, dans une attitude **statique**.

Ne sachant comment procéder, ils attendent tout simplement que le maître leur indique le cheminement à suivre.

1. J.-A. Calame et F. Jaquet, *MATHEMATIQUE 9*, (Ex. n° 13, «Logique et raisonnement»), DIP NE, 1989.
2. A. Delessert, *GEOMETRIE PLANE*, (Ex. n° 50), Ed. SPES, 1981.
3. O. Burlet, *GEOMETRIE*, (Ex. n° 6, «Triangles isométriques»), LEP, 1989.

Le recours à «Cabri-géomètre» offre, quant à lui, une dimension **dynamique** particulièrement réjouissante. Intéressons-nous donc au troisième énoncé pour observer la succession des étapes vécues.

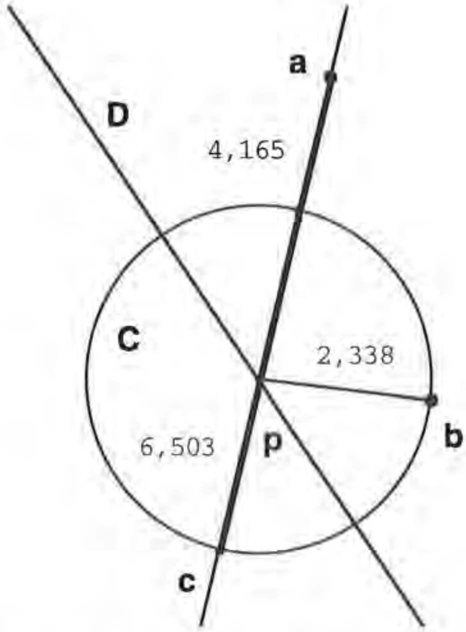


La figure de base étant réalisée sans aucun problème, les élèves placent rapidement un point **p** sur la droite **D**, à l'aide de l'outil «Point sur objet». Puis ils tracent les segments **[ap]** et **[pb]** dont ils obtiennent la mesure à l'aide de l'outil «Mesurer» du menu «Divers». Leur idée, le lecteur l'aura déjà compris, consiste alors à déplacer le point **p** pour calculer (jusqu'à ce qu'elle soit minimale) la somme des mesures des deux nouveaux segments ainsi déterminés.

Lorsque la précision affichée porte sur trois chiffres après la virgule, ce que le contrat didactique devrait stipuler, les élèves se trouvent alors confrontés à une succession d'opérations rébarbatives et décourageantes. Et c'est justement de cette lassitude que naît une nouvelle motivation, au travers de la «relance» suivante : «Comment procéderiez-vous pour disposer immédiatement, après avoir déplacé le point **p**, de l'affichage d'une mesure égale à **[ap]** +**[pb]** ?»

Certes, l'idée ne jaillit pas immédiatement et il faut même parfois «titiller» les élèves avant qu'une construction correcte apparaisse :

- tracer le cercle **C** (**p** ; **[pb]**) (outil «Cercle déf. par centre et point»);
- tracer la droite **ap** (outil «Droite passant par 2 points»);
- construire le point **c**, intersection de la droite **ap** avec le cercle **C** (outil «Intersection de 2 objets»);
- tracer le segment **[ac]** (outil «Segment»);
- noter la mesure du segment **[ac]** (outil «Mesurer»).



Il ne reste plus qu'à déplacer le point **p** pour trouver, «par lecture en temps réel», la position qui engendre un segment **[ac]** minimum (dans notre cas : 6,503 cm).

L'observation de cette dernière figure fait alors apparaître l'idée d'une position dans laquelle le point **c** est le symétrique du point **b**, par rapport à la droite **D**. En ce qui concerne la justification, il faut bien admettre qu'elle n'apparaît pas spontanément et **c'est seulement la phase de synthèse qui permet de faire émerger la notion mathématique sous-jacente**, à savoir celle de «segment de droite» qui est le plus court chemin entre deux points.

Même si – il est fondamental de le redire ici – le recours à «Cabri-géomètre» n'est pas le garant d'un apprentissage sans difficulté, il se révèle cependant bénéfique dans de nombreux cas comme celui-ci, car il favorise incontestablement l'autonomie d'action des élèves. Pour avoir vécu cette activité à plusieurs reprises, tant en enseignement «traditionnel» qu'à l'aide du didacticiel, je peux témoigner de l'intérêt, des essais, des initiatives et finalement du plaisir que les élèves ont éprouvé dans une recherche effectuée à l'aide de l'ordinateur, par opposition à l'inertie, voire à la résignation, que j'ai pu constater lorsque le recours à cette technologie n'existait pas !

Roméo s'est follement amouraché de Juliette. Malheureusement elle se montre très réticente aux avances de son prétendant.

Désireux d'épater la charmante demoiselle mais aussi de connaître ses sentiments envers lui, Roméo lui propose alors un jeu.

Il demande à Juliette de penser à un nombre compris entre 0 et 7, correspondant au nombre d'invitations hebdomadaires qu'elle accepterait pour un souper aux chandelles en sa compagnie; Roméo lui demande de multiplier ce nombre par deux, puis d'ajouter 5, de multiplier le résultat par 50, d'additionner 1747 si elle n'a pas encore eu son anniversaire au cours de l'année, d'ajouter 1748 dans le cas contraire, puis finalement de retrancher son année de naissance.

Roméo dit alors à Juliette qu'elle a obtenu un nombre formé de trois chiffres. Sans le lui dévoiler, Juliette acquiesce mais n'est que fort peu étonnée. Par contre, lorsque Roméo lui déclare - non pas son amour - mais que le chiffre des centaines est le nombre auquel elle avait pensé et que le nombre formé par les deux derniers chiffres représente l'âge de la jeune fille, le coeur de Juliette chavire.

Vérone... 20h00... Trattoria "della mamma"...
Roméo n'a pas décliné l'invitation de Juliette !

Sauriez-vous expliquer ce curieux résultat ?

Helvétiquement vôtre

Réponses au problème posé dans Math-Ecole 183, p. 26

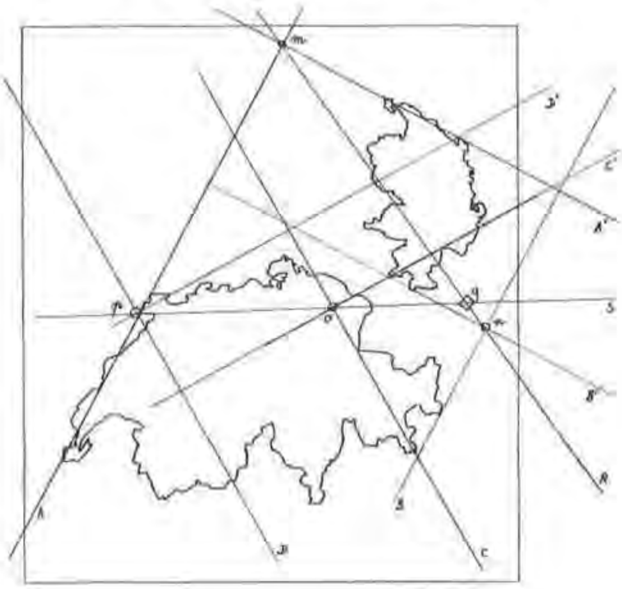
[ndlr]. *Merci aux trois lecteurs qui nous ont envoyé leur solution. Nous les publions telles que nous les avons reçues. A leur tour elles pourront faire l'objet d'un débat dans nos colonnes. En particulier, il serait intéressant de se prononcer sur l'existence du point invariant d'une similitude et sur sa recherche, dans le cas général.*

1. Réponse reçue de Claude Danalet, Ecublens

Je ne sais pas si les membres (sur le papier tout du moins) du comité de rédaction peuvent répondre au problème de Jacques Lubczanski. De toutes façons, j'ai eu du plaisir à essayer et je propose la démarche suivante pour construire le point invariant : (fig. 1)

- Tracer **A** (Chancy - Boncourt) et son image **A'**; s'il y a un point invariant sur ces droites, c'est à leur intersection **m**.
- Tracer **B** (parallèle à **A** et passant par le Stelvio) et son image **B'**; s'il y a un point invariant sur ces droites, c'est à leur intersection **n**.
- Grâce à **m** et **n**, on peut tracer **R**, lieu de toutes les intersections des droites parallèles à **A** et de leur image.
- On peut reprendre la démarche avec une autre direction.
- Tracer **C** (Stelvio - Bad Ragaz) et **C'**; intersection **o**.
- Tracer **D** (parallèle à **C** et passant par Saignelégier) et **D'**; intersection **p**.
- Grâce à **o** et **p**, on peut tracer **S**, lieu de toutes les intersections des droites parallèles à **C** et de leur image.
- Les droites **R** et **S** se croisent en **q**, point

(fig 1)



invariant recherché. Si on souhaite s'en convaincre, il suffit de reprendre la démarche avec de nouvelles directions. Chaque fois apparaît le point **q**, intersection de droites construites comme **R** et **S**.

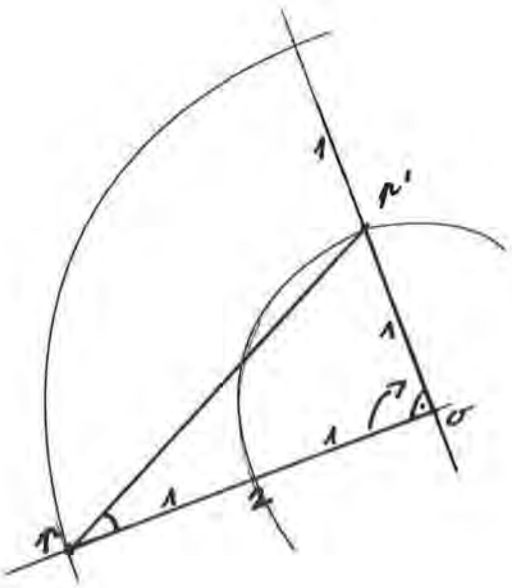
Je me réjouis de lire d'autres réponses dans un prochain numéro. A bientôt et merci pour tout le travail.

2. Réponse de Aldo Dalla Piazza, Courtelary

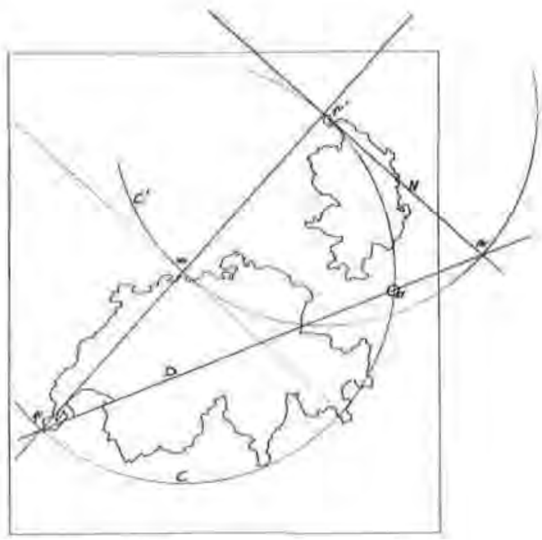
Voici quelques éléments de réponse concernant les questions que vous posez:

- Toute composition de rotations, d'homothéties et de translations qui ne résulte pas en une translation unique possède un point fixe unique (parce que les complexes forment un corps).
- Construire le point fixe à la règle et au compas est possible à partir de la donnée de deux points et de leurs images.
- Dans le cas que vous proposez l'angle de rotation est 90° (dans le sens des aiguilles d'une montre si l'on pense la «petite Suisse» comme image de la grande) et le rapport d'homothétie est 1/2 (dans la même hypothèse). Ces valeurs «découlent» autant de mesures effectuées dans la figure que du contexte préparant la question.
- Si l'on admet ces valeurs, connaître un point **p** et son image **p'** suffit pour construire le point fixe. Partant d'une figure représentant le problème résolu (fig. 2), on constate que le point fixe doit être le sommet d'un triangle rectangle d'hypothénuse **pp'** et que l'angle en **p** est caractérisé par le rapport 1:2 (sa tangente vaut 1/2). De là on déduit la construction décrite par la figure 3 où :

(fig 2)



(fig 3)



N est la normale en **p'** à la droite par **p** et **p'**

m est le milieu du segment **pp'**

C est le cercle de Thalès du diamètre **pp'**

C' est le cercle centré en **p'** de rayon **p'm**

n est l'intersection (appropriée) de **N** et de **C'**

D est la droite par **p** et **n.** Elle détermine avec la droite par **p** et **p'** l'angle caractérisé par le rapport 1/2

o est l'intersection de **D** et de **C**. C'est le point fixe cherché.

N'ayant pas de carte de géographie sous la main et connaissant mal la région concernée (au sud de l'Allemagne ou déjà en Autriche ?), je renonce à indiquer un lieu géographique proche du point fixe concerné.

3. Réponse de Cédric Ischi, Chardonnes

Afin de déterminer le point fixe de cette composition, je me suis donné une condition : le centre de rotation est confondu avec le centre d'homothétie.

Ainsi ce centre sera le point fixe.

Puis comme on effectue une rotation de 90°, un angle droit a son sommet sur le point fixe, ainsi ce dernier appartient à un cercle de Thalès :

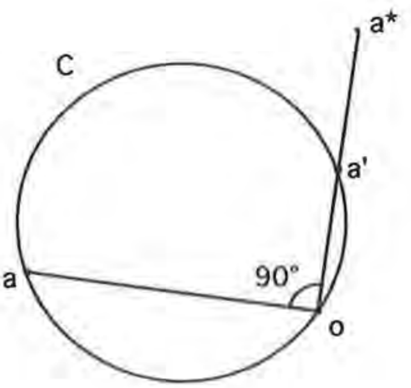
a* est l'image de **a** par rotation R(o; 90°)

a' est l'image de **a*** par l'homothétie H(**o**;1/2)

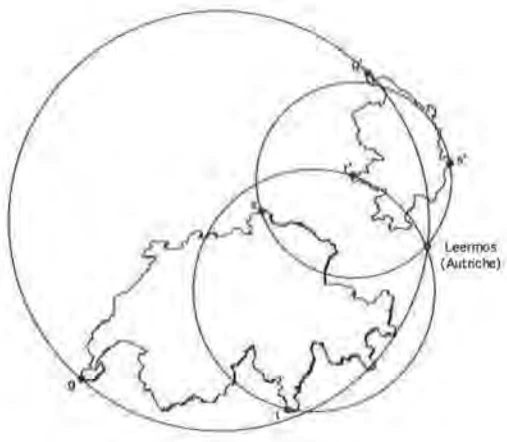
Le triangle **aoa'** est rectangle en **o**, donc **o** appartient au cercle de Thalès de diamètre [**aa'**]. (fig 4)

Pour la carte de la Suisse, on choisit trois points géographiques (**g**, **s**, **t**) et leur image (**g'**, **s'**, **t'**); et on construit les trois cercles de Thalès (de diamètres [**gg'**], [**ss'**] et [**tt'**] qui se coupent en un point. C'est le point fixe recherché, situé dans la région de Leermos en Autriche. (fig 5)

(fig 4)



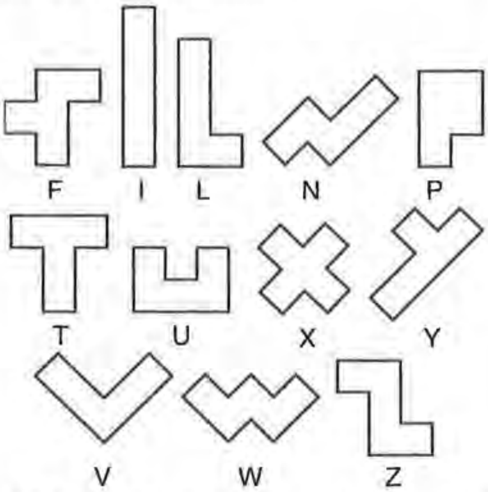
(fig 5)



Activité avec les pentominos

Maurice Bertoni, SPES (VD)

Les pentominos sont toutes les formes que l'on peut obtenir en juxtaposant 5 carrés. Il en existe 12 que l'on peut caractériser par des lettres de l'alphabet :



Des activités avec les pentominos sont proposées dans les moyens romands de 5ème année (atelier 24). Elles semblent cependant souvent délaissées par les enseignants[1] (mais peut-être pas par les lecteurs de *Math-Ecole* ...).

Et pourtant, l'intérêt de ce type de travail sur les polyminos en classe de mathématiques de cinquième année est évident. Cet article, fondé sur une pratique répétée, se propose de le montrer. Il s'agit d'une introduction à la recherche de rectangles que l'on peut constituer avec des pentominos différents.

[1] D'après l'étude de J.A. Calame (1995), «Math 5-6 ... pas si mal!», cet atelier est «particulièrement apprécié» par 34 maîtres et «remis en cause» par 18 autres, sur 536 enseignants interrogés.

Construction de rectangles

Après une première phase au cours de laquelle les élèves ont répertorié les pentominos et découpé un exemplaire de chacun d'entre eux, je leur ai posé les questions suivantes :

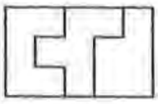
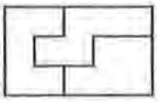
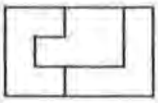
a) *Avec certains pentominos, on peut construire des rectangles.*
Quelles dimensions peuvent-ils avoir ?
Notez vos solutions.

Cette façon de lancer le problème est ouverte et permet facilement aux élèves d'entrer dans le problème, de trouver des réponses et de faire une synthèse des résultats. (Il est entendu que chaque solution comprend de un à douze pentominos, tous différents.) Une des remarques qui apparaît fréquemment au cours des premières construction est, par exemple : «Mais c'est normal que l'aire soit un multiple de cinq, puisqu'il y a cinq carrés dans un pentomino».

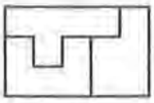
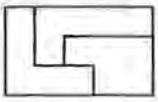
b) *Quel est le plus petit rectangle que l'on peut former avec plus d'un pentomino? Combien de solutions différentes y a-t-il ?*

Cette question paraît banale, mais elle permet, au passage, une belle argumentation sur le fait qu'un rectangle de 2 x 5 n'est pas réalisable. Par exemple : «On ne pourrait prendre que des pièces qui ne laissent pas libre un coin, comme le P ou le L, mais alors on ne pourrait compléter qu'avec le même pentomino».

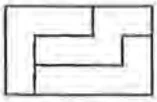
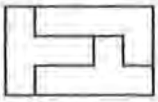
La réponse est un rectangle de 3 x 5 et nous avons répertorié 7 solutions :

PUF PUN PUV

PUY PLV

LNV LYT

Le P a été utilisé 5 fois, le U 4 fois, le V et le L 3 fois, le N et le Y 2 fois et le T et le F une fois.

Cela m'a permis d'enchaîner avec la question suivante :

c) *Quels pentominos ne peut-on pas utiliser pour former un rectangle de 3 x 5 et pourquoi ?*

Ici encore, la question conduit à une argumentation tout à fait accessible à des élèves de cet âge :

«Le I n'est pas possible car il est trop long». (Car son complément serait un rectangle de 2 x 5, déjà éliminé lors des constatations précédentes.)

«Le X et le Z ne sont pas possibles parce qu'on ne peut les mettre qu'au milieu et qu'il resterait la même forme de chaque côté» (le U pour le X et le P pour le Z).

«Le W n'est pas possible car il ne peut rester que 4 cases d'un côté et 6 de l'autre».

J'ai alors relancé l'activité avec la question :

d) *Combien de rectangles peut-on former en juxtaposant deux rectangles de 3 x 5 ?*

Je m'attendais à une réponse immédiate et évidente, c'est-à-dire les deux rectangles de 3 x 10 et 5 x 6. Mais un petit futé m'a fait remarquer qu'avec les mêmes formes, on pouvait former des rectangles différents.

Et la discussion qui a suivi a permis de mettre en évidence deux sortes de différences pour un rectangle donné :

– celles qui portent sur les diverses dispositions des mêmes pièces,

– celles qui concernent l'usage de pièces différentes pour constituer le rectangle.

Un débat fructueux a abouti au résultat suivant :

D'une part, il y a 16 dispositions différentes des mêmes pièces pour chaque assemblage de deux rectangles donnés de 3 x 5. En effet, en gardant un des rectangles fixe, on peut juxtaposer l'autre rectangle de 4 manières différentes sur chacun de ses côtés. (On est assuré qu'aucune de ces dispositions n'est identique à une autre car les assemblages ne peuvent pas présenter de symétries, étant constitués de pièces toutes différentes.)

D'autre part on peut juxtaposer deux des sept rectangles de 3 x 5 de 5 manières différentes. Une façon de les dénombrer consiste à prendre successivement tous les rectangles utilisant une pièce donnée (par exemple le P) et de leur associer tous les rectangles n'utilisant pas cette pièce. On obtient alors les 5 combinaisons suivantes :

P, U, F - L, Y, T
P, U, F - L, N, V
P, U, V - L, Y, T
P, U, N - L, Y, T
P, U, Y - L, N, V

On peut donc former en tout 16 · 5, c'est-à-dire 80 rectangles différents en juxtaposant deux rectangles de 3 x 5.

e) *Avec quelles pièces peut-on construire des rectangles de 4 x 5 ?*

On ne peut pas utiliser le X pour faire un rectangle de 4 x 5.

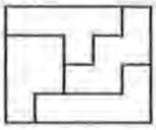
Il est là aussi intéressant de demander pourquoi et on obtient alors des justifications du genre :

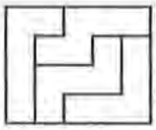
«Il est beaucoup trop symétrique», «On devrait utiliser deux fois le L». ...

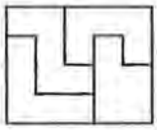
Il y a 7 solutions utilisant le I : ce sont celles du rectangle de 3 x 5 auxquelles on a juxtaposé le I.

Il existe des solutions utilisant le W ou le Z. Mais existe-t-il plusieurs solutions ? Quels pentominos peut-on utiliser pour construire un rectangle de 4 x 5 en utilisant le W ou le Z ? Quelles places peuvent occuper ces deux pièces ?

Voici les solutions que nous avons trouvées.


WPYL

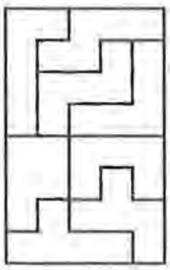

ZVLN


ZVUP

Le W ne peut être assemblé qu'avec P, L et Y (de différentes manières).

Le Z est toujours utilisé avec le V. On peut compléter le rectangle soit avec L et N, soit avec P et U.

Il est possible de juxtaposer deux rectangles de 4 x 5. Voici une solution:

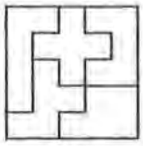


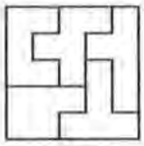
f) *Et peut-on construire un rectangle (carré) de 5 x 5 ?*

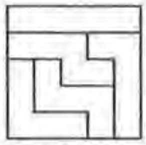
Ici, on peut aussi utiliser le X. Mais peut-on le faire sans le U ?

Il ne semble pas, mais l'argumentation est plus compliquée.

Voici 3 carrés de 5 x 5 :

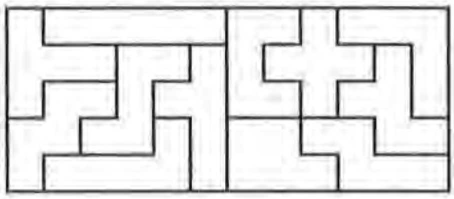

PFXUL


UYFTP


ILNZV

On peut juxtaposer les deux derniers rectangles de 5 x 5 pour faire un rectangle de 10 x 5.

Et enfin, il existe une solution du rectangle de 6 x 10 qui est la juxtaposition de deux rectangles de 6 x 5. La voici:



Une fois que les élèves sont bien habitués à travailler avec ces formes, on peut leur poser des problèmes plus difficiles à résoudre chez eux, en leur précisant que : dès que quelqu'un a trouvé une forme, il la note et l'affiche en classe pour ses camarades.

Ce type de gestion convient particulièrement à la recherche des différents rectangles constitués de tous les pentominos, ou à celle d'autres formes telles que le «pentominet» (Voir *Mathématique, 5e année*).

Pentominos sur un échiquier

De nombreuses activités peuvent se dérouler sur un échiquier (carré de 8 x 8) dont les carrés de base sont de même dimensions que ceux des pentominos.

On peut commencer par le jeu suivant :

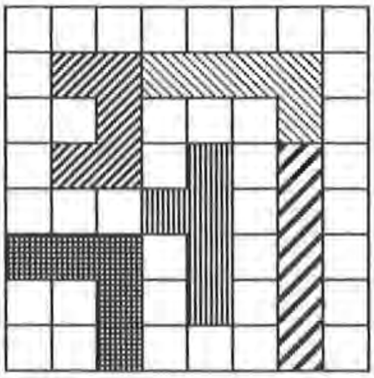
g) *Chaque joueur, à tour de rôle, place un pentomino sur l'échiquier. Celui qui ne peut plus en placer a perdu.*

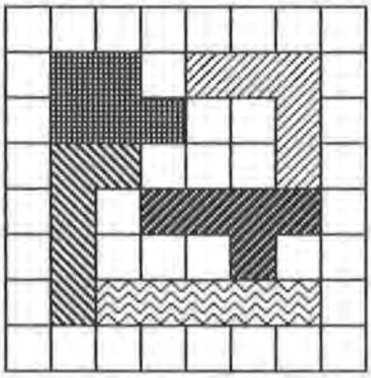
Une fois que les élèves ont joué suffisamment pour commencer à élaborer une stratégie (faut-il jouer en premier ou non, quelles pièces vais-je placer en premier, comment réagir à un coup de l'adversaire, etc.), on peut enchaîner avec le problème suivant, que l'on pourrait appeler «l'art de perdre de la place»: ⇨

h) *Placer certains pentominos sur l'échiquier de manière à pouvoir en poser le moins possible.*

Les élèves devraient être capables de trouver une solution avec 6 pentominos.

Il paraît difficile d'y arriver avec 5, mais c'est pourtant possible, comme le prouvent les deux exemples ci-dessous.
Le premier a été donné par Martin Gardner, le second n'a, à notre connaissance, pas encore été montré.



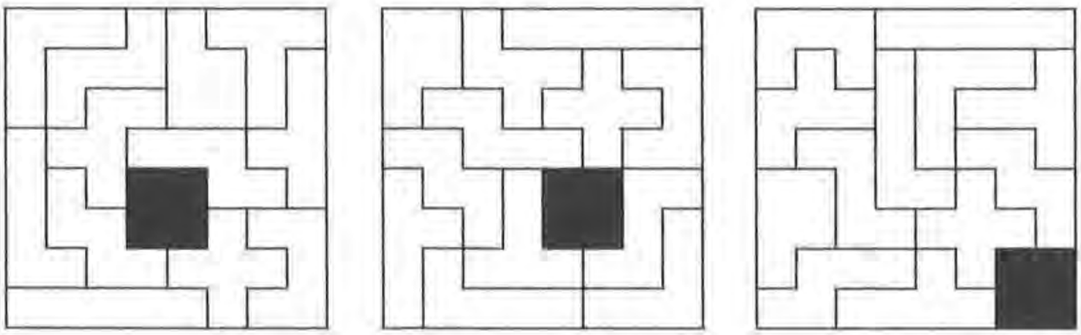


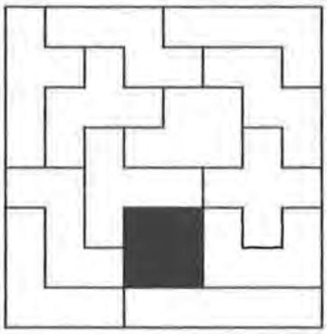
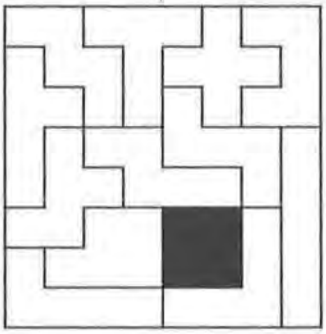
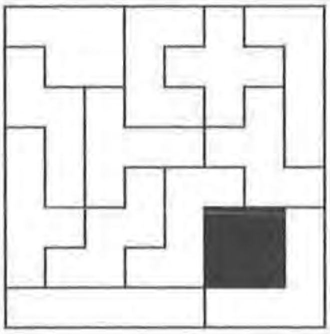
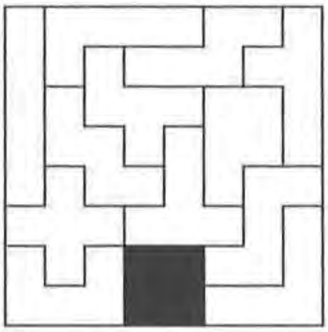
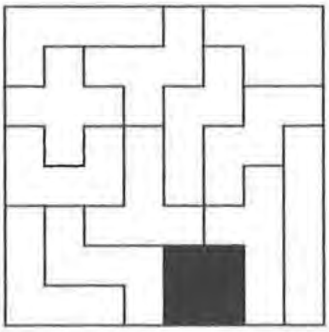
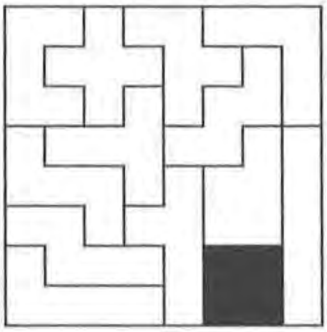
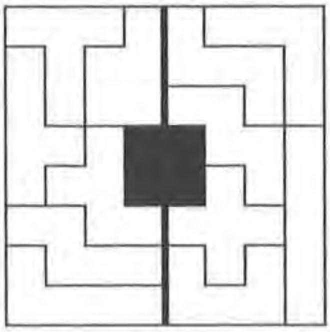
Une autre piste très riche consiste à:

i) *Remplir l'échiquier en laissant libre un carré.*

Il y a d'abord un travail pour répertorier le nombre de positions différentes du carré 2 x 2 sur un échiquier 8 x 8, si on admet que deux solutions obtenues par symétrie ou par rotation sont les mêmes.
Voilà un problème concret d'utilisation des transformations géométriques !

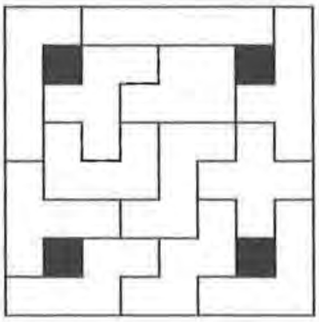
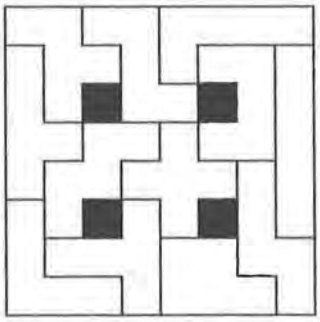
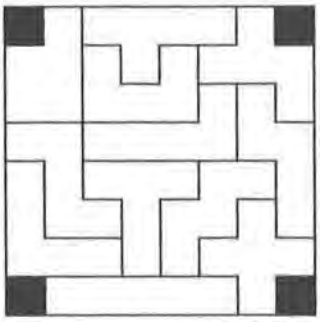
Il existe dix dispositions différentes du carré dans l'échiquier. Nous proposons ici le résultat de nos investigations.



Cette dernière solution avec le carré au milieu de l'échiquier a en plus la propriété d'être séparée en deux parties isométriques.

Cela nous a incités à chercher d'autres solutions avec 4 petits carrés disposés symétriquement sur la diagonale.

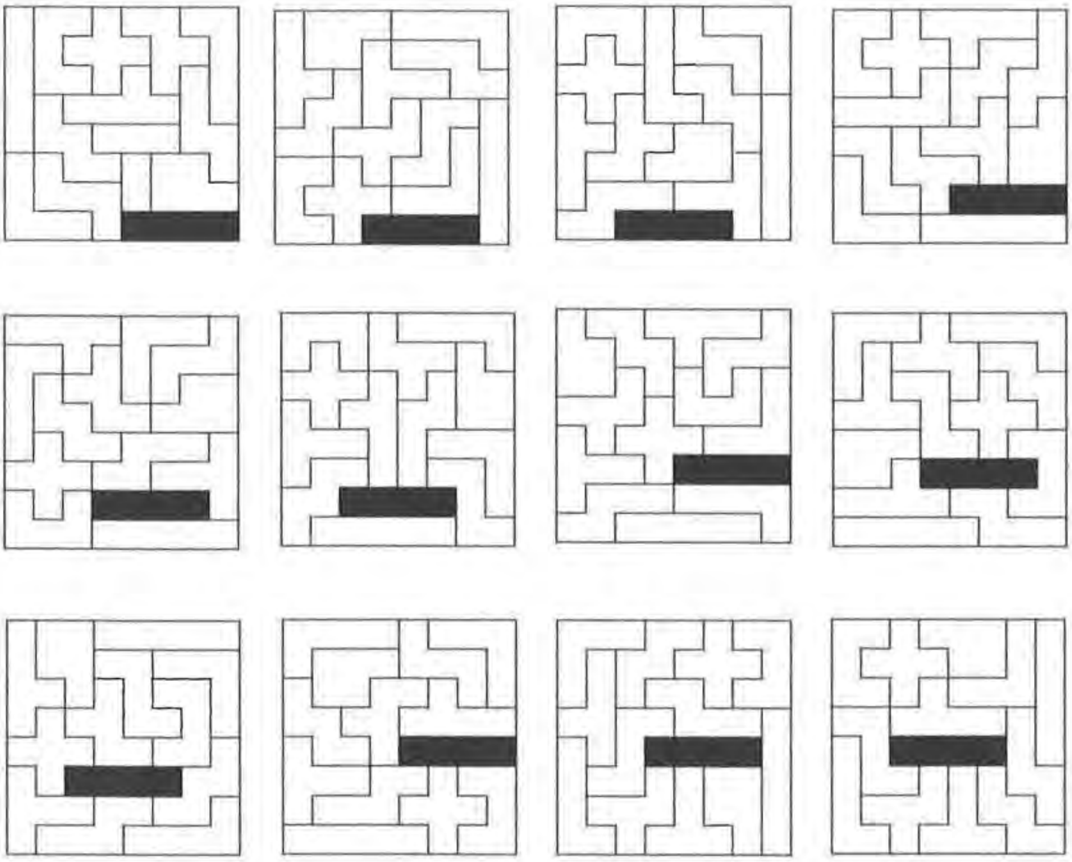




Voici, finalement, une recherche personnelle, qui a pour objectif d'amener le lecteur à créer, lui aussi, son propre problème et d'essayer de le résoudre :

➪

j) Peut-on remplir l'échiquier avec les douze pentominos en laissant libre un rectangle de 4 x 1?

La réponse est oui, comme le démontrent les dessins ci-dessous :



Bibliographie :

Bettinelli B. (1984), *Jeux de formes, formes de jeux*, IREM de Besançon.

Calame J.-A., (1995), *Math 5 - 6 ... pas si mal !* , IRDP, Coll. Recherches 95.102.

Charrière G., Guillet N. (1979), *La polyominologie, Math-Ecole No 87* (pp. 10-32).

Chastellain M., Jaquet F., Michlig Y. (1984), *Mathématique 5e, Livre de l'élève et Mathématique 5e Livre du maître*, Office romand des éditions et du matériel scolaire

Van Delft P., Botermans J. (1987), *Mille casse-tête du monde entier*, Editions du Chêne, Paris.

Gardner M. (1965), *Problèmes et divertissements mathématiques*, Dunod, Paris.

Golomb S.W. (1966), *Polyominoes*, George Allen and Unwin Ltd, London.

TRIANGLES DE NOMBRES

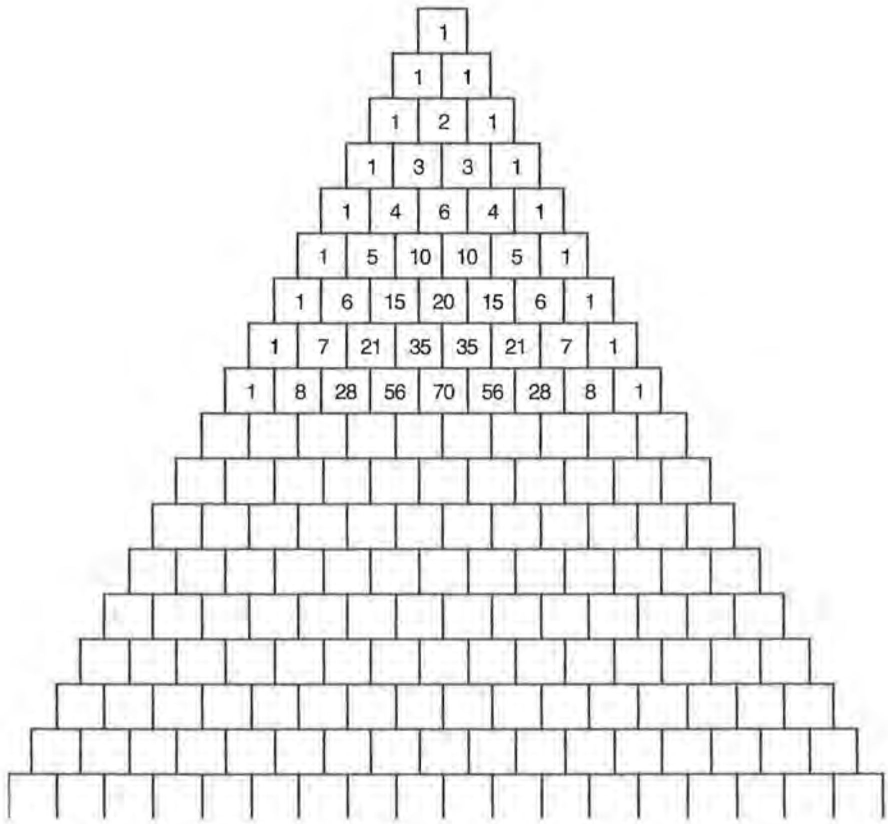
Fiche pratique 184.1

Complète les cases de ce triangle selon la règle de construction appliquée dans les premières lignes.

Colorie en rouge les cases qui contiennent des multiples de 2. Tu obtiendras un joli motif, plein de régularités[1].

Peux-tu deviner combien il y aura de cases rouges et comment elles seront disposées dans la ligne qui commence par 1, 24, ... ?

Peux-tu dire aussi quelle sera la prochaine ligne, au-delà de 1, 24, ... où il n'y aura aucune case rouge ?



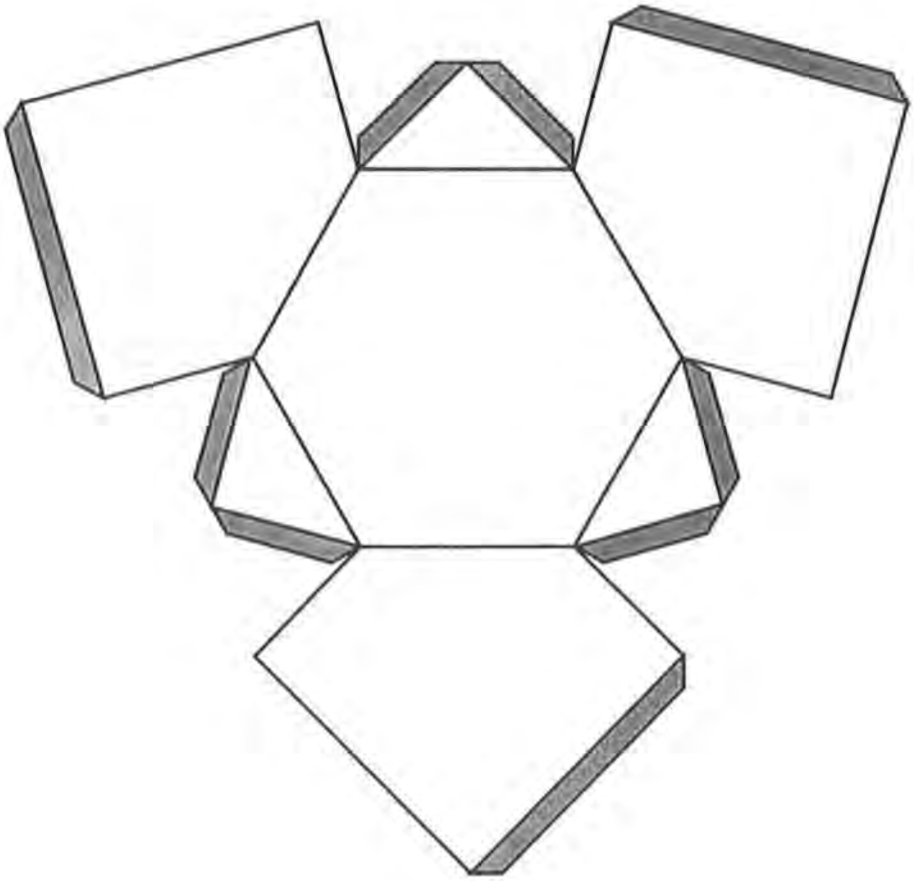
[1] Activité inspirée du livre *Le Démon des Maths,* de H.M. Enzensberger (Seuil/Métailié, 1998). Ouvrage attachant, où le lecteur a l'impression de pénétrer dans un monde mystérieux et passionnant, celui des nombres. A recommander à tous ceux qui ont envie de se réconcilier avec les mathématiques. Dans cet ouvrage, le motif obtenu est appelé «Triangle de Sierpinski», par analogie avec le «Napperon de Sierpinski» à structure fractale.

POLYEDRES
Fiche pratique 184. 2

Voici le développement d'un polyèdre[1]. L'as-tu déjà rencontré ?
Pour le reconnaître, photocopie-le en deux exemplaires.

Découpe-les en suivant les traits extérieurs, plie selon les traits intérieurs, et colle les parties grises.

Tu obtiendras deux polyèdres jumeaux qui, placés l'un contre l'autre, en formeront un troisième, bien connu !



[1] D'après G. Sarcone, bien conu de nos lecteurs par sa rubrique «Voyage au centre de la géométrie». Cette curiosité géométrique, et bien d'autres encore font l'objet d'une série de cartes postales mathématiques éditées par POLE/ARCHIMEDE BP 87 75622 Paris Cedex 13

Repérer les compétences des élèves entrant en 1P

Janine Cosandey,
maîtresse d'appui à Blonay

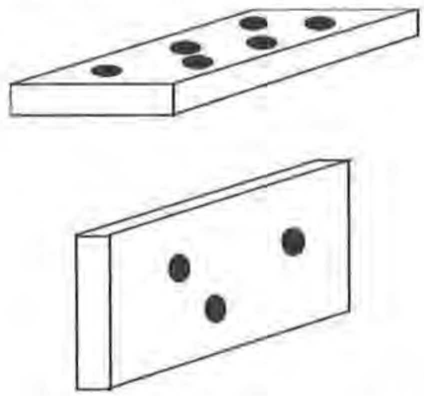
[ndlr]. *Cet article fait suite à celui paru dans Math-Ecole 180 (pp. 11-12). Son auteure nous écrit :*

Pour alimenter votre rubrique concernant les mathématiques en 1P-2P, je vous remets une suite (et fin!) du compte rendu «Repérer les compétences des élèves entrant en 1P» (selon ERMEL CP, pp. 49-52). J'ai pensé qu'il est peut-être utile de relier la pratique quotidienne au contenu des pages théoriques (jaunes) des moyens d'enseignement romands. Je ne sais plus qui a dit «Rien n'est plus pratique qu'une bonne théorie!». Encore faut-il la consulter !

Voici le dernier test proposé à la volée de 69 élèves entrant en 1P, à la fin du mois d'août. C'est une opération d'addition[1], à trois niveaux. Il est suivi du compte rendu des résultats obtenus.

1. Je montre 2 noix dans ma main gauche. *Combien ici ?* et je referme. Puis je montre 3 noix dans ma main droite. *Combien ici ?* Puis je joins mes deux mains et, en secouant : *Et combien ici ?*

2. Sur une boîte d'allumettes sont collés d'un côté 6 gros points noirs, de l'autre côté 3 gros points noirs. Je montre un côté. *Combien ?* Et l'autre : *Combien ici ?* Puis je pose la boîte sur la tranche (à disposition de l'élève). *Et en tout ?*



3. Idem, avec respectivement 8 points et 5 points.

Voici les résultats de la volée de 69 élèves :

1. Pour les noix :
   20 élèves répondent spontanément 5,
   24 trouvent 5 dans la tête,
   12 trouvent 5 à l'aide des doigts,
   11 se trompent et disent 4, ou 6, ou 10,
   2 ne peuvent pas savoir (puisque c'est caché !).

2. Pour l'addition de 6 points et 3 points :
   18 élèves trouvent 9 avec les doigts,
   19 élèves trouvent 9 dans la tête,
   7 élèves recomptent les deux côtés de la boîte,
   19 se trompent,
   5 ne savent pas.

3. Pour l'addition de 8 points et 5 points :
   6 élèves trouvent 13 avec les doigts,
   8 élèves trouvent 13 dans la tête,
   6 élèves recomptent sur la boîte,
   18 élèves se trompent,
   31 élèves ne répondent pas parce que c'est trop difficile.

[1] Voir à ce propos «Apprentissage et enseignement des mathématiques, commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire», chapitre «Du comptage au calcul», pp. 78-79, COROME 1997.

Le test de niveau 2 et 3 a été proposé à nouveau en février (5 mois plus tard) à une classe de 17 élèves.

2. 13 élèves annoncent 9, soit en surcomptant sur les doigts ou dans le tête, soit en retournant la boîte (3 élèves),
   3 élèves trouvent 19,
   1 élève ne peut pas trouver le total.

3. Chacun des 17 élèves a employé le même procédé que précédemment. La même élève que précédemment ne trouve pas le total.
   12 élèves ont trouvé 13,
   1 élève a trouvé 11,
   2 élèves ont trouvé 12,
   1 élève a trouvé 14.

On voit donc monter en flèche le pourcentage de bonnes réponses. En outre, les enfants sont souvent capables de rendre compte de leur procédé. Par exemple, ceux qui recomptent tout sur les doigts expliquent comment ils maîtrisent le fait de manquer de doigts. Ceux qui surcomptent disent : «je garde le huit dans ma tête», et rajoutent le cinq en s'aidant des doigts. Une petite fille est en deçà, qui ne peut concevoir la somme de deux collections non réunies sous ses yeux. Certains, par contre, sont déjà au-delà, qui font la somme de tête très rapidement.

I libri che presentano problemi relativi a competizioni matematiche sono numerosi soprattutto in lingua francese (si veda pagina 3 della copertina). Eccone uno in lingua italiana.

Dalla presentazione: *Questo volumetto è rivolto ai bambini, ai ragazzi, ai loro genitori, agli insegnanti.*

Ma come? Ancora un altro libro di matematica?

E perché no? Se la matematica diventa un gioco, una sfida, una creazione personale. Non ci sono «più bravi» e «meno bravi». Ogni problema proposto in questo volumetto può essere risolto in tanti modo diversi. Ognuno troverà una sua personale, originale strategia. Risolvere un problema significa diventare l'attore principale di un'attività di ricerca.

La prima parte del volumetto propone i testi di 75 problemi scelti tra le cinque prime edizioni del Rally Matematico Transalpino (con nuove illustrazioni in colore). La seconda ne riporta le soluzioni, con molti dettagli sulle procedure. Questa raccolta di problemi può anche essere inserita nell'attività didattica del secondo ciclo di scuola elementare e della scuola media.

Gli insegnanti interessati troveranno, nella terza parte del volumetto, un'analisi didattica di alcuni problemi e una loro possibile collocazione curriculare, nonché strategie risolutive di allievi a suo tempo impegnati in quello che va sotto il nome di Rally Matematico Transalpino. L'ultima parte, infine, propone una classificazione dei problemi secondo temi generali, concetti e nozioni della matematica.

1 (96 pagine, formato 17 x 24. Vendita per la Svizzera da Math-Ecole (vede pagina 3 di copertina) o direttamente in libreria (9500 LIT.). Indirizzo : Edizione il Capitello, via Sansovino 243/22/R I - 10151 Torino, telefono 011 4513611.

Didactique des mathématiques et enseignement des mathématiques à l'université

André Scheibler, Aigle

Introduction

Au cours de l'année académique 1997-1998, nous avons eu le plaisir de conduire une recherche à l'Institut de mathématiques de l'Université de Lausanne intitulée : apport de la didactique aux études de mathématiques. Les professeurs Oscar Burlet et Henri Joris, ainsi que les professeurs John Steinig et François Conne, de l'Université de Genève, y participaient. L'étude de phénomènes d'enseignement à ce niveau là est rare, du moins en Suisse, et vaut donc la peine d'être soulignée.

Objectifs du projet

Fondamentalement, il y a à la base du projet le souhait de quelques professeurs d'innover dans l'enseignement des mathématiques au niveau universitaire. Comment y associer la didactique ? De manière très résumée, le projet cherche à répondre aux deux questions suivantes :

1) Comment la didactique des mathématiques (ci-dessous DDM) peut-elle être associée à une expérience d'innovation de l'enseignement des mathématiques à l'Institut (ci-dessous IMA)? Autrement dit : quel est l'apport de la DDM aux études de mathématiques ?

2) Est-ce possible d'offrir aux étudiants une double sensibilisation : la première comme une simple prise de conscience de l'existence de la DDM, et la seconde de vivre une réflexion personnelle sur sa manière d'apprendre, ou de fonctionner en tant qu'acteur d'un dispositif de transmission de savoirs mathématiques ?

Point de départ

Ce projet est le fruit de multiples activités partagées par les initiants, dans différents cadres comme feu le Centre Vaudois pour l'Enseignement Mathématique, la formation continue des enseignants, et la recherche en DDM. Nous n'en ferons pas une description détaillée ici. Nous nous contenterons d'en rappeler un acte, la mise en place à l'IMA, en 1995, d'un séminaire appelé «mathématiques - didactique des mathématiques». Ce séminaire, décrit ci-dessous, a mis en évidence certains problèmes, que le projet reprend.

C'est dans cette optique que la collaboration suivante a été établie : à la suite d'un cours donné par les professeurs Oscar Burlet et Marc Burger, en 3e année de l'Institut de mathématiques, un séminaire est organisé. Le cours porte sur l'analyse fonctionnelle et la géométrie différentielle, tout particulièrement la topologie des formes différentielles et la cohomologie de De Rham. Le séminaire est fait d'une suite d'exercices que les étudiants préparent par groupe de deux, et présentent à leurs camarades. Chaque exercice se prête à une «concrétisation», une modélisation dont les manipulations fournissent des conjectures, qu'il convient alors de consolider à l'aide de la théorie. Tous les exercices sont accompagnés d'une référence théorique, et certains exercices d'indications. (Rapport «Présence de la didactique des mathématiques dans un institut de mathématiques, Scheibler 1995).

Il apparaîtra dans l'analyse de ce séminaire deux positions opposées entre étudiants et professeurs :

Les professeurs diront :

il faudrait faire plus de séminaires comme celui-ci, viser une variété de présentations du même sujet, oser se tromper, poser une question même idiote, interrompre les présentateurs tant que l'on n'a pas compris, ne pas se soucier de «finir», ou de faire le tour du sujet. L'important est de débattre pour comprendre, de créer des images, de se stimuler par des modélisations diverses, de présenter ouvertement ce qui est la base de l'activité des mathématiques. «Lorsque des chercheurs en mathématiques se rencontrent et échangent, ils disent beaucoup d'absurdités».

Les étudiants diront plutôt :

nous souhaitons ne pas être interrompus, nous nous sentons jugés, évalués, nous n'avons pas le droit de nous tromper, la préparation d'un tel séminaire, juste après le cours, est très lourde, il est frustrant de se retrouver face aux professeurs qui jonglent avec les objets mathématiques, mais qui ne laissent pas les étudiants jongler eux-mêmes.

L'objectif des professeurs était de créer un espace de recherche, avec ses caractéristiques d'essais, d'erreurs, de débats, dont le but n'était pas prioritairement la maîtrise des concepts mathématiques, mais de leur donner de la vie, du sens, des raisons d'être. Mais tout au long du séminaire, les étudiants se sont efforcés d'échapper à cet espace pour lui substituer un lieu d'exposés du savoir savant, qui doit être débarrassé de toute erreur, de toute imperfection possible. D'où vient donc cet antagonisme ? Un professeur dira : c'est le fruit de l'école obligatoire et du gymnase! On leur assène des savoirs dont le seul sens qu'ils saisissent est de les maîtriser.

Comme d'autres certainement avant eux, O. Burlet et M. Burger tentaient par ce séminaire une innovation dans l'Institut, pour y apporter des prestations supplémentaires. Cette démarche a donc mis en évidence un problème : alors que les professeurs souhaitaient innover, mettant ainsi en place un nouveau contrat, les étudiants fonctionnaient selon un autre contrat, vraisemblablement celui qui sous-tendait les cours habituels. D'où la rupture. Notre recherche tente d'avancer sur cette question.

Description du projet

Les activités suivantes ont été mises en place en parallèle :

* Observation de deux cours de mathématiques et séances d'exercices donnés à l'IMA; un cours d'analyse 2e année, obligatoire, suivi par des étudiants de l'Université et de l'EPFL (Pr. Burlet), et un cours sur les systèmes dynamiques, 3e année (Pr. Joris).

* Observation d'un séminaire de formation continue donné à la section mathématique de l'Université de Genève par le Pr. Steinig, et destiné à tous les enseignants ayant une licence en mathématiques; le cours porte sur quelques chapitres de la théorie des nombres.

* Interviews divers, des professeurs, des étudiants, des assistants.

* Mise en place et observation de quatre séminaires d'un jour et demi, destiné aux étudiants de l'IMA :

1er séminaire : des situations sont proposées aux étudiants, selon la technique des situations développée au Service de la Recherche pédagogique de Genève puis par le Centre Vaudois pour l'Enseignement Mathématique. Il s'agit de problèmes dans lesquels l'étudiant peut entrer, mais sans que l'on puisse dire a priori à quelles mathématiques il fera certainement appel, ni jusqu'où il est possible d'aller.

2e et 3e séminaires : ces deux séminaires sont des séminaires conduits; c'est-à-dire que le professeur veut faire avancer la connaissance des étudiants sur un sujet bien défini, mais d'une manière qui les active très concrètement. Le 2e séminaire portera sur la théorie des nombres, abordée par des problèmes, le 3e séminaire sur la géométrie différentielle par le biais d'expérimentations sur des développements et surfaces.

Le 4e séminaire est conduit par les étudiants eux-mêmes, sur des problèmes qui leurs ont été proposés dès le 1er séminaire, et dont ils ont à présenter l'étude. Mais cette présentation s'inspirera des démarches adoptées dans les séminaires précédents et ne pourra pas être essentiellement magistrale. Il faudra donc considérer non seulement la matière, mais aussi la meilleure façon de la faire passer.

Observations et analyses

Les cours de mathématiques

Ces cours sont donnés de façon magistrale. Bien qu'ils se distinguent par leurs contenus et les conditions dans lesquels ils sont présentés, leurs caractéristiques et surtout les effets qu'ils ont sur les rapports aux savoirs des étudiants sont assez semblables. Nous renvoyons le lecteur soucieux d'une description plus détaillée au rapport entier[1]. Décrivons ici l'un de ces effets.

Le discours formel est une nécessité en mathématiques. Il est l'expression de la méthode axiomatique et du principe d'abstraction. Il a aussi une autre vertu, non négligeable. Selon Jean-Pierre Bourguignon : «*il permet de faire un enseignement extrêmement rapide, spécialement à l'Université. Cela permet d'amener très vite des étudiants qui travaillent bien au front de taille de la théorie. Si vous attendez qu'une familiarité avec beaucoup de notions soit acquise, vous allez avoir besoin de beaucoup plus de temps pour arriver à ce niveau. Il n'y a donc pas de doute que la généralisation de la méthode axiomatique a joué un rôle important dans l'explosion des connaissances mathématiques de ce siècle et dans le fait qu'on ait pu former aussi vite autant de mathématiciens*».

Le cours magistral, exposé du discours formel, est donc ce que donne à voir le professeur, donc l'institution, de ses rapports au savoir. Le professeur a rencontré les objets de savoir à travers une longue maturation (faire des mathématiques) dont il ne livre rien, il a dû lui-même en tester leur caractère idoine, c'est-à-dire :

- leur objectivité, par échanges avec d'autres savants, directement ou par l'intermédiaire de publications, soit le fait de reconnaître chez d'autres des rapports au savoir qui lui étaient jusque là personnels;
- leur adéquation à un champ de problèmes auxquels ces savoirs s'appliquent, champ qu'il peut décrire, remodeler, agrandir;
- leur rattachement à d'autres savoirs, ou à des savoirs parallèles, anciens ou même futurs.

Le contrat qu'il souhaite instaurer devrait provoquer chez ses étudiants les mêmes rapports, ou des rapports semblables, concernant le même savoir, et qui vont évoluer comme l'ont fait les siens vers les mêmes caractéristiques. Lorsque le professeur choi-

[1] Institut de mathématiques de l'Université de Lausanne, apport de la didactique aux études de mathématiques, rapport final, juin 1998.

sit, pour présenter sa matière, le cours magistral avec séances d'exercices, alors l'étudiant ne rencontre le savoir que strictement dans le discours du professeur. L'économie de cet exposé, son formalisme, son abstraction s'affichent alors comme des caractères idoines au rapport institutionnel. Toute personnalisation, toute contextualisation sur le terrain de ses connaissances, donc de ses rapports privés, tout recours à l'intuition sont alors des actes que l'on ne montre pas. En revanche, il est possible de faire sien le discours formel, de l'exposer et de garder soigneusement pour soi tout rapport privé. C'est cette performance que vont viser les étudiants, comme réponse supposée attendue de leur apprentissage des mathématiques.

On le constate, le contrat engendré par le cours magistral entraîne une dérive dans l'évolution des rapports personnels de l'étudiant, que rien dans ce contrat ne permettra de contrôler. Si le professeur veut le faire, ce qu'il souhaite ici, il faudra provoquer la rupture, par une intervention évidemment hors du champ délimité par le cours magistral, ce qui sera certainement vécu comme surprenant par les étudiants (vous voulez nous piéger, vous qui jonglez avec le savoir!). C'est une rupture de cette nature qui apparaissait dans le séminaire Burlet-Burger cité en préambule. Innover consiste donc à donner suite à cette rupture, par une nouvelle négociation du contrat. C'est l'objectif des séminaires.

Ce prolongement que va ainsi montrer l'institution, par des pratiques hors du champ institutionnel couvert par le cours magistral, est bien ce que visent les initiants. Il devrait atténuer la dérive présentée ci-dessus.

Le séminaire sur la théorie des nombres

Chaque séance (six de 1h30) se déroule selon le schéma suivant : résolution de problèmes distribués par J. Steinig sur le moment ou à la fin de la séance précédente; pratiquement toutes les résolutions proposées par les participants, et il y en a toujours, sont notées au tableau par le professeur, sous dictée des «solutionneurs». M. Steinig pose quelques questions, demande quelques précisions afin que la solution présentée au tableau soit rigoureuse. Il distribue ensuite une solution qu'il a rédigée lui-même, ainsi que les éléments théoriques concernés. Ces documents sont accompagnés de brefs commentaires, mais ne font pas l'objet d'une étude approfondie. Un ou deux nouveaux problèmes sont proposés et le même processus se répète.

Les participants apprécient visiblement la formule. Tous s'activent à résoudre les problèmes proposés, pendant et entre les cours, ils se font un point d'honneur d'amener des solutions, au moins partielles. Ils posent des questions, à propos de la théorie des nombres, émettent des hypothèses, tentent d'autres formulations de certains théorèmes ou conjectures.

On le constate, ce que montrent les participants de leurs rapports au savoir est très différent que dans les cours magistraux. Ils résolvent allègrement les exercices, se trompent ou proposent des pistes originales, conjecturent. Certes, le public et les contraintes, de même que le contrat, sont très différents. La même personne, placée dans les deux contextes, cours magistral et séminaire, agit très différemment. J. Steinig nous rapporte l'anecdote suivante : un de ses étudiants renâcle à faire les exercices du cours d'analyse combinatoire (contexte magistral) et les fait avec plaisir dans le séminaire de théorie des nombres !

Les quatre séminaires

Là aussi, le lecteur intéressé ira rechercher une description détaillée des contenus et déroulements dans le rapport entier. Nous n'en donnerons ici que quelques éléments qui ressortent de l'analyse de l'ensemble des séminaires.

* Les étudiants ont marqué une réelle surprise, une découverte même, à être confrontés à des problèmes concrets, comme une démarche tout à fait opposée à ce qu'ils ont l'habitude de faire. Ils ont distingué «faire des mathématiques» et appliquer le résultat d'une théorie.

  «Il n'y a rien à démontrer, ça m'énerve!» (entendu deux fois au début du 1er séminaire).
  «Dans le cours, il ne faut jamais trouver quelque chose; heureusement, ce serait trop difficile. Cela m'inquiète même que dans le cours, il n'y ait pas quelque chose à prouver; c'est une sécurité que l'on a pas ici». Citation d'un étudiant du séminaire .

* Les étudiants vont faire des conjectures, poser de nouveaux problèmes comme réponses aux premiers, confronter différentes approches.

  «C'est aussi faire des maths» dira l'un.
  «C'est peut-être plus fortement des maths ici. Il y a plus de raisonnement et de recherche. Alors que les exercices que nous avons habituellement correspondent à tel ou tel chapitre, tel ou tel théorème. Ici, il faut chercher».

* Ils ont mesuré toute la difficulté à faire comprendre aux autres ce qu'ils avaient compris, les autres n'ayant pas fait le même travail de recherche qu'eux. Par rapport à un cours, tous ont le même passé.

  «On s'habitue à la complexité d'un problème; ce qui nous paraît évident peut être un véritable obstacle pour l'autre».

* Dans le même registre, ils ont également mesuré la difficulté d'entendre l'autre, de faire avec ses idées et ses propositions.

  «Je pensais faire quelque chose des solutions de David. Je n'y suis pas toujours parvenu, je n'avais pas envisagé le problème comme cela, je n'avais pas assez de recul».

* Ils ont constaté qu'il était possible de résoudre des problèmes sans maîtriser a priori toute la théorie concernée; c'en était même une bonne approche.
  «Je préfère cette méthode à la copie du cours; reste bien sûr à faire après coup la lecture de la théorie, pour bien comprendre les théorèmes et les démonstrations».

* Ils ont perçu un autre éclairage d'une théorie formelle.

  «Lorsque l'on reçoit une série de définitions au début d'un cours, on ne comprend pas vraiment comment ils ont établi que c'est ce qu'il fallait écrire pour que ça marche; ils ont cherché, rencontré les difficultés et ils ont adapté les définitions; on ne voit plus les difficultés. En partant de définitions proches de l'intuition, c'est évidemment plus difficile, il y aura des obstacles. En topologie, on ne voit pas au début l'intérêt de définitions si formelles. Pourtant, y en a tout plein».

Un autre contrat didactique a nettement montré dans ces séminaires le bout de son nez. Même si les étudiants ont dans leurs démarches parfois fonctionné sur la lancée du contrat «cours magistral», comme parfois les professeurs d'ailleurs, d'autres rapports au savoir sont apparus, au travers de l'action de faire des mathématiques, et d'en faire une composante, que de les faire comprendre aux autres.

Conclusions

La DDM et les mathématiques ont une intersection non vide. Sans communication, sans diffusion du savoir, sans moyens pour faire comprendre ses objets de pensée à l'autre, mathématicien ou non, les mathématiques n'existent tout simplement pas. Cette diffusion est justement ce qu'étudie la DDM. Le présent rapport en est un exemple et en montre certains effets. Sur ce plan, nous ne pouvons que souhaiter l'intérêt de l'IMA pour de telles collaborations.

D'autre part, il y a dans les actes de diffusion du savoir mathématique des phénomènes qui mettent en jeu des objets mathématiques. Prenons un exemple provenant du problème de la clothoïde, proposé lors du 4e séminaire. La caractéristique physique qui définit cette courbe engendre sa propriété de proportionnalité entre courbure et abscisse curviligne (chemin parcouru). Mais comment la traduire, l'abscisse curviligne n'étant pas trivialement accessible, pour établir l'équation cartésienne ou paramétrique de la courbe ?

La difficulté donne du sens au concept et éclaire l'apparition des intégrales définies proposées comme équations paramétriques, si elles ne les établit. Encore faut-il ne pas passer à côté de cet éclairage, ce qui c'est produit dans le séminaire : les animateurs, qui avaient à transmettre du savoir sur la clothoïde, en ont parachuté d'entrée les équations paramétriques, ce qui a entraîné l'incompréhension d'un étudiant (et peut-être de tous) concernant un quelconque rapport avec la courbure.

L'enseignement des mathématiques fourmille de phénomènes de ce type. La DDM les étudie.

Enfin, un dernier apport que nous considérons comme accessoire, mais qui n'est pas à négliger : pour l'étudiant, la mise en évidence de phénomènes didactiques au cours de son apprentissage des mathématiques pourra constituer un bagage particulièrement consistant s'il se destine à l'enseignement.

Suites du projet

L'étudiant qui apprend des mathématiques, et l'IMA se présente comme un lieu pour ce faire, doit faire des mathématiques. Si nous admettons que l'IMA s'en porte garant, il le donne à voir dans son contrat institutionnel. Que signifie faire des mathématiques, comment faire des mathématiques, comment faire comprendre ce que l'on fait, ces questions didactiques deviennent alors fondamentales, l'étudiant intègre des observations sur son propre fonctionnement comme une des dimensions des mathématiques.

Il acquiert donc aussi, comme des objets mathématiques, des aptitudes à communiquer sa pensée, à montrer les modèles qui lui fournissent des questions, des conjectures, des analogies. Ce sont ces aptitudes dont parle O. Burlet dans une demande qu'il a plusieurs fois formulée: «ce serait tout de même utile que nos étudiants apprennent à présenter leurs recherches devant un auditoire».

Le dispositif testé a permis aux étudiants d'exprimer des questions d'ordre mathématique, mais aussi d'apprentissage, la lecture des divers interviews effectués le montre. Une ouverture est donc possible par ce biais-là, et de nouvelles expérimentations sont nécessaires pour développer notre hypothèse, c'est dans ce sens que vont les propositions que nous faisons à la fin de notre rapport. Celles-ci seront étudiées dans le courant de l'année 1998-1999, et nous espérons qu'une suite pourra être donnée à cette recherche.

Voyage au centre de la géométrie (suite)

Le puzzle, un outil didactique au service des maths

G. Sarcone & M.J. Waeber

«Dant sustentacula casum».
Les soutiens causent la chute

L'acquis, sans la pratique et la connaissance du milieu, est un fardeau inutile qui conduit parfois à des impasses. Il arrive qu'une formule appliquée à une situation précise, non seulement ne résoud pas le problème, mais de plus, CONSTITUE le problème! Sans vouloir faire un autodafé des livres de mathématiques, il faut toutefois apprendre à se "méfier" des formules toutes faites et privilégier l'expérimentation (en anglais: «hands-on experiences»).

Les puzzles de dissection ont l'avantage de nous offrir une vue en coupe (c'est le cas de le dire) des formules qui régissent les formes. Après vous avoir présenté dans *Math-Ecole no. 183* quelques métamorphoses géométriques de triangles équilatéraux, poursuivons notre voyage dans le monde des dissections, en prenant le carré comme sujet et moyen de découverte.

Les exercices que nous vous proposons dans ces pages doivent être adaptés au niveau de chaque classe. L'élève sera libre de pouvoir interagir sur les formes qui lui sont imposées. Votre objectif, si l'expérience vous tente, sera d'observer de quelle façon il utilisera son acquis et de le guider dans sa recherche. C'est un peu comme chiner dans la brocante des mathématiques et, par le biais d'un "objet" géométrique étonnant ou insolite, redécouvrir sous un jour nouveau des formules "oubliées".

Il faut, cependant, garder à l'esprit que "expérience" est également synonyme de précision, rigueur et patience. Les erreurs sont souhaitées, car elles font parties de l'aiguillage qui mène au résultat...

Coupes au carré pour toute la classe

Couper un carré en 4
Comment découper 2 différents carrés de sorte qu'en réassemblant leurs pièces (maximum 5) l'on obtient un nouveau carré, sans besoin de baguette magique? Grâce au procédé que nous avons baptisé «méthode de la croix», cela devient un jeu d'enfant.

Mise en place

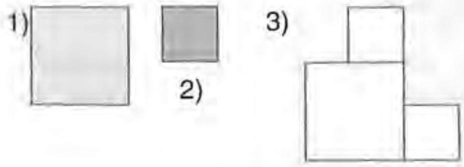
a) En vous aidant des grillages, dessinez un grand carré sur une feuille quadrillée (fig. 1), puis, demandez à un élève de dessiner un carré plus petit (fig. 2). Maintenant vous pouvez dire à votre élève que vous découperez ces 2 carrés, en moins d'une minute et sans les mesurer, en 4 pièces qui, réassemblées convenablement, formeront un carré plus grand.

Commençons...

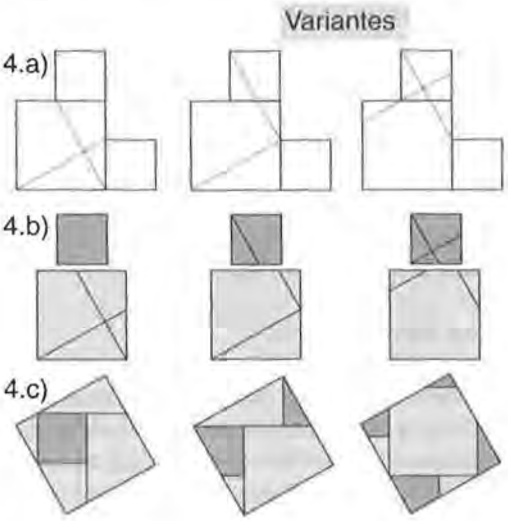
b) Redessinez les deux carrés mais en les disposant selon la fig. 3), le plus petit carré doit être représenté deux fois, sur deux côtés du plus grand.

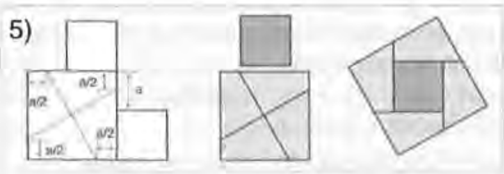
c) Tirez deux perpendiculaires selon pointillés de la fig. 4.a) de la page suivante. Pour ce faire, il existe de nombreuses variantes, le but, toutefois, est de découper le carré en moins de pièces possibles.

d) Enfin, découpez votre puzzle selon les exemples de la fig. 4.b) et 4.c). Etonnant n'est-ce pas? La fig. 5) vous montre un développement intéressant du procédé, quoiqu'un tantinet plus laborieux. Si vous souhaitez garder votre découpage, vous pouvez coller votre dessin sur du carton fort avant de le découper.



Découpes en deux coups de cuillère à pot



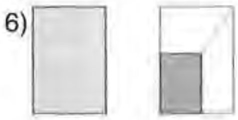


Méthode généralisée au rectangle

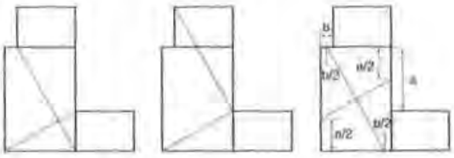
Couper un rectangle en 4

Nous pouvons utiliser la même méthode de la croix pour découper deux rectangles semblables (fig. 6) en un nombre minimal de pièces qui, une fois rassemblées formeront cette fois-ci un nouveau rectangle.

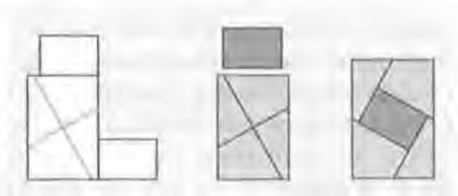
Vous pouvez vous aider comme auparavant d'une feuille quadrillée. La mise en place et l'exécution restent les mêmes.



3 variantes



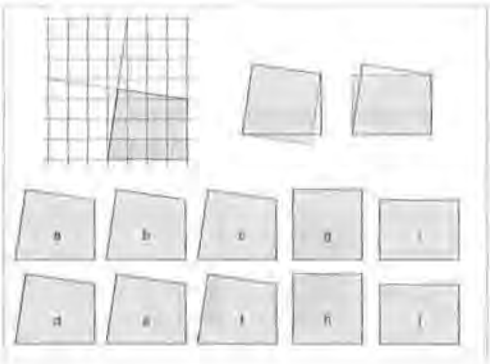
Découpe et assemblage d'une variante



Un jeu de dissection pour votre classe

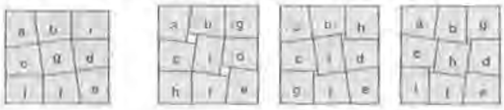
Observer, réorganiser des formes

Les 4 quadrilatères qui forment le carré de la fig. 5) de la page précédente nous ont inspiré un petit exercice de visualisation géométrique. Demandez à vos élèves de découper dans du carton fort les dix formes du diagramme ci-dessous (6 quadrilatères convexes, 2 carrés, 2 rectangles). Puis, demandez-leur de former un rectangle en choisissant uniquement 9 des dix pièces. Cet exercice ne posera pas trop de problèmes (fig. 7.a), le plus dur restant à faire... Demandez-leur, enfin, de former un carré parfait avec 9 des dix pièces (pas forcément les mêmes). Là, il y a une petite astuce! (il existe plusieurs solutions, voir fig. 7.b); en effet, il est impossible de former un carré parfait sans "trous"...



Solutions

7.a) 7.b) carrés, configurations possibles



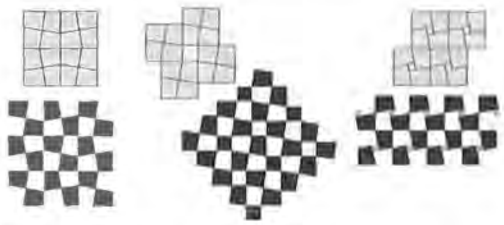
Observer, réorganiser des formes: formules
Vous pouvez poursuivre le travail de recherche en demandant à vos élèves de trouver les autres propriétés des quadrilatères particuliers de la page précédente (nous avons inventé un nom pour ces polygones: «scutellogrammes»). Le but, ici, est d'apprendre à regarder et à découvrir par ses propres moyens, sans contraintes, un "objet" géométrique nouveau. Cela permet aux élèves de mettre en pratique leurs acquis ET leur inventivité.

Propriétés remarquables du scutellogramme

$A = (a + b)^2/4$ $\qquad c^2 = (a^2 + b^2)/2$

Si $|a - b| = 1, A = 4c^2 - 1$

Question subsidiaire: existe-t-il des scutellogrammes ayant pour a, b et c des entiers? Grâce aux équations de Pell, nous pouvons trouver les valeurs suivantes: a=1, b=7, et c=5. A vous de trouver la suite...



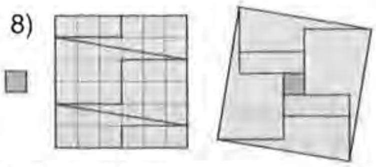
Pas facile de voir des carrés dans ces mosaïques ! (voir agrandissement en p. 19)

Observer, réorganiser des formes: pavages
Les pavages, appelés «tessellations» en anglais, sont l'expression la plus ancienne du sens géométrique de l'homme. Réalisez des patrons du scutellogramme ci-dessus et demandez à vos élèves de recouvrir avec ces motifs une surface en faisant en sorte que les figures géométriques s'imbriquent parfaitement. Il existe une multitude de solutions (voir ci-dessous); pour mieux mettre en évidence le jeu de construction, colorez les formes alternativement en noir et blanc. Translation, symétrie et rotation sont les maîtres-mots de cet exercice.

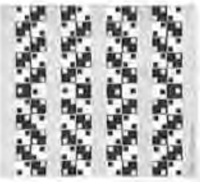
Pour clore

Terminons cette rubrique en présentant, comme à l'accoutumée, des curiosités géométriques. En restant dans le sujet du carré, vous trouverez ci-dessous (fig. 8) une façon originale d'en découper un de sorte que l'on puisse, en rassemblant différemment ses pièces, y inclure le petit carré annexe. Plus bas, se trouvent des illusions d'optique réalisées uniquement avec des carrés! La fig. 9.a), une de mes inventions nommée «checkerboarded slats illusion», tend à nous faire croire que les lattes en damier sont convexes, alors qu'elles sont parfaitement droites et parallèles... Si vous regardez attentivement la fig. 9.b), vous aurez l'impression que les rangées composées de carrés alternativement noirs et blancs ne sont pas parallèles. Enfin, la fig. 9.c) nous donne une impression de chaos lorsqu'on la regarde à une certaine distance. Pourtant, ce ne sont que de gentils petits carrés bien rangés...

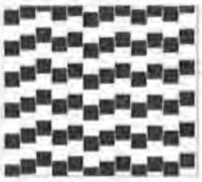
8)



Carrément trompeur ...
Illusions hypnotiques (voir p. 48)



9.a)



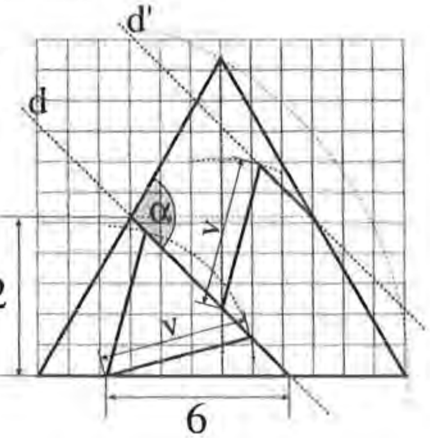
9.b)

9.c)

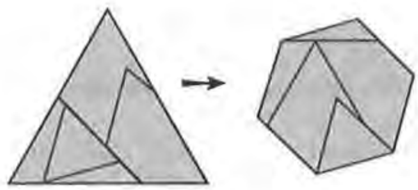
Encore des curiosités géométriques

Dans la revue Math-Ecole no.183, nous avons traité de dissections de triangles équilatéraux. Nous vous proposons deux ajouts intéressants: la fig. 10) nous montre la manière la plus élégante de découper un triangle en un nombre minimal de pièces qui permettront également de former un hexagone. Les exemples de la fig. 11) nous ont été envoyés par un spécialiste de "tessellations", M. A. Crompton (©), de Manchester UK. Qui a dit que la mayonnaise ne prenait pas avec la géométrie?

10)

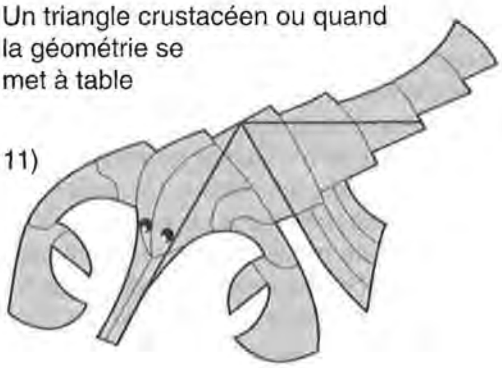


Valeurs des dessins:
base du triangle: 12
$h = 6\sqrt{3} = 10{,}392...$
$v = 2\sqrt{6} = 4{,}898...$
angle a = 105°



Un triangle crustacéen ou quand la géométrie se met à table

11)



Internet

Sites très intéressants qui traitent de géométrie et de pavages:
http://dspace.dial.pipex.com/crompton
http://www.geom.umn.edu
http://www.cs.purdue.edu/homes/gnf
http://www.geocities.com/TimesSquare/Labyrinth/2305

GAUSS «princeps mathematicorum»

Marc Guinot, ALEAS EDITEUR, 1997, 15 Quai Lassagne - F - 69001 Lyon (365 pages).

Après Pythagore, Euclide et toute la clique, après Fermat et ses «resveries», après «Ce diable d'homme» d'EULER, après Lagrange et Legendre, Marc Guinot poursuit sa démarche à travers les siècles. Ce cinquième volume d'arithmétique pour amateurs s'intéresse à une partie de l'œuvre arithmétique du «prince des mathématiques» que fut Carl Friedrich Gauss aux yeux de ses contemporains. En voici la présentation de l'éditeur :

«La majeure partie de cette œuvre est constituée par des recherches arithmétiques effectuées dans les dernières années du XVIIIème siècle. C'est dans cet ouvrage qu'on trouve pour la première fois le langage des congruences (présenté dans notre livre II), la première démonstration complète de la loi de réciprocité quadratique (Livre IV) et la mise en évidence du fait, ignoré avant Gauss, que le polygone régulier à 17 côtés peut être construit à la règle et au compas. Mais l'essentiel du livre de Gauss est consacré à la théorie des formes quadratiques qui permit à Gauss de démontrer une affirmation célèbre de Fermat selon laquelle tout entier naturel est une somme de trois nombres triangulaires.

Outre ces questions passionnantes, nous étudierons dans ce livre V la théorie des entiers de Gauss (abordée par Gauss en 1831), ce qui nous permettra d'élargir notre propos à l'étude de la divisibilité dans les anneaux et d'appliquer les résultats obtenus aux anneaux d'entiers quadratiques, tout cela bien entendu ad majorem gloriam arithmeticae ... »

Au sommaire :

A Des entiers de GAUSS aux anneaux...pseudo bezoutiens
1 - L'anneau des entiers de Gauss
2 - Divisibilité dans les anneaux intègres
3 - Anneaux factoriels
4 - Anneaux à PGCD
5 - La théorème de BEZOUT
6 - Anneaux d'entiers quadratiques

B Formes quadratiques à deux ou trois variables
1 - Formes et classes de formes
2 - Réduction des formes et détermination du nombre de classes
3 - Formes et classes ambiguës de discriminant donné
4 - Composition des classes de formes et groupes de classes
5 - Petite théorie des formes quadratiques ternaires
6 - Le théorème de l'existence des genres

C Des Formes quadratiques au problème de Waring
1 - EYPHKA ! num = + +
2 - Les sommes de trois carrés en général
3 - Le théorème des nombres polygonaux
4 - Le problème de Waring dans le cas des cubes

Mots-clés : mathématiques, arithmétique, anneaux, formes quadratiques, Gauss

Destinataires : tous les maîtres de mathématiques

MATHÉMATIQUES COLLÈGE
André Deledicq

Collection MANUEL+, Éditions de la Cité, 1998.

Voici un manuel d'un type nouveau, qui couvre les quatre années du collège en France (degrés 6 à 9 en Suisse romande) et aborde l'ensemble de la discipline pour ces niveaux. L'ouvrage comprend cinq parties : les bases, le fil rouge, les points clés, les fiches pratiques et le dico, que l'auteur décrit ainsi, dans son avant-propos :

... Mais, ce qui est le plus fabuleux, c'est le plaisir qu'on prend à en faire ...

Finalement, les mathématiques vous invitent à une véritable culture, à la fois nécessaire, utile et agréable...

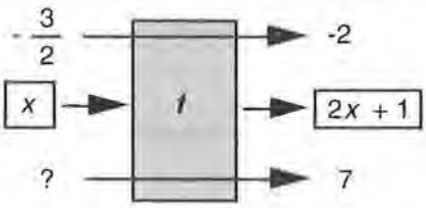
Nous souhaitons que ce livre vous accompagne dans cet esprit tout au long de votre scolarité, comme un ouvrage de référence, toujours proche de vous. Selon les périodes et selon les besoins, vous en étudierez les différentes parties :

- *Vous lirez le Fil rouge une fois, deux fois ou trois fois ... Ce n'est pas un cours et vous le lirez à différentes profondeurs selon votre âge. Nous avons voulu vous y dire ce que sont les mathématiques, comment elles fonctionnent, comment on les lit et on les écrit, tout en insistant sur trois domaines :*
  - *les nombres et leurs fantastiques propriétés,*
  - *la proportionnalité et le calcul linéaire, dont la présence et les applications semblent si universelles,*
  - *les transformations géométriques et leurs si merveilleuses combinaisons.*
- *Les Bases contiennent ce que vous pourriez connaître à l'entrée au collège et vraiment bien savoir à la fin de la sixième.*
- *Les Points clés vous apportent, ou vous rappellent, les savoirs et les savoir-faire du collège. Mais vous y trouverez aussi des exercices (des «défis»), tout comme dans le dictionnaire (tous les exercices sont corrigés).*
- *Les Fiches pratiques font le point sur les méthodes de base en ouvrant les mathématiques sur l'extérieur.*
  Laissez-vous prendre au jeu! Vous aimerez les maths.

Les trois exemples suivants donnent une idée du langage utilisé dans l'ouvrage et du niveau des connaissances présentées.

1. Dans les Points clés

Fonction ou machine ?
Une fonction est une espèce de «machine»; à l'entrée on lui donne un ou des produits (dans notre cas il s'agit de nombres). Et à la sortie elle restitue un objet (dans notre cas, c'est aussi un nombre, appelé «image»).

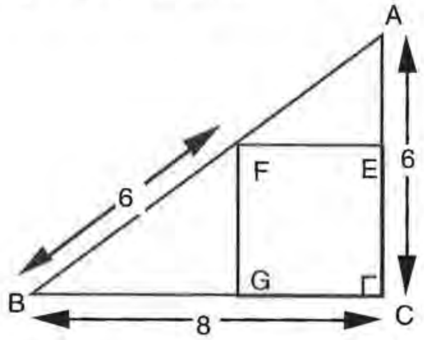


2. Dans le Fil rouge

En cinq petites pages, comprenant une dizaine de figures très suggestives, on découvre ce qu'est un pavage, «comment le regarder», «quelles sont les isométries qui le laissent globalement invariant». On apprend aussi que les «clés d'assemblage des pavés» permettent d'en «reconnaître 17 familles, ni plus, ni moins», qui ont chacune un représentant sur les murs de l'Alhambra de Grenade. On fait finalement connaissance avec la famille R2, dans laquelle il n'y a que des translations et des symétries centrales et on apprend à construire des pavés aux motifs d'oiseaux, par la méthode dite de «l'enveloppe».

3. Un des nombreux «défis» des Fiches pratiques, au chapitre du théorème de Thalès

Sur cette figure, sauriez-vous dire si le rectangle EFGC est un carré ?



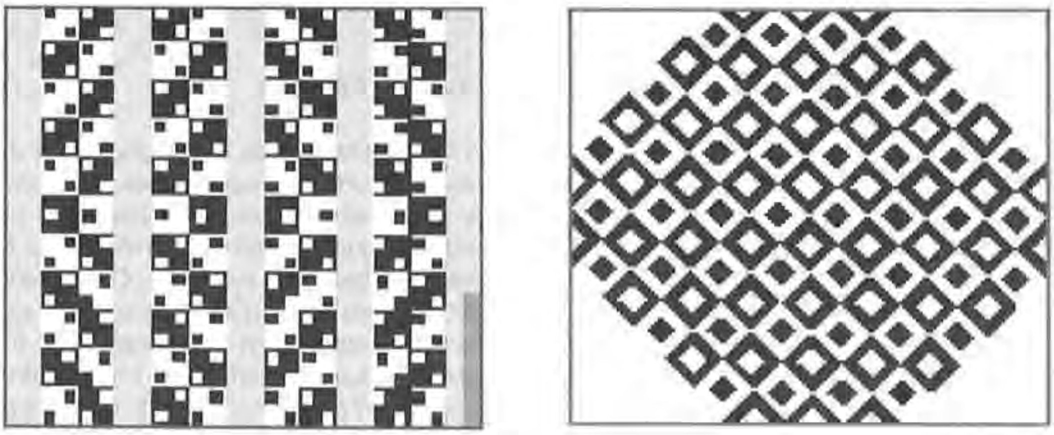
L'ouvrage peut paraître un peu ambitieux au niveau de certaines notions mathématiques. Les «Bases» en particulier, présentées comme «ce qu'un élève devrait savoir à l'entrée en sixième» (11 ans), nous paraissent plutôt se rapporter aux connaissances qu'on souhaite bien construites à 12 ans, voire 13 ans.

Mais, à cette petite réserve près, *MATHEMATIQUES COLLEGE*, nous paraît constituer une référence solide pour un élève de l'école secondaire, pour un adulte qui souhaiterait rafraîchir ses connaissances et même pour un maître de mathématiques à la recherche d'ouvertures. Car l'ouvrage n'est pas un «manuel» comme les autres, c'est plutôt un outil de promotion par lequel A. Deledicq fait découvrir au lecteur les mathématiques dans leurs dimensions scientifique, évidemment, mais aussi culturelle, esthétique et ludique.

Mots-clés : mathématiques, école secondaire, dictionnaire, manuel, synthèse des connaissances

Destinataires : élèves et maîtres du secondaire, parents

Agrandissement des illustrations hypnotiques de la page 45.



Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Enseigner la géométrie dans l'espace, APMEP	.....	(ex. à Fr. 32.-)
Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	.....	(ens. à Fr. 30.-)
Encyclopédie kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)
Les annales du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 29.-)
Exos-malices, ACL	.....	(ex. à Fr. 29.-)
Les maths & la plume, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)
Pliages mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	.....	(ex. à Fr. 25.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	.....	(ex. à Fr. 26.-)
La CIEAEM au travers de ses 50 premières rencontres.	.....	(ex. à Fr. 6.-)
Maths en vacances. Hypercube.	.....	(ex. à Fr. 15.-)

Les anciens numéros de ***Math-Ecole*** (prix en page 2 de couverture)

PROBLEMES DE RALLYES ET CONCOURS :

Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	.....	(ex. à Fr. 28.-)
Fichier Evariste APMEP	.....	(ex. à Fr. 20.-)
Panoramaths 96, APMEP	.....	(ex. à Fr. 15.-)*
Problemi, che passione, Ed. Capitello.	.....	(ex. à Fr. 9.-)
Récrémaths	.....	(ex. à Fr. 13.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école	.....	(ex. à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles	.....	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous	...	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens	.....	(ex. à Fr. 16.-)
Le Trésor du vieux Pirate (n°12)	...	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Singe et la Calculatrice (n° 14)	...	(ex. à Fr. 5.-)*
La Biroulette russe (n° 9)	....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Pin's Tourneur (n° 11)	....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Roi des Nuls (n°13)	....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Sabre d'Aladin (n° 15)	....	(ex. à Fr. 5.-)*

*En liquidation jusqu'à épuisement du stock.
Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7

SOMMAIRE