MATH ECOLE

Géométrie pascale

8e Rallye mathématique transalpin : finale

Chiffres inversés

39e année

192

juin 2000

Math-Ecole,
pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros):
Suisse: CHF 30.- compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger: CHF 35.- par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 7.-
anciens numéros : CHF 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 22.- par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole,* Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7,**
par courrier électronique E–mail : **francois.jaquet@irdp.unine.ch**
ou par INTERNET : **http://www.irdp.ch/math-eco**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE

38e année 5 numéros par an

192
juin 00

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut de Recherche
et de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél. (032) 889 8603
(de 14h à 17h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 8609
Fax (032) 889 6971

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Jacques-André Calame
Michel Chastellain
Roger Délez
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Alain Ramelet
Hervé Schild
Martine Simonet
Mireille Snoecks
Janine Worpe

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

EDITORIAL :
François Jaquet 2

Deux puzzles logiques
François Boule 4

Géométrie Pascale
Denis Odiet 7

Voyage au centre de la géométrie
Le puzzle, un outil didactique
au service des maths
G. Sarcone, M. J. Waeber 14

Chiffres inversés
François Jaquet 22

8e Rallye Mathématique Transalpin
Finale 26

Réponses aux problèmes de
la finale du 8e RMT 31

Notes de lecture 39

Editorial

Au-delà de la coordination

François Jaquet, IRDP

«Sympa de travailler en groupe ... »

«Toute la classe vous remercie, ... chacun a fait preuve d'un grand enthousiasme, ... Nous avons bien reçu les petits cadeaux par la poste. Il restera aux élèves un petit souvenir concret de ce petit concours qui leur aura aussi permis de resserrer les liens et d'améliorer leur coopération.»

«... Le concours a donné à ma classe l'opportunité de pratiquer la pédagogie des situations problèmes, ce qu'on ne fait pas habituellement, par manque de motivation et parce que le programme ne nous en laisse pas le temps. .... J'ai aussi constaté que ce travail en commun a beaucoup amélioré l'esprit de classe.»

« ... Una collaborazione molto significativa, in cui ogni individuo dà il proprio contributo, che forse non pensava addiritura di poter concepire. ...» (une collaboration très significative au cours de laquelle chaque individu fournit sa propre contribution, comme, peut-être, il ne pensait pas pouvoir l'imaginer. ...)

«C'est une bonne idée, ça nous habitue à travailler en équipe, ...»

Toutes ces citations sont des extraits d'articles de presse, de lettres, de messages écrits, de commentaires de collègues dont les classes ont participé au 8e Rallye mathématique transalpin (RMT) ou qui sont venus assister à l'une des finales, le 10 mai dernier, à Berne, à la Tour-de-Peilz ou au Tessin.

On peut parler de coordination à propos du RMT si l'on sait que les milliers de classes inscrites en Suisse, en Italie, en France, au Luxembourg et d'autres pays encore ont planché sur les mêmes problèmes, lors des premières épreuves comme en finale.

Mais la constante qui apparaît dans les extraits précédents et dans la grande majorité des autres témoignages reçus, concerne les échanges, les contacts, le travail en groupe, l'esprit d'équipe. C'est l'idée de *coopération*, qui va nettement au-delà de la *coordination*.

La coopération est essentielle pour l'avenir de notre société, face à sa complexité, technique, sociologique, culturelle et politique. Cette coopération est intégrée dans la démarche scientifique, en particulier lors des phases de recherche, de validation et de communication des résultats. Nos plans d'études et moyens d'enseignement la recommandent, puisqu'ils proposent d'aborder les mathématiques par la résolution de problèmes, par groupes, avec des phases de mise en commun et de débat.

A ce propos, parlons un peu des problèmes et cherchons à comprendre ce qui différencie ceux d'aujourd'hui - des concours de mathématiques, des nouveaux moyens d'enseignement - de ceux d'hier, souvent assimilés à des exercices ou des applications de notions qui viennent d'être présentées. Les problèmes d'aujourd'hui paraissent moins ennuyeux, plus originaux, plus plaisants certes, mais surtout plus ambitieux, plus «consistants», plus difficiles : «ils sont beaux, vos problèmes, mais quel casse-tête pour les résoudre !» ou, «il n'y a que les bons élèves qui pourront les résoudre, les autres n'y verront que du feu !» ou encore, «même moi, je sèche, alors, mes élèves ... !». Ces doutes sont légitimes dans une concep-

tion individuelle de la résolution de problèmes, ils s'effacent devant les productions du travail collectif.

Voyons quelques résultats. Nos 39 classes romandes de la finale du 8e RMT ont livré 255 protocoles de résolution des problèmes qui leur ont été soumis, bien «résistants» comme on peut le constater dans les pages 26 à 38 . Sur ces 255 réponses, 98 (38 %) étaient parfaitement correctes et bien justifiées, 27 (11%) donnaient la(les) solutions(s) juste(s), sans toutefois briller par leurs explications, 39 (15%) ne donnaient que la réponse, juste ou presque, 55 (22%) ne fournissaient qu'un début de solution ou conduisaient à des erreurs et, finalement, seules 36 (14%) résolutions étaient incohérentes ou témoignaient d'un incompréhension du problème.

Le constat est du même ordre pour d'autres pratiques de résolution de problèmes par groupes, lors de concours ou dans le cadre scolaire habituel. En classe de mathématiques, il y a certes des relances, des mises en commun, des échanges à organiser lorsque la solution tarde à apparaître, mais le débat, les interactions permettent d'éviter les nombreux blocages bien connus lorsque l'élève est seul pour s'approprier le problème, lorsqu'il est isolé en face des tâches de résolution, lorsque personne n'approuve ou conteste ses hypothèses de recherche, lorsqu'il n'a pas à défendre ou justifier les solutions trouvées. La coopération entre élèves modifie totalement le développement de la résolution d'un problème. Par conséquent, la part de recherche dévolue à l'élève devient plus importante et n'est plus à la charge de l'énoncé ou du maître.

La coopération existe aussi chez ceux qui préparent les problèmes, qui les analysent, qui les exploitent aux fins d'apprentissage et d'évaluation. Il y a coordination lorsque des maîtres disposent du même ensemble de situations mathématiques : problèmes, jeux et autres propositions d'activités. Il y a coopération lorsqu'ils en parlent, les développent, les adaptent, comparent les productions de leurs élèves.

C'est le cas, en particulier, lors des nombreuses séances d'élaboration des problèmes du RMT et des multiples consultations, régionales et internationales pour établir, souvent in extremis, la version définitive d'une épreuve. C'est le cas lors des séances de corrections, où il faut être plusieurs pour discerner les diverses stratégies de résolution et évaluer le niveau des procédures.

Mais cette coopération n'est pas l'exclusivité du RMT ou d'autres concours de mathématiques. Il y a, en Suisse romande, des équipes de maîtres, de formateurs et de chercheurs qui s'engagent dans l'organisation d'évaluations communes, dans l'élaborations de moyens d'enseignement ou de séquences d'enseignement, dans des analyses didactiques, ... Les échanges de pratiques, la mise en commun des apports de chacun sont, là aussi, la condition nécessaire de la réussite de leurs travaux.

Nos autorités scolaires et politiques de Suisse romande, un peu frileuses, ont jugé dernièrement que le mot «coordination» n'était plus de mise. Pourquoi alors ne pas leur suggérer de franchir le cap de la coopération. En mathématiques, par exemple, on pourrait imaginer des groupes qui, par delà des frontières cantonales, «co-opèrent» dans l'analyse de situations mathématiques, dans le «service après-vente» des nouveaux moyens d'enseignement, dans les études prospectives en vue de la future innovation, dans la formation des auteurs de manuels, dans la formation permanente et, pourquoi pas, dans une recherche en didactique des mathématiques commune aux différentes institutions de nos cantons ou régions.

Deux puzzles logiques

François Boule
CNEFEI Suresnes, France

Les puzzles sont des jeux largement répandus, y compris à l'école, sous deux formes au moins : les puzzles figuratifs (Tower Bridge en 1000 pièces!), ou bien les puzzles *blancs* dont le Tangram est le plus connu. Deux formes d'indications sont principalement utilisées pour résoudre les puzzles du premier type : soit le repérage par rapport à l'image globale (le ciel plutôt en haut, l'herbe ou l'eau plutôt en bas), soit les compatibilités de voisinage (emboîtements). Les principes de résolution des puzzles de type Tangram sont légèrement différents puisque l'on fournit non pas une image globale, mais une silhouette, et que les pièces sont le plus souvent convexes. Un puzzle qui comporte un grand nombre de pièces est un *casse-tête* : il exerce principalement la patience, et secondairement la mémoire. L'enfant finit par mémoriser l'emplacement de chaque pièce. On peut parler d'usure du jeu, voire d'épuisement.

Il s'agit donc de renouveler le matériel, éventuellement les principes de fonctionnement.

Les papiers cadeaux permettent, pour un faible coût, de construire des jeux d'une grande variété. Voici deux exemples de puzzles que l'on pourrait qualifier de *logiques* : le premier fait appel à une activité préalable de *classement*, l'autre à des *inférences*. Ils sont faciles à construire. La difficulté peut être graduée à volonté, notamment par le nombre de pièces que l'on choisit de fournir.

Premier exemple

Choisir un papier-cadeau dont le motif est petit, c'est-à-dire où n'apparaisse pas une image globale, et tel qu'un fragment ne puisse pas être situé par rapport à l'ensemble. On découpe un tel rectangle en rangées et colonnes de telle façon que toutes les rangées et colonnes aient des dimensions différentes :

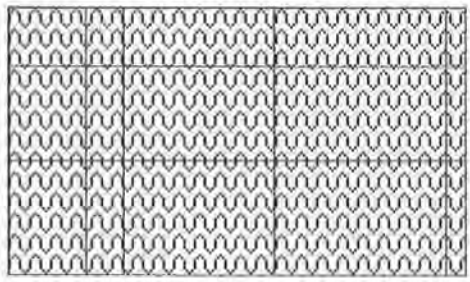


fig. 1

Le voisinage des pièces deux à deux donnant peu de renseignements, la meilleure stratégie consiste à classer les pièces par largeur (ou longueur), puis à établir une séquence (rangée ou colonne) ; on est ainsi assuré d'un canevas dans lequel les autres pièces vont s'insérer. Il reste à coordonner les autres colonnes ou rangées par rapport à celle-ci.

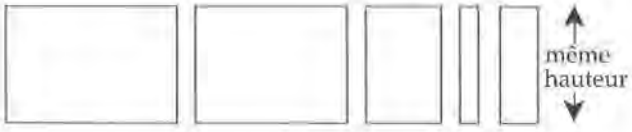


fig. 2

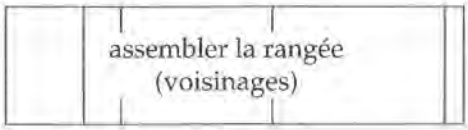


fig. 3

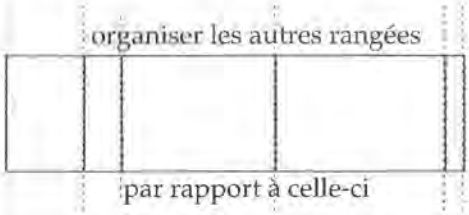


fig. 4

Second exemple

Sans chercher beaucoup, il arrive que l'on rencontre des papiers-cadeaux constitués de petites vignettes carrées organisées en un motif répété par translation. On découpe une portion constituée d'un nombre pair de cases, que l'on contrecolle sur un carton, puis que l'on débite en dominos de façon à associer une vignette tantôt à une voisine tantôt à une autre :

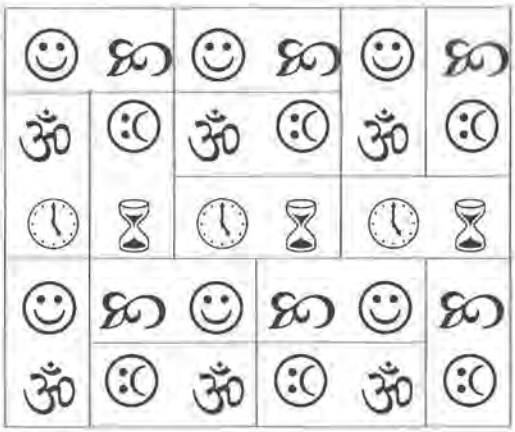


fig. 5

Le problème consiste à reconstituer le rectangle d'origine, en tenant compte des relations croisées. Comme il y a 15 dominos, on est assuré que le rectangle cherché est de dimensions 6x5. Partons de dominos qui contiennent la même vignette :

fig.6

La première renseigne sur le voisinage à droite, l'autre sur le voisinage inférieur.

On peut donc associer les deux dominos suivants :

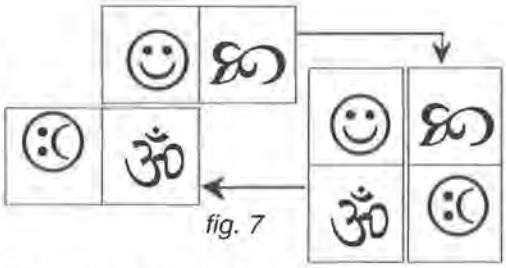


fig. 7

Ce qui met en jeu une nouvelle vignette et permet déjà de déduire que le motif a pour largeur 2.

En développant des "îlots" à partir de la vignette qui est la plus fréquente, on arrive à raccorder ces îlots. Il reste à corriger les bords (par des échanges) pour obtenir le rectangle 6x5 cherché.

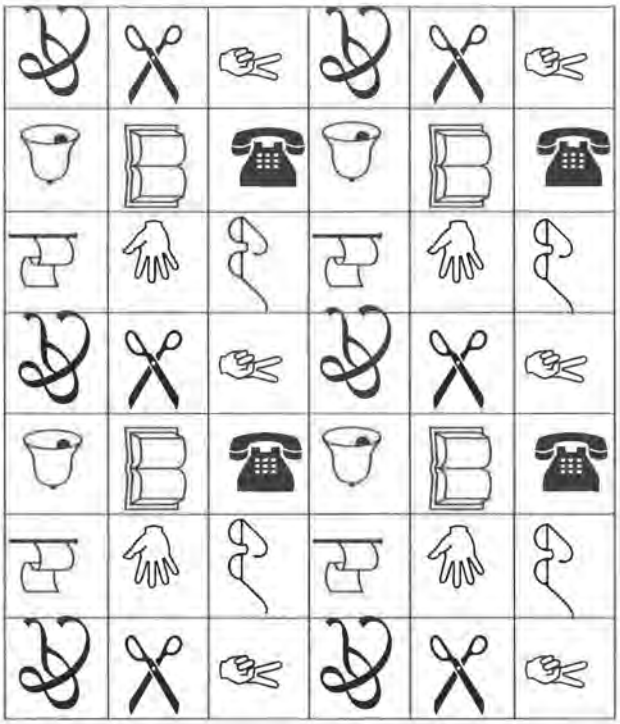
La difficulté du problème tient en premier lieu à la taille du motif. Ici, le motif 2x3 est petit. Pour l'intérêt du problème, il est souhaitable

- que le rectangle ne contiennent pas un nombre entier de motifs, ni en largeur, ni en longueur ; en conséquence, certaines vignettes sont plus fréquentes que d'autres,

- qu'une vignette A soit associée au plus grand nombre de voisins possibles,

– qu'aucune ligne de découpage ne traverse de part en part (si possible).

Voici un exemple un peu plus compliqué, avec un plan de découpage :



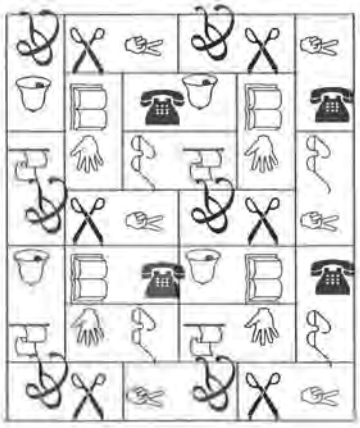


fig. 8

Pour des enfants plus jeunes ou moins patients, on peut ajouter une aide, en coloriant le carton sur tranche, avant le découpage. On donne ainsi une indication sur le bord du rectangle, ce qui est une aide importante. L'exploration des papiers-cadeaux, que l'on rencontre en particulière abondance en fin d'année, réserve quelquefois des surprises, et suggère de nombreuses exploitations géométriques ou logiques, pour des enfants de trois à huit-neuf ans.

GEOMETRIE PASCALE

Denis Odiet

A ce jour, nous ne savons pas pourquoi les oeufs sont plus pointus à une extrémité qu'à l'autre. Les propositions d'explication qui ont été avancées et selon lesquelles cette asymétrie partielle les empêcherait de tomber d'une falaise ou optimiserait l'agencement de la couvée chez les poules, n'ont jamais été prouvées.

Ce qui est par contre certain, c'est que les oeufs présentés ci-dessous ont tous ceci en commun : ils résultent de constructions géométriques d'arcs de cercle judicieusement mis bout à bout.

Les activités proposées présentent un double aspect d'ordre didactique non négligeable. D'une part, elles s'inscrivent dans un processus de verticalité : l'"oeuf puzzle" peut être abordé au degré primaire déjà, la construction à la règle et au compas ou à l'aide de Cabri de l'"oeuf 3 points" dès le début du secondaire I, le calcul de son aire et de son périmètre vers la fin de ce cycle. L'"oeuf d'or", quant à lui, s'adressera à des élèves du secondaire II. D'autre part, chaque activité prise indépendamment l'une de l'autre, peut être envisagée sur le principe de la différenciation : si la construction de l'"oeuf 3 points" est accessible au plus grand nombre d'élèves, il n'en va pas de même du calcul de son aire ou de son périmètre [1], encore moins du calcul du volume du solide de révolution engendré par l'oeuf lorsqu'il tourne autour de son axe de symétrie vertical.

[1] Voir à ce sujet l'article "Mathématiques pascales", MATH-ECOLE, n° 176

Dresser la liste des notions touchées au travers de ces activités s'avère bien révélateur de leur richesse.

En voici quelques-unes :

- observation fine d'une construction géométrique;
- construction à la règle et au compas;
- description d'objets géométriques;
- initiation à la découverte de la palette d'outils et à l'utilisation de Cabri;
- aire du triangle, du disque, du secteur circulaire;
- longueur du cercle, de l'arc de cercle;
- initiation à la démonstration en géométrie;
- théorème de Pythagore;
- cercle de Thalès;
- trigonométrie dans le triangle rectangle;
- calcul littéral;
- résolutions d'équations;
- nombre d'or

...

Les oeufs proposés figurent par ordre de difficulté croissante. Pour chacun d'entre eux, une liste non exhaustive d'activités est proposée. Libre à chacun d'opérer un choix ou d'en proposer d'autres.

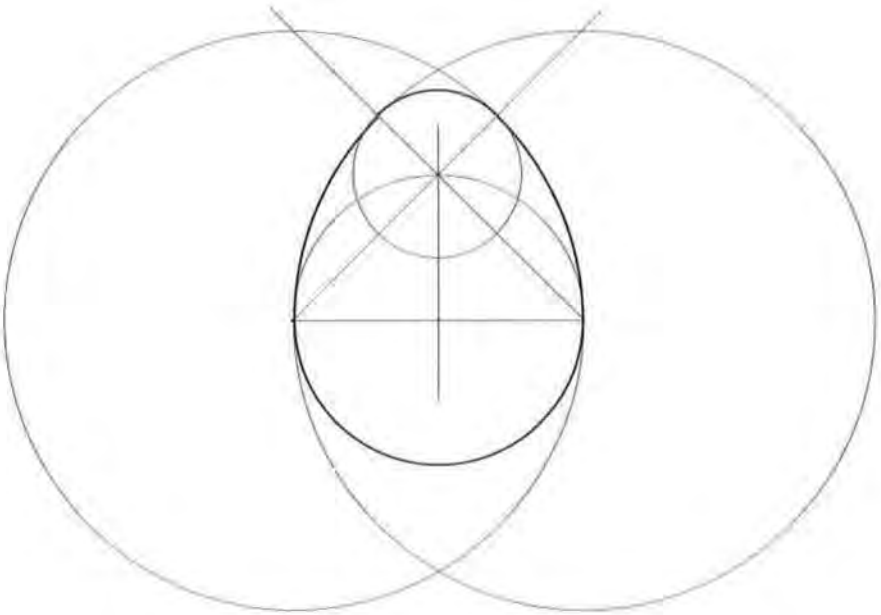
Bien du plaisir.

L'oeuf 3 points

a/ Construire un oeuf semblable dont la mesure de la largeur est égale à 10 cm.

b/ Calculer sa hauteur, son périmètre et son aire.

c/ Même travail, mais la mesure de largeur est égale à x.

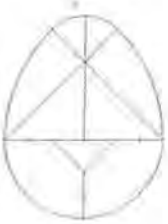


Oeuf 3 points et tangrams

tangram original

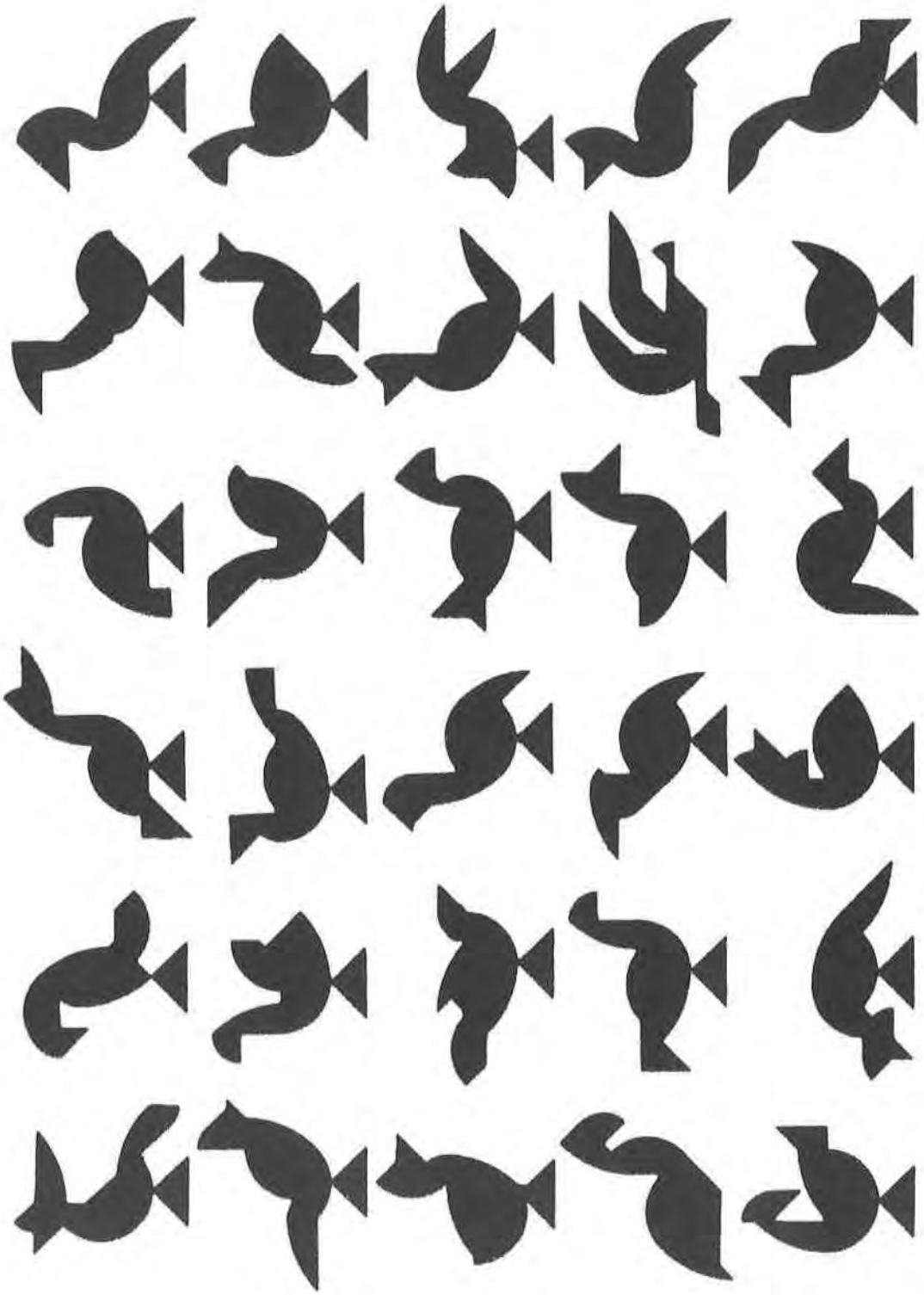
tangram circulaire

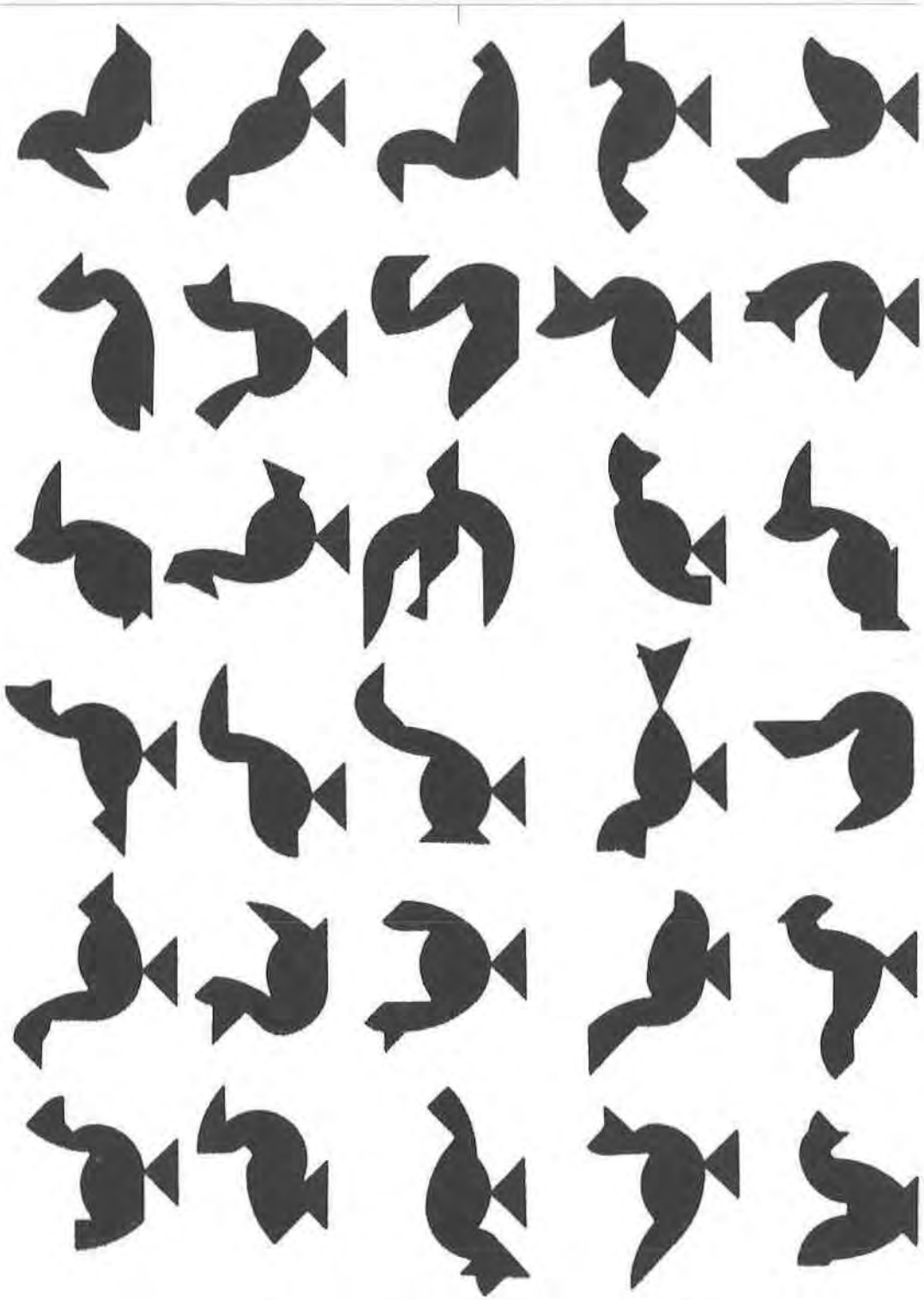
tangram ovale



tangram coeur

L'oeuf trois points sert de base à la construction du tangram ovale qui permet de reconstituer, notamment, les oiseaux suivant :



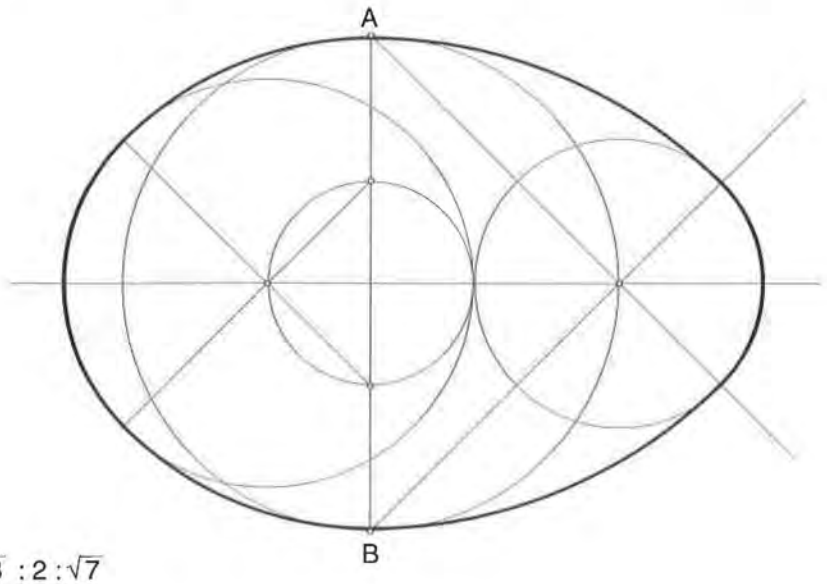


Les solutions paraîtrons dans le prochain numéro

L'oeuf 4 points

a/ Construire un oeuf semblable avec mes[AB]= 10 cm;

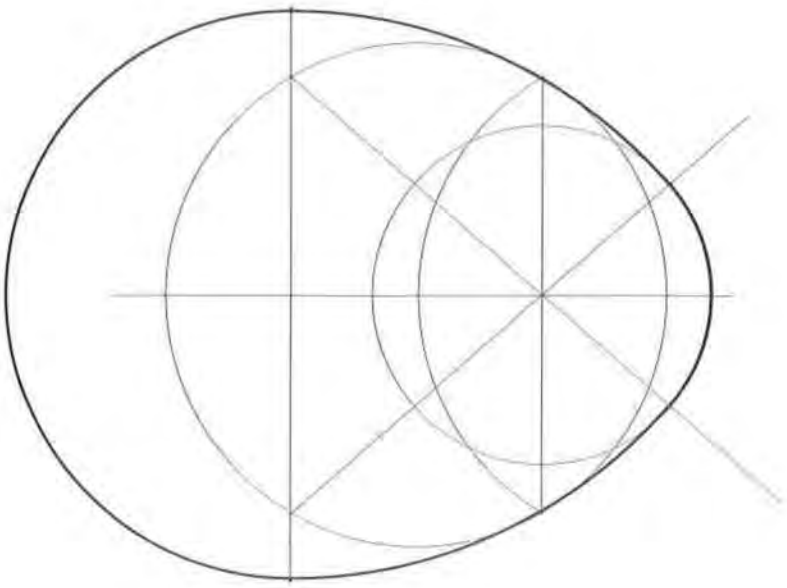
b/ Calculer son aire et son périmètre.



L'oeuf $\sqrt{3} : 2 : \sqrt{7}$

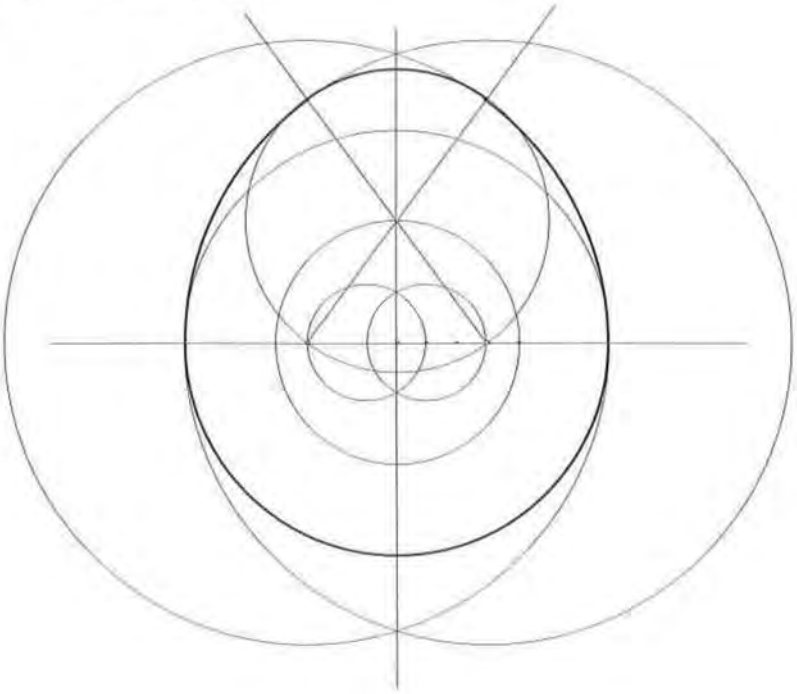
a/ Construis un tel oeuf;

b/ Pourquoi s'appelle-t-il ainsi ?



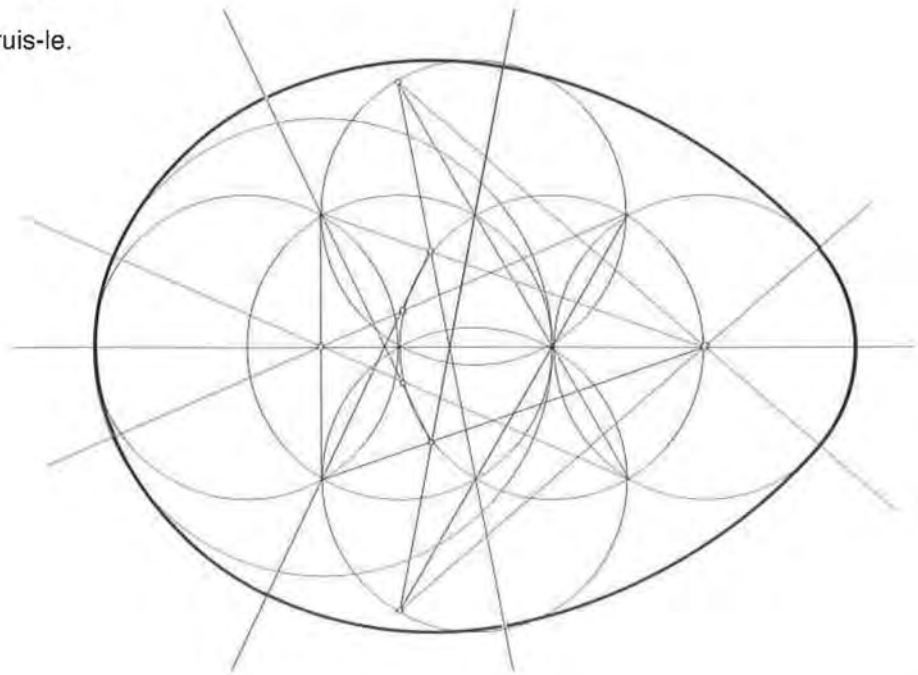
L'oeuf 3 points bis

Construis-le et calcule son périmètre.



L'oeuf 5 points

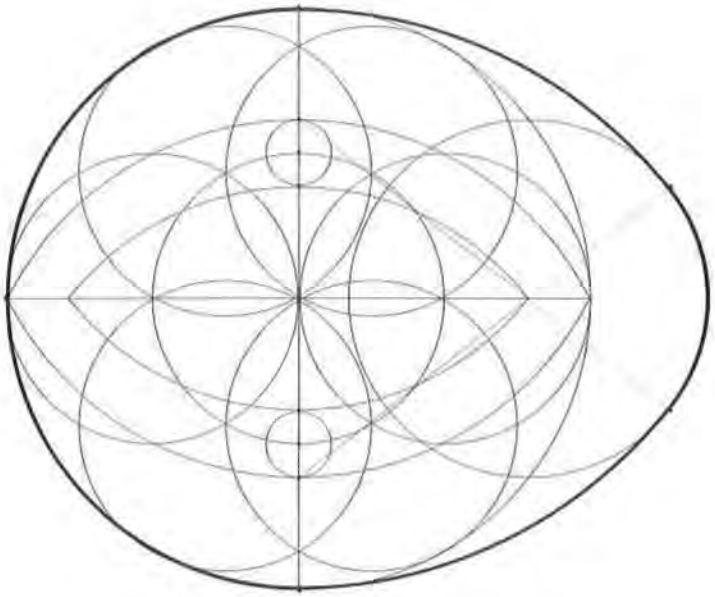
Construis-le.



L'oeuf d'or

a/ Construis un oeuf d'or;

b/ Pourquoi l'appelle-t-on ainsi ?



UN CHIFFRE, UNE LETTRE, ET RÉCIPROQUEMENT

Les équations et leurs inconnues présentent parfois un aspect bien rébarbatif. Ainsi.

$$\begin{cases} e+e=m+10 \\ 1+v+v=a+10 \\ 1+e+e=d+10 \\ a=1 \end{cases}$$

est un système de quatre équations à cinq inconnues plutôt désespérant. N'est ce pas plus rigolo de proposer l'addition :

$$\begin{array}{r} \text{E V E} \\ +\ \text{E V E} \\ \hline \text{A D A M} \end{array}$$

Extrait de "La magie du calcul", p.14, présenté dans les notes de lecture en page 40

Voyage au centre de la géométrie

Le puzzle, un outil didactique au service des maths

G. Sarcone, M. J. Waeber

Un carré dessiné sur une feuille de papier... Certains y voient une lucarne imaginaire pratiquée dans la page blanche (un carré vide dans une feuille pleine); d'autres, un radeau perdu en plein océan (un carré plein sur une feuille vide); d'autres encore, un cadre (les limites séparant le carré vide de la feuille vide). L'importance que l'on accorde au vide et au plein, c'est cela la pluralité du regard.

Nous allons poursuivre notre incursion dans le monde des puzzles mathématiques comportant des courbes. Différents exemples vous sont présentés dans la page qui suit. Comme nous vous l'avions annoncé dans *Math-Ecole* 189, nous nous intéresserons de plus en plus à la géométrie «intuitive» en laissant aux manuels scolaires les calculs et formules fastidieux. Nous accorderons ainsi plus de place au savoir-faire manuel et au plaisir visuel, ce qui n'exclut ni la réflexion, ni l'imagination, au contraire! L'imagination n'est que l'étape suivant l'imitation [1] (l'apprentissage); dans les arts, on copie toujours son maître avant de le dépasser... A bon entendeur!

[1] D'ailleurs, *imaginer* et *imiter* ont la même racine latine: im-, elle-même issue de l'indo-européen *yem-*, signifiant «fruit double» (l'*image* étant un double de la réalité).

Dans ce contexte, nous aborderons également la topologie (qui n'est pas l'étude des souris ou de Mickey, comme l'ont cru certains élèves italophones) et, plus particulièrement, l'étude des noeuds (ne riez pas!) qui est une nouvelle branche des mathématiques. Certes, le domaine de la topologie est assez complexe et vaste, mais nous ne nous occuperons que d'un aspect: la création de puzzles topologiques étonnants (*disentaglement puzzles*, en anglais) qui pourront servir de «start-up» pour des discussions plus avancées.

Passer des transformations rigides des puzzles géométriques (translations, rotations, réflexions) aux transformations plastiques des puzzles topologiques, n'est-ce pas un peu abrupt? Que nenni! Ces deux domaines ont en commun la "coupure". Dans le premier, c'est une nécessité pour pouvoir réaliser un puzzle; dans le second, c'est une interdiction. Et puis, les puzzles géométriques privilégient les pleins; tandis que les puzzles topologiques, les vides. Ah! Quand les contraires se rencontrent... Il n'en ressort que des choses intéressantes.

Enfin, ce que nous souhaiterions vraiment, c'est que cette rubrique devienne un laboratoire d'idées ou d'applications simples et efficaces pour l'enseignement des mathématiques. C'est pourquoi, nous vous invitons à nous communiquer les vôtres pour qu'un échange d'expériences et un réseau du savoir pratique dans le domaine des mathé-

matiques instrumentales puisse voir le jour. Qu'importe si vous n'êtes pas professeur de maths, toutes les idées et les horizons sont bienvenus, pourvu qu'ils soient orientés vers l'éducation mathématique et scientifique par la pratique ou le jeu. Il faut savoir que les mathématiques instrumentales sont un des enjeux du savoir actuel.

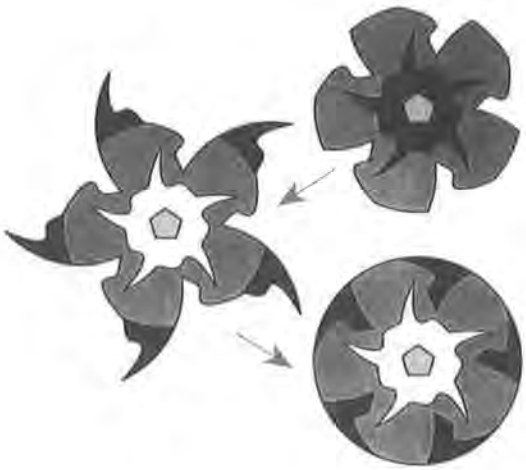
Contactez-nous: Le Laboratoire d'Archimède, CP 2148, 1002 Lausanne; archimedes_lab@hotmail.com; www.archimedes-lab.org

Des courbes, toujours des courbes...

(quelques puzzles géométriques à réaliser en classe)

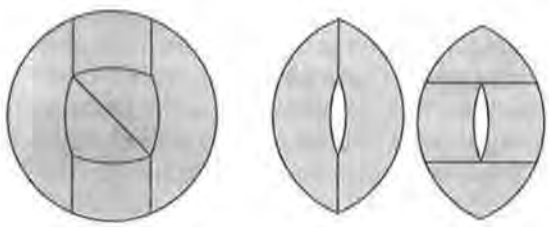
Dessine-moi une fleur

Des fleurs pour pas un rond, ou plutôt si, mais UN seul alors!



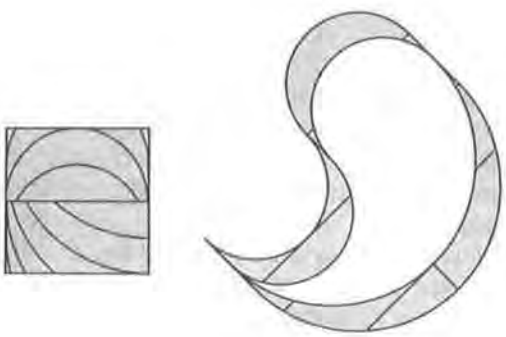
Football toujours

Tant pis pour les puristes, mais un ballon rond vaut bien deux ballons de rugby.



Un carré zen

Un carré en plein yang, ou l'inverse?



Topologie élémentaire, mon cher Watson...

L'évidence même

La topologie est l'étude des transformations qui conservent aux objets leur propriété fondamentale après déformation : par torsion, étirement, compression ou inversion (en excluant brisures, éclatements et déchirures). Pensez un peu aux fameuses montres molles de Dali... En effet, il faut avoir parfois une vision basée sur la "méthode paranoïaque critique", si chère au peintre, pour interpréter certains changements ou états en topologie !

Cette discipline englobe trois théories ou domaines: la théorie des variétés, la théorie des noeuds et, enfin, la théorie des catastrophes. Selon la théorie des variétés, les objets ont un genre basé sommairement sur leur nombre de "trous" (les emmenthals ne sont donc pas tous égaux !). Une balle, tout comme un cube, est de genre 0 et une tasse, tout comme un anneau, est du genre 1, puisque l'anse est une ouverture dans la masse de la tasse. Encore selon cette théorie, les solides ont en général deux faces : une face intérieure et une face extérieure, sauf pour les objets remarquables appelés surfaces inorientables, dérivés du ruban de Möbius : la surface de Boy, la sphère à bonnet croisé ("cross-cap") et la surface romaine de Steiner. Comme nous n'allons expérimenter qu'une mince partie de la topologie, ce qui nous intéresse ici c'est l'étude des noeuds et, plus spécifiquement, des boucles.

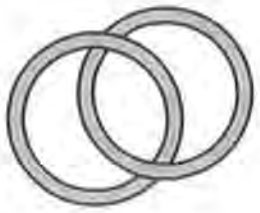
Voici ce qu'il faut en retenir : une boucle fermée, appartenant au genre 1, n'est pas la même chose qu'une boucle ouverte (que l'on appelle "open loop", en anglais) qui, elle, appartient au genre 0 (je vois d'ici certains opiner de la tête avec gravité). En bref, si vous coupez une boucle, elle n'a plus les mêmes propriétés (aha?). Pour ajouter du piment à l'affaire, il existe de pseudo boucles fermées... (voir fig. 1.a et 1.c aux pages suivantes)

Tous les casse-tête topologiques sont basés, à peu de chose près, sur le principe de la pseudo boucle fermée. Le but de ces jeux de patience consistant en général à séparer des anneaux apparemment solidaires ou à libérer un rond de ficelle, il faut pour cela transformer le casse-tête en défi stimulant en mêlant judicieusement une boucle fermée avec une pseudo boucle fermée (il va de soi que si l'on entrelace deux "vraies" boucles fermées, il est impossible de les séparer par manipulation, l'intérêt du jeu en serait dès lors limité...). Une boucle fermée peut être représentée par un anneau rigide ou tout autre courbe fermée (avec ou sans renfoncement interne) ou, même, par un rond de ficelle (avec ou sans boule appondue).

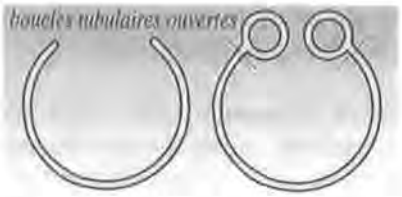
boucle fermée
(genre 1)

boucle ouverte
(genre 0)

boucles fermées entrelacées
("simple link")

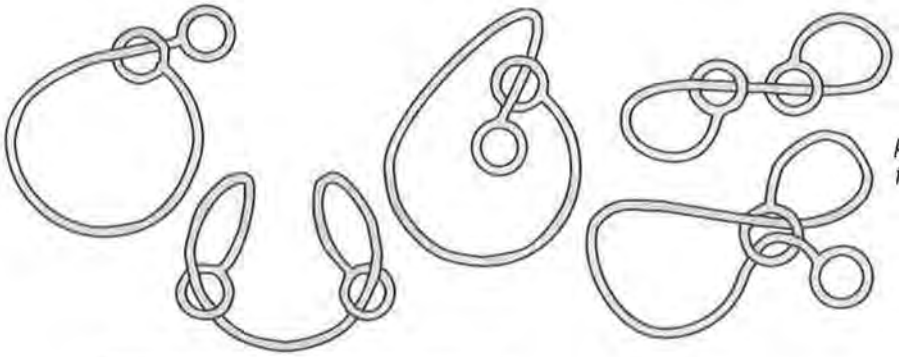


En rajoutant deux anneaux aux extrémités d'une boucle ouverte, rien ne change en réalité. Cette boucle reste ouverte.

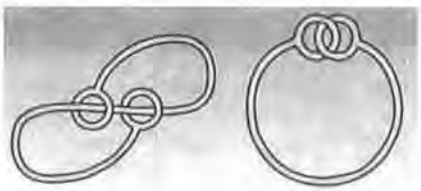


boucles tubulaires ouvertes

Malgré leur apparence distordue, les structures tubulaires ci-dessous sont équivalentes aux boucles ouvertes illustrées plus haut. Les pseudo boucles fermées sont la structure de base autour de laquelle se monte et se démonte tout casse-tête topologique.

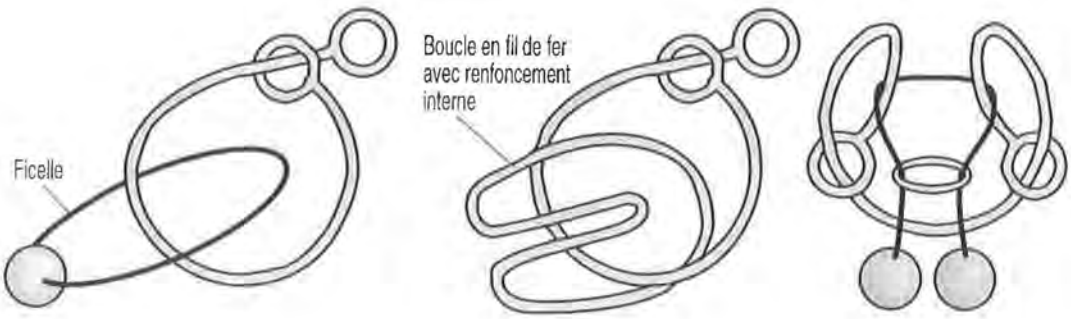


pseudo boucles fermées



"Vraies" boucles fermées. Il n'est pas aussi évident de déterminer en un coup d'oeil les vraies boucles fermées des pseudo boucles fermées.

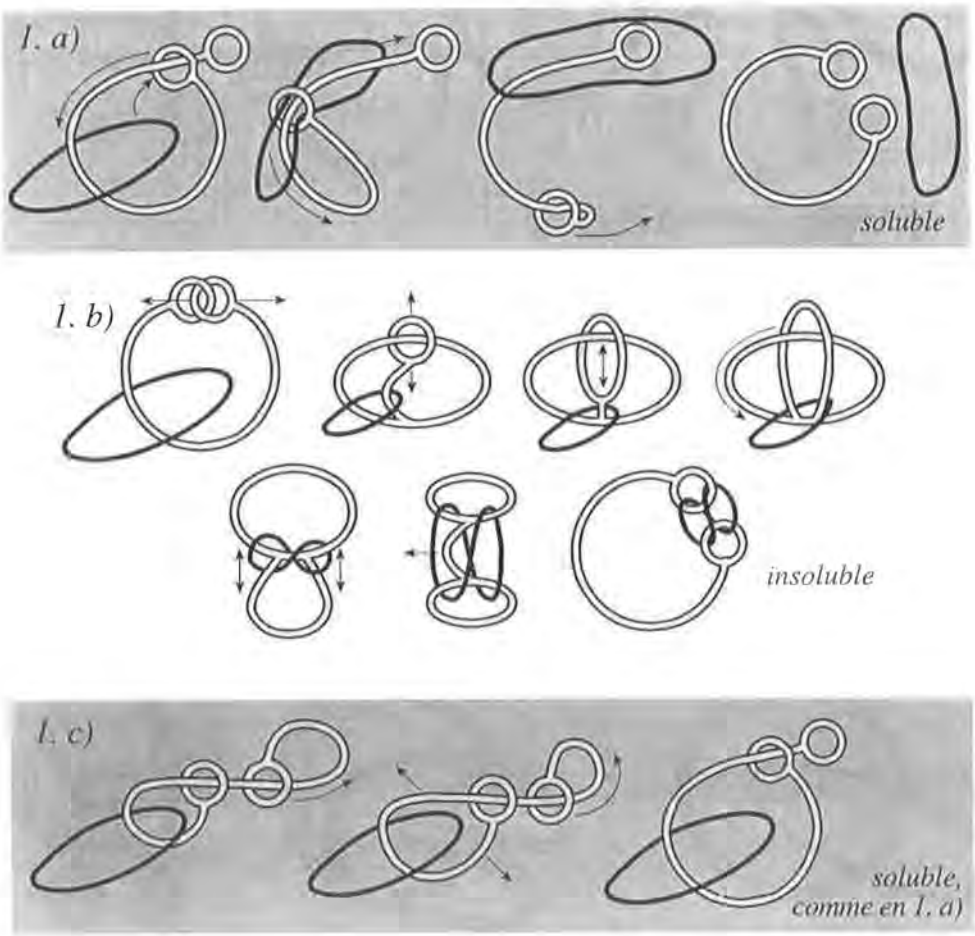
Du fil de fer, un peu de ficelle, un anneau et des boules à collier suffisent pour réaliser ces trois casse-tête simples, composés d'au moins une pseudo boucle fermée.

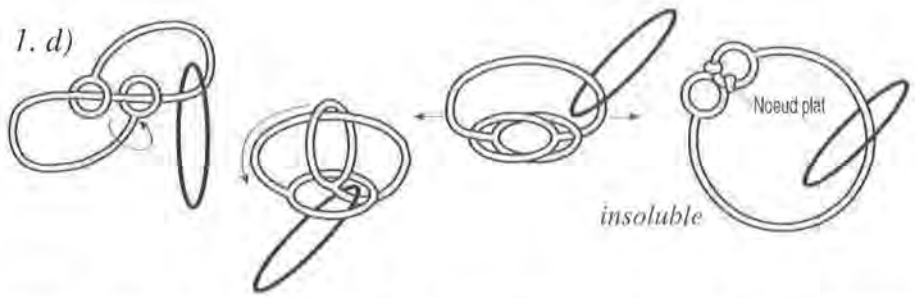


Drôles de métamorphoses molles
ou le labyrinthe de la logique

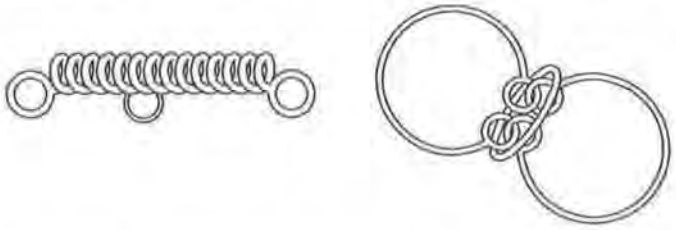
Comment déterminer une boucle fermée d'une "pseudo" boucle fermée? Grâce à un procédé topologique appelé "transformation continue ou élastique" qui consiste à imaginer que l'objet, ici un casse-tête en fil de fer, est en réalité une structure tubulaire, une sorte de spaghetti en pâte à modeler. Puis, il faut le transformer mentalement par étirement, compression ou torsion, en un autre objet équivalent (ou homéomorphe - ce n'est pas une injure! -). Un petit rappel, l'opération couper-coller ("cut and paste", en anglais) est à proscrire. Durant ce processus "imaginaire", la structure tubulaire du casse-tête peut donc être déformée à merci pour obtenir une autre structure tubulaire, sans déchirer ni traverser la structure initiale du casse-tête.

Si avec cette méthode nous arrivons à séparer un rond de ficelle du casse-tête, cela signifie que nous avons affaire à une "pseudo" boucle fermée et nous tenons, en même temps, une voie qui mène à la résolution du problème. Dans le cas contraire, c'est une boucle fermée et donc le problème n'a pas de solution. On voit bien que la transformation continue est un peu comme si l'on faisait le chemin inverse d'un labyrinthe. Cet exercice de visualisation logico-spatiale constitue une excellente introduction pour cette discipline mathématique particulière qu'est la topologie.





Problème ouvert : les boucles des casse-tête ci-dessous sont-elles fermées? Est-il possible de libérer un des anneaux entrelacés? Faites-nous parvenir vos réponses ...



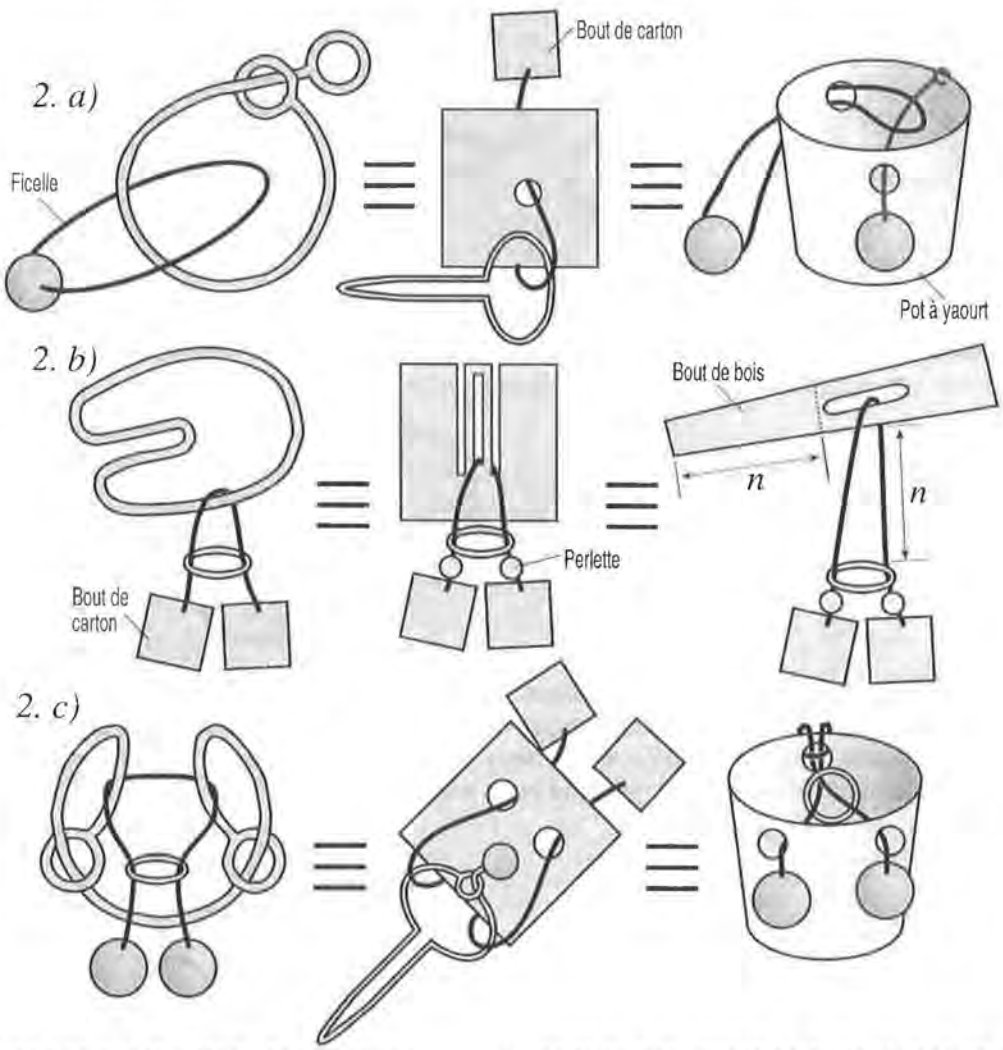
Nous aurons par la suite d'autres occasions de parler des noeuds... Pour clore ce chapitre, voici un petit exercice de visualisation logico-spatiale amusant : est-il possible d'accrocher un anneau à une ficelle sans en nouer les deux bouts ? Nous vous donnons une solution, il en existe une multitude d'autres, merci de nous les communiquer (hem...).

A vos trous... prêts, bricolez!

La topologie permet d'imaginer une multitude de variantes à un objet, sans que ce dernier ne perde ses propriétés de base. On dit alors de ses variantes qu'elles sont équivalentes. Ce qu'il faut retenir, nous le répétons, c'est qu'une transformation topologique interdit toute coupure, on peut tirer, pousser, tordre, mais pas couper ni déchirer. Un objet doit nécessairement conserver le même nombre de trous durant tout le processus de transformation. Voilà... Passons à la pratique, il n'est pas besoin de formules compliquées pour l'instant, laissez votre intuition vous guider. Avec des outils et du matériel ordinaire, réalisez les casse-tête ci-dessous. Puis, essayez de les résoudre et de comprendre ce qui réunit un groupe d'objets équivalents.

But du puzzle : libérer l'anneau ou le rond de ficelle.

Matériel : bouts de carton fort, bout de bois, fil de fer, ficelle, pots à yaourt, perlettes, boules à collier (avec trou), "huile de coude" et une pincée de son grain de sel.



La cerise sur le gâteau (pologique)

Voici un atelier que nous avons préparé pour animer un programme du Festival des Sciences à Chamonix (fin mai 2000), il s'agit de réaliser avec une simple feuille de papier A4 et de la ficelle un casse-tête original qui tiendra en haleine plus d'un. Vous pouvez le réaliser en classe lors d'une leçon de mathématiques, il ne prendra pas plus de 20 minutes.

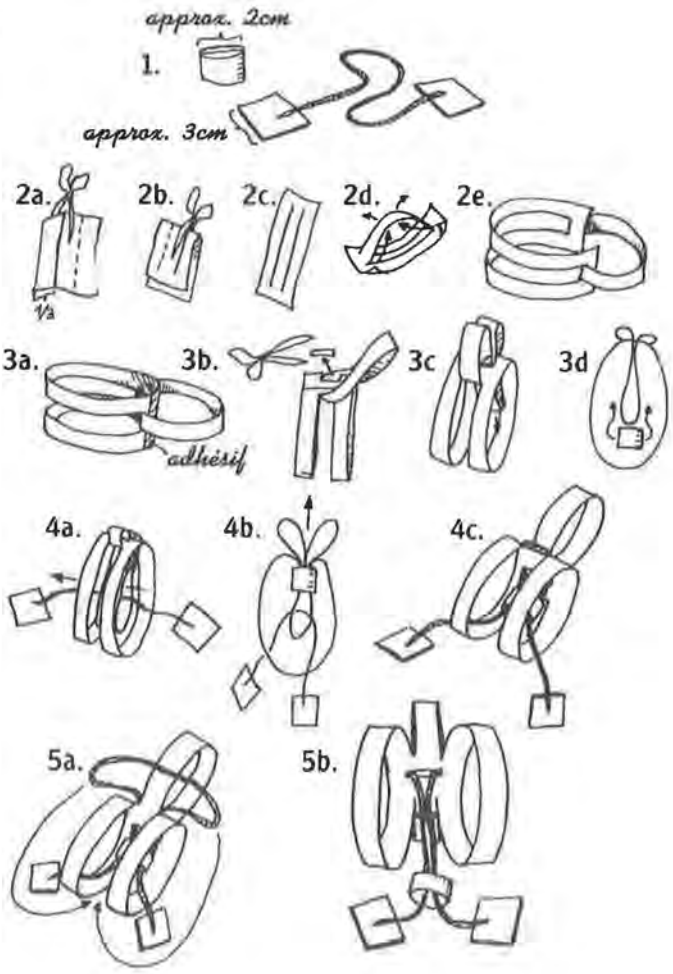
Les images du déroulement de l'exercice figurent sur la page suivante. Munissez-vous d'une feuille de papier A4 que vous plierez en 3 parties, avant de la découper en suivant le premier pliage (fig. 2a). Une fois la bande de papier découpée, vous effectuerez encore deux coupes dans le papier, selon la fig. 2b et 2c), vous aurez ainsi une bande de papier avec deux coupes longitudinales. Parallèlement, avec le papier restant, faites un anneau avec un diamètre d'à peu près 2 cm et collez également deux pièces de cartons carrés aux extrémités d'une ficelle longue de 20 à 30 centimètres (fig. 1).

Ceci fait, reprenez la bande de papier et tirez-en légèrement la bandelette centrale

pour y faire passer, avec précaution, les deux coins droits de la bande de papier, comme illustré à la fig. 2d). Vous devrez obtenir, à ce stade, la représentation de la fig. 2e). Joignez ensuite les deux extrémités avec de l'adhésif (fig. 3a) et découpez à cet endroit un petit bout de papier, une sorte de "boutonnière", comme illustré à la fig.3b). Vous ferez passer alors une des boucles du casse-tête par cette "boutonnière" (fig. 3c), en l'inversant vous la glisserez dans l'anneau de papier (fig. 3d). Puis vous placerez, transversalement à la boucle, la ficelle avec les deux cartons appondus (fig. 4a). Cela fait, retirez la boucle de la boutonnière (fig. 4b); ainsi l'anneau de papier et la ficelle avec les pièces de cartons aux bouts seront prisonniers du casse-tête (fig. 4c). Pour rendre la casse-tête encore plus démoniaque, faites passer la ficelle entre les deux boucles de papier (fig. 5a). En suivant ces indications, vos devriez obtenir le casse-tête représenté à la fig. 5b).

Voilà, demandez maintenant à une victime consentante de libérer l'anneau de papier. Pas évident... Nous avons appelé ce jeu de notre invention "Gambsodule" (pour ceux qui connaissent le grec ancien...).

Le Gambsodule



Chiffres inversés

François Jaquet, IRDP, Neuchâtel

[ndlr] Ce petit article est une réponse à la lettre de S. Roller, (*Math-Ecole* 191, p. 43) qui interpelle le rédacteur de *Math-Ecole* en lui demandant de proposer des activités élémentaires de réflexion sur les nombres.

Un magicien, qui a les yeux bandés, dit à ses auditeurs :

- Écrivez un nombre de deux chiffres, dont le chiffre des dizaines est supérieur ou égal à celui des unités[1].
- Écrivez un deuxième nombre, avec les mêmes chiffres que le premier, mais dans l'ordre inverse.
- Calculez la différence entre le premier nombre et le second.
- Ajoutez à cette différence le chiffre des unités du premier nombre et indiquez-moi le résultat de cette addition.

Un auditeur lui donne son résultat : ....

Le magicien :

- Un instant s'il vous plaît ! ... Abracadabra ... Le premier nombre que vous avez écrit est ... .

Les ficelles de ce petit "tour de magie" sont bien visibles d'un point de vue mathématique, mais leur analyse va cependant conduire à une réflexion intéressante, proposée par S. Roller, sur l'interversion des chiffres d'un nombre dans notre système décimal de numération.

Pour voir de quoi il s'agit, commençons par examiner deux exemples :

1) 42 devient 24, conduit à la différence 18 (42 - 24) et à la somme 20 (18 + 2),

2) 83 devient 38, conduit à la différence 45 (83 - 39) et à la somme 48 (45 + 3).

Comment le magicien fait-il pour retrouver 42 à partir de 20 et 83 à partir de 48 ?

Pour ceux qui ont encore quelques connaissances d'algèbre mobilisables, la piste est claire :

Par l'algèbre

On s'aperçoit vite que le langage algébrique requiert aussi une bonne compréhension de notre système de numération :

[1] Nous suivons ici, volontairement, l'usage courant de la langue qui autorise des expressions comme "la somme des chiffres d'un nombre" où le mot "chiffre" désigne également un "nombre naturel d'un seul chiffre". Cette extension du signifiant "chiffre" à un deuxième signifié paraît abusive d'un point de vue puriste, selon lequel il est exclu d'additionner autre chose que des nombres. Mais elle peut être défendue lorsqu'on considère que chacun des dix chiffres de notre numération est aussi un des dix premiers nombres naturels. Et, si l'on voulait être puriste, le critère de divisibilité par 3 : "un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3" deviendrait "un nombre est divisible par 3 si la somme des nombres correspondant aux chiffres qui le composent est elle-même divisible par 3". On aurait alors sensiblement rallongé la phrase, sans forcément être plus précis!!

Le nombre choisi (N) a deux chiffres : appelons d celui des dizaines et u celui des unités. Comme le précise le magicien, on sait que $d > u$. (Comme nous le verrons plus tard, cette restriction n'est pas nécessaire pour ceux qui savent opérer avec des nombres négatifs). A l'aide de ces deux chiffres, le nombre choisi s'exprime :

$$N = 10d + u$$

Le nombre obtenu en inversant les chiffres du précédent est :

$$I = 10u + d$$

La différence entre ces deux nombres est :

$$\begin{aligned} N - I &= (10d + u) - (10u + d) = \\ &= 10d + u - 10u - d = \\ &= 9d - 9u = \\ &= 9(d - u) \end{aligned}$$

C'est le produit de 9 par la différence $(d - u)$ des chiffres des dizaines et des unités du nombre choisi.

Le magicien fait encore ajouter le chiffre des unités u, ce qui donne la somme communiquée :

$$S = 9(d - u) + u$$

Cette écriture de S n'est rien d'autre que celle de la relation entre le dividende, le diviseur, le quotient entier et le reste d'une division euclidienne :

dividende = diviseur x quotient entier + reste

La somme S transmise au magicien est le dividende, le diviseur est 9, le reste est le chiffre des unités (u), le quotient est la différence des deux chiffres$(d - u)$.

Si, par exemple la somme transmise est 41, le magicien calcule le reste, 5, et le quotient entier, 4, de la division de 41 par 9. Le chiffre des unités du nombre cherché est 5, le chiffre des dizaines vaut 4 de plus, c'est-à-dire 9 et le nombre cherché est 95.

Remarque : Si les auditeurs connaissent l'algèbre, ils connaissent aussi les nombres négatifs et le tour de magie peut se passer de l'obligation de choisir un nombre dont le chiffre des dizaines est plus grand que celui des unités. Par exemple, en choisissant le nombre 28, le nombre "inversé" est 82, la différence obtenue est - 54, qui devient - 46 après lui avoir ajouté le chiffre des unités (8). La "division euclidienne par 9 étendue à l'ensemble des entiers" donne un quotient de - 6 et un reste de 8 car - 46 = (-6) x 9 + 8.

Sans algèbre

Les mathématiques n'étant pas réservées à ceux qui connaissent l'algèbre, voyons comment on pourrait découvrir le secret du magicien.

Une piste, assez naturelle, consiste à faire quelques essais et à noter leurs traces, pour voir comment ça marche. Et pour organiser ces essais et en suivre l'évolution, rien de mieux qu'un tableau de quatre colonnes :

- le premier nombre (colonne N),
- le nombre "inversé" (colonne I),
- la différence entre les deux nombres (colonne N - I),
- la somme de cette différence et du chiffre des unités (colonne S), communiquée au magicien.

Tableau 1

N	I	N - I	S
42	24	18	20
83	38	45	48
90	09	81	81
91	19	72	73
55	55	0	5
70	07	63	63

A première vue, le tableau 1 ne donne pas d'information sur la manière de "revenir" de 20 à 42, de 48 à 83, de 81 à 90, ... mais en l'observant plus attentivement, on constate que la troisième colonne (N - I) ne contient que des multiples de 9, et que ces multiples ont quelque chose à voir avec la différence entre les deux chiffres du nombre choisi (ou du nombre "inversé"). Alors pourquoi ne pas ajouter quelques colonnes pour confirmer cette intuition :

- le chiffre des dizaines du nombre choisi (colonne *d*),
- le chiffre des unités du nombre choisi (colonne *u*),
- leur différence (colonne *d* - *u*),

Tableau 2

N	*d*	*u*	*d* - *u*	I	N - I	S	q x 9 + r
42	4	2	2	24	18	20	2 x 9 + 2
83	8	3	5	38	45	48	5 x 9 + 3
90	9	0	9	09	81	81	9x 9 + 0
91	9	1	8	19	72	73	8 x 9 + 1
55	5	5	0	55	0	5	0 x 9 + 5
70	7	0	7	07	63	63	7 x 9 + 0

Après avoir constaté que les nombres de la colonne N - I sont le produit du nombre correspondant de la colonne *d* - *u* par 9, quoi de plus naturel que d'expliciter la relation entre le nombre de départ (N) et le nombre (S) transmis au magicien par le détail (colonne q x 9 + r) !

Nous voici arrivés au même point que dans la démarche par l'algèbre : le reste de la division euclidienne par 9 du nombre transmis au magicien est le chiffre des unités du nombre de départ et le quotient est la différence entre les deux chiffres, ce qui permet de "remonter" au chiffre des dizaines.

Évidemment, le tableau ne répond pas à la question "est-ce que ça marche dans tous les cas ? "Alors, en cas de doute, on ajoute encore quelques lignes au tableau. On pourrait même faire l'inventaire de tous les nombres possibles de deux chiffres, dont celui des dizaines est plus grand ou égal à celui des unités, car il n'y en a qu'une cinquantaine. Et ici, à défaut de preuve, ligne après ligne, on acquiert l'intime conviction qu'il ne peut en être autrement. A force d'échanger une dizaine contre une unité, puis deux dizaines contre 2 unités, ... on se rend compte que la différence ne peut être qu'un multiple de 9.

Exploitation en classe ?

Ce petit tour de magie des nombres nous interpelle. Il est plaisant, pour les adultes comme pour les enfants. Alors, pourquoi ne pas le proposer en classe ?

A notre avis, l'attrait de ce petit jeu et la facilité de sa gestion ne sont pas suffisants pour répondre affirmativement. Il faut se poser d'autres questions, à propos des objectifs et des savoirs mis en jeu dans l'activité : quels profits peut-on tirer de ces "chiffres inversés" ? pour quel domaine des mathématiques ?

On peut y voir l'occasion de pratiquer le calcul mental, de consolider l'algorithme de di-

vision euclidienne, de découvrir la relation entre la différence de deux nombres "inversés" et la différence de leurs chiffres, de vérifier une observation, de réfléchir sur notre numération de base dix, d'en démontrer une de ses caractéristiques.

Les potentialités de l'activité sont donc riches, mais on comprend immédiatement qu'elles dépendent de l'âge et du développement des élèves. Nous arrivons alors à la question décisive : à quel degré de la scolarité et à quels élèves faut-il la proposer ? A notre avis, si ce n'est que pour la pratique du calcul et des algorithmes, il vaudrait mieux renoncer à présenter ce petit jeu sur les nombres. Ce serait dommage de déflorer un sujet qui, par la suite, pourra s'avérer très intéressant pour l'initiation à la démonstration. Car, dans l'enseignement des mathématiques, la magie n'a sa place que si l'on est capable de la maîtriser, comme le magicien qui sait pertinemment que son jeu n'a rien de magique.

PLUS FORT QU'UNE CALCULETTE, LES RACINES CINQUIÈMES !

Demandez à un ami ayant une calculette de choisir un nombre de deux chiffres, et de le multiplier quatre fois par lui-même pour obtenir sa puissance cinquième.
Par exemple s'il a choisi 23, il devra effectuer 23 × 23 × 23 × 23 × 23 et trouvera 6 436 343.
Dites lui alors de vous indiquer simplement le résultat (6 436 343) et annoncez lui que vous pouvez instantanément lui donner le nombre qu'il a multiplié, c'est-à-dire la RACINE CINQUIÈME de 6 436 343 !

Extrait de "La magie du calcul" p.43, présenté dans les notes de lecture de la page 40

8e Rallye mathématique transalpin

Les problèmes de la finale
solution en page 31 à 38

1. L'AQUARIUM (cat. 3, 4)

Paul a acheté des poissons rouges qu'il va mettre dans un aquarium de 36 litres. Pour remplir l'aquarium, il va chercher de l'eau. Il a deux pots à disposition, un pot de 3 litres et un pot de 5 litres.

A chaque voyage, il choisit un seul pot, le remplit jusqu'au bord, et le vide entièrement dans l'aquarium.

Combien de voyages, au minimum, devra-t-il faire pour remplir exactement son aquarium ?

Expliquez votre solution.

---

2. COLORIAGE (cat. 3, 4)

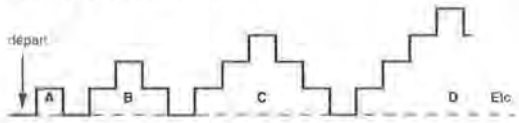
Coloriez les cinq parties de ce rectangle selon les indications suivantes :

- la partie rouge a 4 côtés,
- la partie jaune ne touche ni la partie bleue, ni la partie rouge,
- la partie verte a le même nombre de côtés que la partie bleue,
- une des parties est orange.

Expliquez votre raisonnement.

3. COURSE D'OBSTACLES (cat. 3, 4, 5)

Dans un parc de jeux, il y a un parcours formé d'escaliers.



Pierrot est au départ, il doit franchir, dans l'ordre, les obstacles **A, B, C, D, E, F, G, H...** Il avance marche par marche, sans en sauter une seule et sans faire plus d'un pas sur la même marche.

Il fait son premier pas sur **A**. Au 4ème pas il se trouve au sommet de **B**.

Indiquez avec précision la marche sur laquelle Pierrot se trouve au 50ème pas.

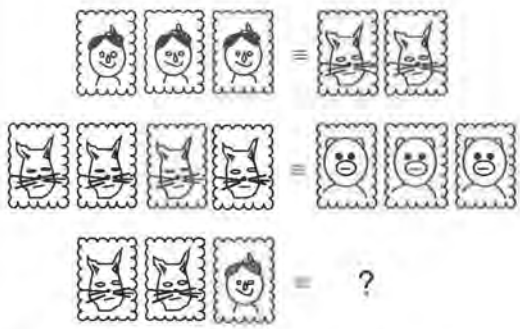
Expliquez comment vous avez trouvé.

---

4. LES TIMBRES (cat. 3, 4, 5)

En Transalpie, il n'y a que trois sortes de timbres représentant des poupées, des chats et des ours.

- 3 poupées valent 2 chats
- 4 chats valent 3 ours



Combien d'ours faut-il pour remplacer deux chats et une poupée ?

Expliquez votre raisonnement.

5. PLATE-BANDE (cat. 3, 4, 5)

Monsieur Glaïeul a séparé sa plate-bande par trois cordelettes tendues chacune entre deux piquets (notés A - A'; B - B' et C - C'). Il a ainsi obtenu cinq parties (notées 1, 2, 3, 4, 5 sur le dessin).

Madame Rose a quatre cordelettes. Elle désire séparer sa plate-bande en un grand nombre de parties car elle a beaucoup de fleurs différentes.

Plate-bande de M. Glaïeul

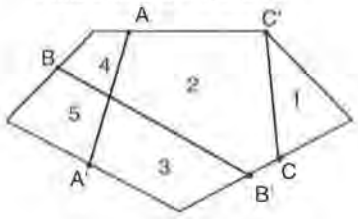
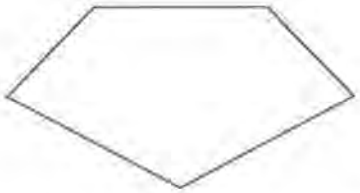


Plate-bande de Mme Rose



Combien de parties au maximum Madame Rose pourra-t-elle obtenir en tendant ses quatre cordelettes ?

Chaque cordelette doit être tendue entre deux piquets plantés n'importe où sur le bord de la plate-bande.

Dessinez votre meilleure solution.

6. PUZZLE DE RECTANGLES (cat. 3, 4, 5)

Louis dessine un rectangle sur une feuille quadrillée et le partage en trois rectangles plus petits :

- un rectangle qui contient exactement 5 carrés du quadrillage,
- un rectangle qui en contient 10,
- un rectangle qui en contient 15.

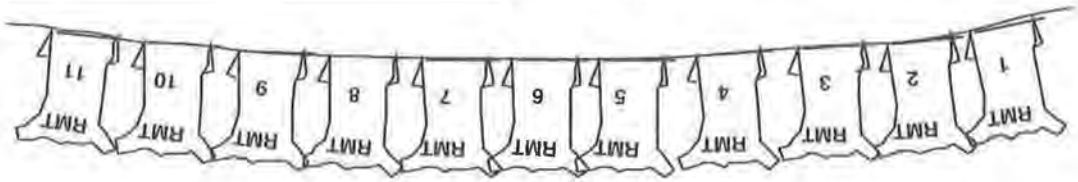
Giulia dessine un rectangle, différent de celui de Louis, mais elle arrive aussi à le partager en trois rectangles plus petits de 5 carrés, 10 carrés et 15 carrés.

Combien pouvez-vous dessiner de rectangles différents, qui se partagent en trois rectangles plus petits de 5, 10 et 15 carrés ?

Dessinez les rectangles que vous avez trouvés et indiquez comment on peut les partager en trois petits rectangles, comme l'ont fait Louis et Giulia.

7. LES MAILLOTS DU RMT (cat. 4, 5, 6)

Les maillots de l'équipe de football RMT viennent d'être lavés et sèchent, pendus les uns à côté des autres. Un fan de l'équipe, sans scrupules, vole quatre maillots au cours de la nuit. Les maillots qui restent n'ont pas été déplacés. Au matin, ils forment deux groupes séparés. Il y a de l'espace vide entre les deux groupes. L'entraîneur de l'équipe constate que, dans chaque groupe, la somme des numéros des maillots est la même.



Quels sont les maillots qui ont été volé ? Justifiez votre réponse.

8. DATE PAIRE (cat. 5, 6)

Tiens, constate Perrette, le 2 février de cette année, en recevant les épreuves de la première épreuve du 8e RMT :

" L'enveloppe est datée du 02.02.2000. Trois nombres pairs ! Formés à l'aide de chiffres pairs seulement. C'est vraiment une date paire ! Il me semble qu'il y a longtemps qu'il n'y a pas eu de date de ce genre. "

Et vous, que pensez-vous des affirmations de Perrette ?

Quelle est la dernière date, avant le 02.02.2000, composée de trois nombres pairs (jour, mois, année entière), formés eux-mêmes seulement de chiffres «pairs» ? Indiquez comment vous avez trouvé cette date.

---

9. LA CURE (cat. 5, 6, 7)

Anne ne se sent pas bien et son médecin lui prescrit une cure. Le pharmacien lit l'ordonnance du médecin et donne à Anne une boîte de 40 comprimés sur laquelle il imprime les prescriptions suivantes.

«A prendre avant les repas, avec un verre d'eau :

- les trois premiers jours : un demi comprimé le matin et un comprimé le soir;
- les trois jours suivants : un comprimé à midi et un quart de comprimé le soir;
- les trois jours suivants : un quart de comprimé le matin;
- les trois jours suivants : un demi comprimé le soir;

laisser passer deux jours sans prendre de comprimés et recommencer, comme précédemment.»

Combien de jours durera la cure avec la boîte de 40 comprimés ?

Justifiez votre réponse.

---

10. CHAMPIONNAT DE BASKET
(cat 6, 7, 8)

Les six écoles de la ville s'affrontent dans un championnat de basket-ball, tous les mercredis.

Chaque équipe joue deux matchs (match aller et match retour) contre toutes les autres équipes.

Un match gagné vaut 2 points, un match perdu vaut 0 point, il n'y a pas de matchs nuls.

En cas d'égalité de points, c'est la différence de buts qui détermine le rang des équipes. Voici le classement après 9 tours du championnat, avant la dernière journée :

Rang	Équipes	Points
1	École des Cerisiers	14
2	École du Château	
3	École du Parc	10
4	École des Buissons	
5	École du Couvent	
6	École du Lac	6

Dans le tableau ne figurent que quelques nombres de points. Mais on sait que l'équipe des Buissons a encore l'espoir d'arriver deuxième et que celle du Couvent risque d'être dernière.

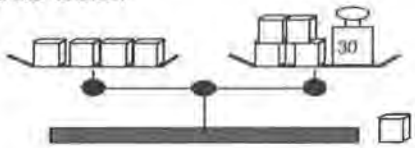
Complétez ce tableau.

Expliquez votre raisonnement.

11. LA BALANCE (cat 6, 7, 8)

Jacky a 9 cubes, de matières différentes, qui pèsent 1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13 et 15 grammes.

Il en place quatre sur le plateau de droite de sa balance et quatre autres sur le plateau de gauche. Pour équilibrer la balance, il doit placer une masse de 30 grammes sur le plateau de droite.



Quel peut être le cube qui n'est pas sur la balance ?

Expliquez votre raisonnement.

---

12. TOUJOURS LA MOITIÉ (cat. 6, 7, 8)

1024 , 512 , 256 , 128 , 64 , 32 , 16 , 8 , 4 ...

Dans cette suite bien régulière où, à partir du deuxième, chaque nombre vaut la moitié de celui qui le précède,

- le premier nombre, 1024 est formé de 4 chiffres,
- le deuxième, 512, est formé de 3 chiffres,
- le cinquième, 64, n'a plus que 2 chiffres.

De combien de chiffres sera formé le quinzième ? le deux centième ?

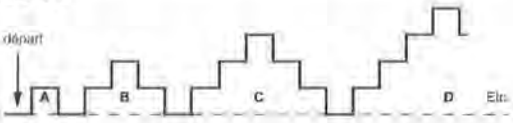
Écrivez les détails de votre recherche.

---

13. COURSE D'OBSTACLES (cat. 6, 7, 8)

Dans un parc de jeux, il y a un parcours formé d'escaliers. Jean est au départ, il doit franchir, dans l'ordre, les obstacles **A, B, C, D, E, F, G, H, ...**

Il avance marche par marche, sans en sauter une seule et sans faire plus d'un pas sur la même marche. Il fait son premier pas sur **A**. Au 4ème pas il se trouve au sommet de **B**.



Indiquez avec précision la marche sur laquelle Jean se trouvera au 259ème pas.

Expliquez votre démarche.

---

14. NOMBRE SECRET (cat. 7, 8)

Un nombre «secret»

- est inférieur à 1
- a une écriture décimale qui contient exactement deux «0», mais qui ne se termine pas par un «0»,
- la somme de ses chiffres est 4.

Combien y a-t-il de nombres «secrets» ?

Écrivez-les tous.

---

15. LA MARCHANDE DE FLEURS (cat. 7, 8)

Jeannine, la fleuriste, a encore 22 roses dans un seau : des roses rouges, des roses jaunes et des roses blanches. Une cliente demande à Jeannine de lui faire un bouquet de 17 roses, des trois couleurs.

Jeannine sait que, même les yeux fermés, elle peut prendre les roses de manière à satisfaire sa cliente.

Combien de roses de chaque couleur, Jeannine peut-elle avoir dans son seau ?

Écrivez toutes les solutions possibles.

16. LA FERRARI (Cat. 8)

Depuis longtemps, Cirillo et Antonio rêvent chacun de s'acheter une belle Ferrari rouge. Mais cette voiture coûte 100000 Euros et ils n'ont pas l'argent nécessaire.

Nous sommes en l'an 2000. Cirillo vient d'hériter 50000 Euros. Il décide de mettre cette somme de côté pour l'achat de la Ferrari, d'y ajouter 25000 Euros l'an prochain, 12500 en 2002 et, ainsi de suite. Il ajoutera ainsi chaque année la moitié de la somme économisée l'année précédente.

Antonio n'a pas fait d'héritage, mais il décide qu'en 2001, il épargnera 30000 Euros, qu'en 2002 il ajoutera la moitié de cette somme, en 2003 le tiers, en 2004 le quart, en 2005 le cinquième et ainsi de suite. Chaque année, il ajoutera donc une somme équivalente à 30000 divisé par le nombre formé des trois derniers chiffres de l'année.

Qui arrivera à acheter la Ferrari ? Et quand ?

Donnez les détails de vos calculs.

LES RÉSULTATS SURPRISES

Choisissez trois chiffres distincts
Calculez leur somme *s*

En permutant ces trois chiffres, formez les 6 nombres possibles inférieurs à 1000

Calculez la somme S de ces nombres
Quel est le quotient de S par *s* ?
Aviez-vous prévu ce résultat ?

OUI : justifiez votre réponse.
NON : choisissez 3 autres chiffres distincts.

1

Extrait de "La magie du calcul" p.10,
présenté dans les notes de lecture de la page 40

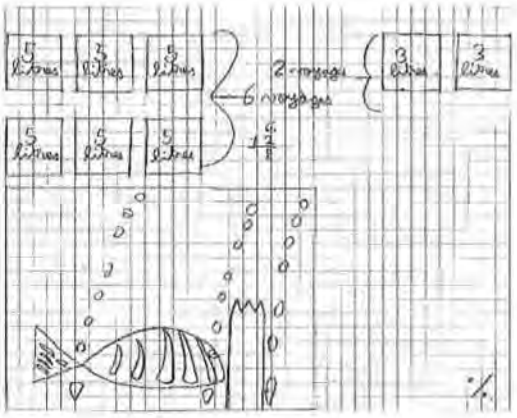
Réponses aux problèmes de la finale du 8e RMT

Réponses aux problèmes de la finale du 8e RMT, avec quelques explications données par des classes finalistes de Suisse romande

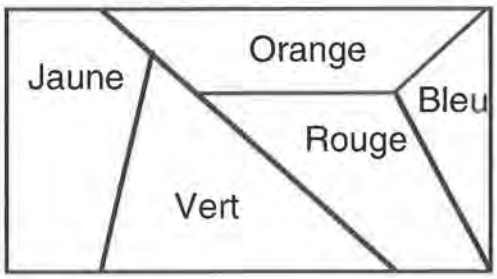
1. L'AQUARIUM

8 voyages au minimum, 6 de 5 litres et 2 de 3 litres.

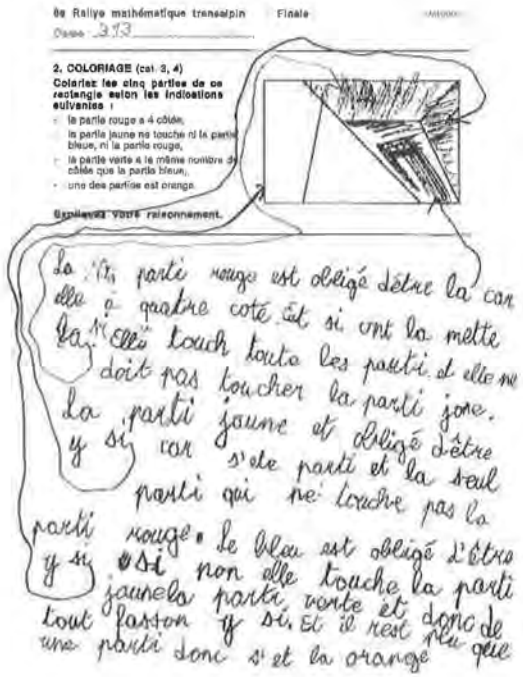
Réponse d'une classe de 4e :



2. COLORIAGE



Réponse d'une classe de 3e :



3. COURSE D'OBSTACLES

Il se trouvera sur la première marche en redescendant de l'escalier G

Réponse d'une classe de 3e à la page suivante

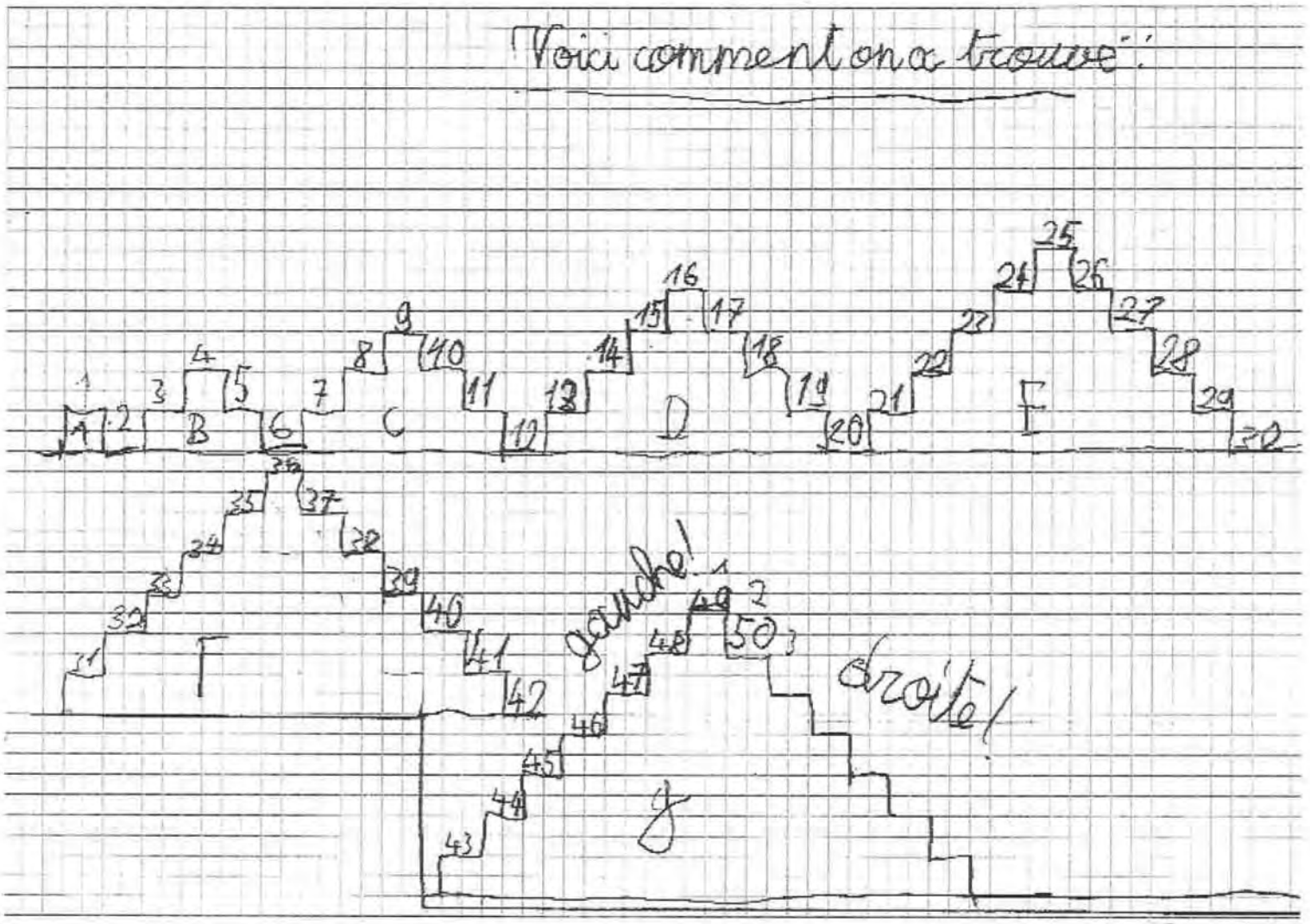
4. LES TIMBRES

2 chats et une poupée font 4 poupées (3 + 1) et 4 poupées correspondent à 2 ours.

Réponse d'une classe de 5e :

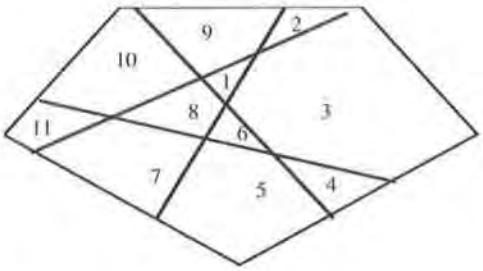
Comme 4 chats valent 3 ours donc 2 chat valent 1,5 de l'ours 1 poupées vaut 2 chats, 2 poupée vaut 0,5 d'un chat

le calcul: 1,5 + 0,5 = 2,0

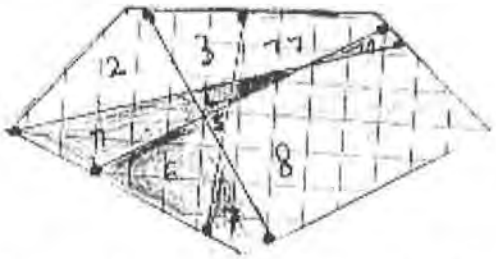

Voici comment on a trouvé :
A
B
C
D
E
F
F
gauche
droite
g

5. PLATE-BANDE

11 parties, par exemple :



Réponse d'une classe de 4e :

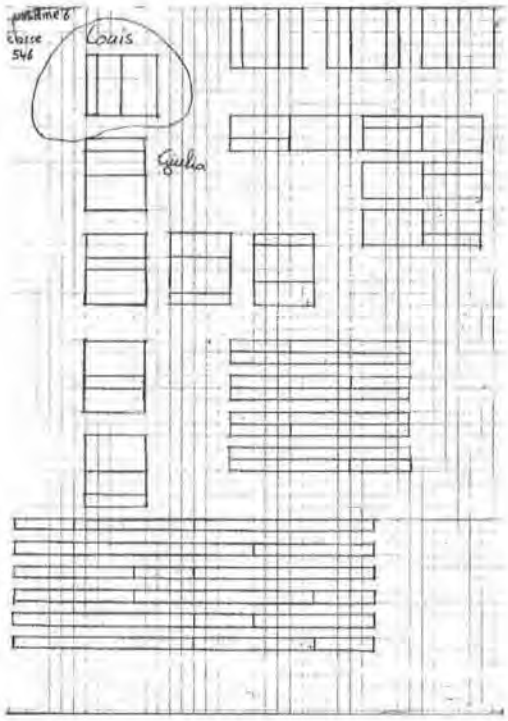


En tendant quatre cordelettes on peut obtenir onze parties.

6. PUZZLE DE RECTANGLES

Il y a quatre rectangles possibles : 1x30, 2x15, 3x10 et 5x6

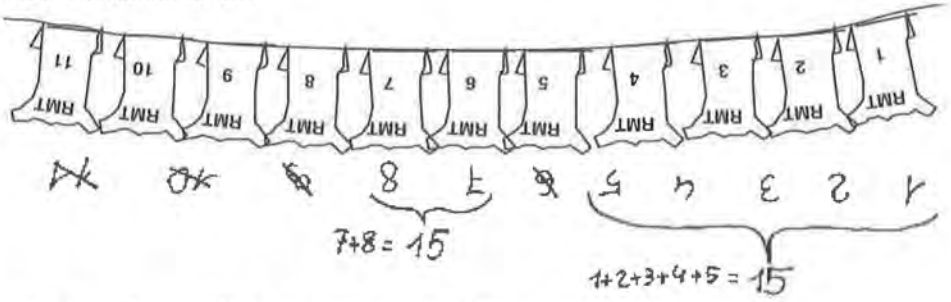
Réponse d'une classe de 5e :



7. LES MAILLOTS DU RMT

Les 4 maillots 6, 9, 10, 11 ont été volés, il reste les deux groupes : de 1 à 5 et de 7 à 8.

Réponse d'une classe de 5e :

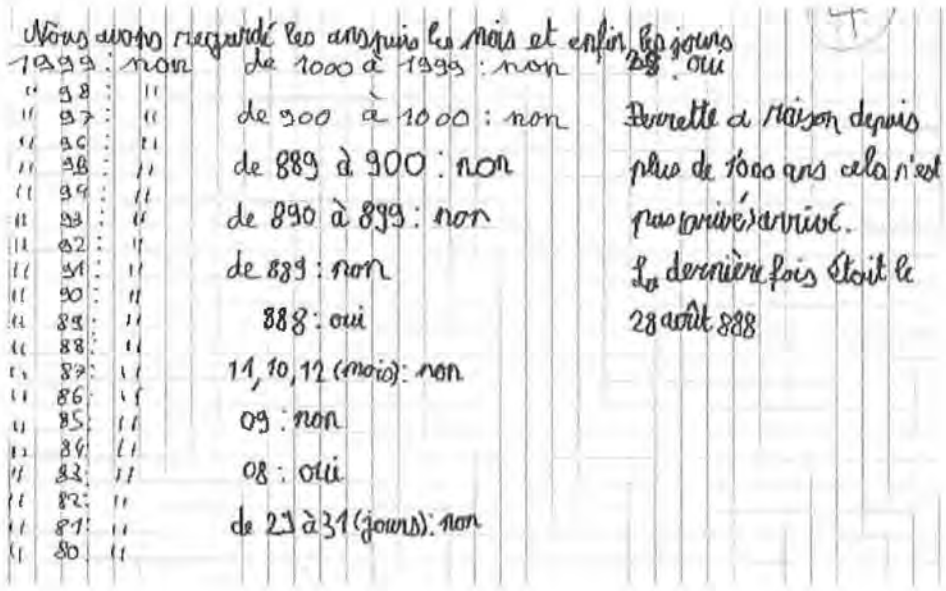


Explication : les maillots 6, 9, 10, 11 ont été volés car 1+2+3+4+5=15 et que 7+8=15. De plus il y a un espace entre ces deux groupes dans la consigne.

8. DATE PAIRE

C'était le 28.08.888 (en supposant qu'à cette époque on désignait les dates ainsi).

Réponse d'une classe de 5e :



9. LA CURE

La boîte sera vide après 49 jours.

Réponse d'une classe de 6e (il manque les détails et le problème n'a reçu que trois points sur quatre) :

réponse 49 jours

On a calculé pour les 16 premiers jours
Elle en avait mangé 10 et demi Ensuite on a fait x 3 à 16 et à 10,5 comme ça on a trouvé pour 31,5 comprimés* on a fait toujours plus 1 jour jusqu'à 40 comprimés et ça fait 49 jours.

* pour finir

10. CHAMPIONNAT DE BASKET

L'école du Château a 10 points, celle des Buissons 8 points et celle du Couvent 6 points. C'est la seule solution qui respecte le total de 24 points non attribués et les conditions de l'énoncé.

Réponse d'une classe de 8e

Réponse : L'école du Chateau a 10 points, l'école des Buissons 8 et celle du couvent 6.

Explication : Sur 10 tours il y'a 60 points distribués Puisque il reste encore une journée (se qui fait 3 matchs donc 6 points) on soustrait 60 par 6 se qui nous donne 54 points. Puis l'on fait 54 points − (14 + 10 + 6) = 24. L'école des Buissons Peut encore terminée 2ème, donc elle a soit 10 soit 8 points. L'école du Chateau en a soit 10 soit 12, si non elle ne pourrait pas être rejointe par l'équipe de l'école du Château. L'école du Couvent en a soit 6 soit 8 si non elle ne pourrait pas être rattrapée par l'école du Lac.

En résumé : Ecole du Château 10, 12
Ecole des Buissons 10, 8
Ecole du Couvent 6, 8

La seul solution pour faire 24 points est

10 + 8 + 6

11. LA BALANCE

Il y a deux solutions : 11 (1+3+5+7+30 = 8+10+13+15) et 5 (1+3+7+8+30 = 10+11+13+15).

Réponse d'une classe de 7e :

Nous avons additioné toutes les masses et nous sommes arrivé à 73 grammes et nous avons rajouté les 30 grammes qui font en tout 103 grammes. Nous avons enlevé le cube de 1 gramme pour arriver au poid total de la balance. Nous avons divisé le poid sur la balance (102) par 2 pour obtenir le poid qu'il y a sur chaque plateau ; ça nous donnait [51] et [51] et nous avons enlevé la masse de 30 grammes sur le plateau de droite ce qui nous donnait [51] et [21]. Nous devions arriver avec les cubes à 51, mais c'était impossible.
Nous avons essayer avec le même résonnement que le cube 1, de faire le cube 3 et c'était pas possible. Nous avons essayer avec tous les nombres et seuls le 5 et le 11 marchait ; ex de celui de 5 :

103 (poid total) − [5] = 98. 98 : 2 = [49]. 49 − 30 = [19],

49 = 15 + 13 + 11 + 10 | 49 − 30 = 19 = 1 + 3 + 7 + 8 |

12. TOUJOURS LA MOITIÉ

Le 200ème nombre sera composé de 190 chiffres.

Réponse d'une classe de 8e :

Pour le quinzième nombre nous avons toujours diviser par "2" jusqu'à trouver ce nombre. Nous avons trouvé 0,0625 donc 5 chiffres. Nous avons continuer pour voir si il y avait une suite logique. En effet à chaque fois que nous divisons par "2" (à partir du onzième) il y a un chiffre de plus. En sachant que le quinzième a 5 chiffres :

200 − 15 = 185

5 + 185 = 190

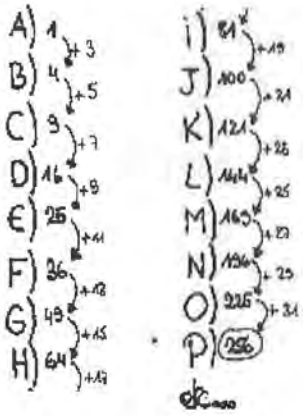
Il y a donc 190 chiffres formé de deux centième nombre.

13. COURSE D'OBSTACLES

Jean se trouvera sur la troisième marche en redescendant de l'escalier P (le seizième).

Réponse d'une classe de 7e :

Tout d'abord, nous avons remarqué que du sommet d'un obstacle à un autre, il fallait additionner par des nombres impairs, en commençant par 3, 5, 7, 9, 11, etc...
Nous avons additionné tout ceci jusqu'à l'obstacle "P" où on arrive au 128ème pas de Yann. Il nous reste plus que 3 pas.
Il sera donc au 253ème pas, 3 marches après le sommet de l'obstacle "P".



14. NOMBRE SECRET

Il y a 20 nombres «secrets», de 0,01111 à 0,04.

Réponse d'une classe de 7e :

réponse : 20 nombres "secrets"

explication : Puisque les nombres "secrets" se trouvent tous en dessous de 1, ils commenceront tous par "0,...".
Nous avons établi une liste de ces nombres, en dessous de 1, donne 4.
voici la liste : 0,01111 ; 0,10111 ; 0,11011 ; 0,11101 ; pour ces 4 premiers nombres, nous avons déplacer le 2e "0".
suite : 0,022 et 0,202 ; pour ces 2 nombres, nous avons, là-aussi, déplacer le 2e "0".
suite : 0,031 ; 0,301 ; 0,103 ; 0,013, pour ces 4 nombre, nous avons déplacer le 2e "0" et inverser les 2 nombres (3 et 1)
suite : 0,0112 ; 0,0121 ; 0,0211 ; 0,1012 ; 0,1021 ; 0,2011 ; 0,2101 ; 0,1102 et 0,1201, pour ces 9 nombres, nous avons déplacer le 2e "0" et inverser chaques fois les 3 nombres (2, 1 et 1)
et pour finir : 0,04, pour ce nombre, il y a une seule solution car 4 + ... ne fera jamais 4 ! mais toujours plus.

15. LA MARCHANDE DE FLEURS

Il y a 15 combinaisons possibles : les permutations de (6;6;10), (6;7;9), (6;8;8) et (7;7;8).

Réponse d'une classe de 8e (détails dans un tableau annexe non reproduit) :

Il doit au moins, avoir 6 fleurs de chaque couleur car 22-17=5. Alors s'il y a 5 fleurs moins dans chaque couleur Janine n'est pas sûr de tirer au moins une fleur de chaque couleur.
Avec les chiffres 6;7;9 (=22) ont peut intervertire les nombres de fleurs de chaque couleurs. Donc il y a 6 posibilité avec ces trois.
Avec (6;8;8), (6;6;10), (7;7;8) =(22) il y a trois posibilité en intervertissant le nombre de fleurs par couleurs.
Il y en 15 de posibilité

16. LA FERRARI

Cirillo ne pourra jamais atteindre 100000 car il lui manquera toujours la moitié du montant mis l'année précédente. Antonio y arrivera en 2016.

Réponse d'une classe de 8e (tableau avec le détail non reproduit) :

On arrivera jamais à 100'000, car chaque fois qu'on rajouté 1 somme, il nous reste cette même somme a ajouter pour que le compte soit bon, mais étant donné qu'on doit tjrs rajouter la moitié de la somme précédente, on arrivera jamais à 100'000. Donc Cirillo doit changer de méthode. (pour arriver à 100'000 il faudrait pouvoir rajouté à la somme d'avant 0, mais n'importe quel chiffre, à part 0, divisé par 2 ≠ 0 !)

VRAI? FAUX?... ON EN DEBAT!
De l'argumentation vers la preuve en cycle 3,

ERMEL Equipe de didactique des Mathématiques, INRP, 29, rue d'Ulm, 75005, Paris, 1999

Prouver une affirmation ? Cette question, au coeur des mathématiques, peut sembler loin des préoccupations de l'école, si on limite l'enseignement de celles-ci à l'accumulation de techniques autour des quatre opérations.

Mais heureusement les programmes de 1995 en ont décidé autrement :

" Le développement des capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver, se poursuit [au cycle 3], tandis que se consolident les compétences nécessaires à la poursuite de la scolarité au collège, avec lequel il est nécessaire d'assurer une bonne liaison. Pour cela il est nécessaire de conduire une initiation à la logique, à la rigueur et de porter une attention particulière aux procédures mises en oeuvre et aux méthodes de travail ". (Programmes de l'école primaire CNDP 1995, contenus cycle 3, page 62.)

L'ouvrage cité s'inscrit dans ce projet de développer des capacités de raisonnement pour mieux préparer les élèves aux démarches démonstratives du collège. Mais à l'école élémentaire, l'argumentation ne peut se traduire par un quelconque formalisme. Quelles situations **choisir et pourquoi, quels scenarii de classe mettre en oeuvre, pour générer chez les élèves du cycle 3 une argumentation de nature mathématique, mais en langue naturelle** ? Telles sont les questions auxquelles s'est attelée l'équipe ERMEL, dans, la continuité de ses travaux précédents, *Apprentissages Numériques et Résolution de Problèmes GS, CP, CEI, CE2, CM1, CM2* (éditions Hatier 1990 à 1999).

L'ouvrage se compose de trois parties réparties en huit chapitres.

La première partie présente des résultats récents de recherches psychologiques et didactiques sur le raisonnement. Elle étudie l'évolution des types de raisonnement et de la relation entre argumentation et démonstration dans l'histoire des mathématiques.

La seconde partie décrit et analyse plusieurs dispositifs d'apprentissage de l'argumentation dans des classes du cycle 3.

Ces dispositifs comportent deux phases : une première phase de résolution d'un problème (extrait des *Apprentissages Numériques* précités), dans la continuité des travaux d'ERMEL, et une seconde d'argumentation. Dans cette seconde phase les élèves formulent des conjectures dont ils testent la validité; ils construisent des preuves. Cette seconde phase est celle qui fait l'originalité et le corps de l'ouvrage.

Les situations proposées balaient des thèmes numériques du cycle 3 : propriétés multiplicatives (le plus grand produit, divisibilité), décimaux (rangement), proportionnalité et donnent du sens à la nécessité de prouver, par exemple la validité d'une méthode générale, la fausseté d'une proposition, l'absence effective de solution, l'exhaustivité des solutions trouvées. Le déroulement proposé vise d'abord cet objectif de développement du raisonnement :

des preuves d'élèves sont analysées, des choix de relances et de gestion de classe sont proposés en conséquence.

La troisième partie présente des points de vues spécialisés de l'équipe ERMEL : les maîtres ayant expérimenté recentrent l'étude sur le dispositif pratique à mettre en place pour recueillir les bénéfices de l'activité; les didacticiens résument les aspects essentiels de ce type de travail et l'impact à l'intérieur des classes; les psycholinguistes pointent les difficultés a priori de l'enseignement du discours argumentatif.

A notre connaissance, cet ouvrage est le premier qui développe ainsi une introduction raisonnée de l'argumentation à l'école. Sa lecture est indispensable à tout enseignant de mathématiques du cycle 3 au collège pour lui donner les clés d'une initiation au raisonnement préparant au collège. La richesse des propositions intégrées dans le programme usuel du cycle 3 devrait inciter tous les enseignants à mettre en place de tels débats dans leur classe.

Catherine Houdement

Destinataires: enseignants de mathématiques de l'école primaire, formateurs, chercheurs en didactique.

Mots-clés: enseignement et didactique des mathématiques, argumentation, preuve, école primaire

[ndlr] Nous remercions la revue ***Grand N*** de nous permettre de reprendre ces notes de lecture, publiées dans son numéro 65.

LA MAGIE DU CALCUL

A. Deledicq
ACL - Les éditions du Kangourou[1]

Depuis que l'homme est sur terre, il a inventé des techniques de calcul mentales, écrites et assistées aussi efficaces qu'extraordinaires : du boulier à l'ordinateur, des tables de multiplication aux techniques coptes ou italiennes, de l'introduction du calcul décimal aux calculateurs prodiges ... Qui n'a jamais été fasciné par la suite des nombres entiers et par les liens mystérieux que tissent entre eux les opérations de l'arithmétique ?

En 64 pages, cet ouvrage tente la transformation des lecteurs en vrais mathémaliciens et des lectrices en vraies mathémagiciennes.

Destinataires : toute personne curieuse et qui trouve du plaisir à réfléchir en mathématiques, en particulier maîtres et élèves de la fin de l'école primaire et des premiers degrés de l'école secondaire.

Mots-clés : mathématiques, plaisir, découverte

Voir bouchons en pages 13, 25 et 30.

[1] En vente par Math-Ecole (v. p. 3 de couverture)

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole*** **- CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	.....	(ens. à Fr. 30.-)
Encyclopédie kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)
Les annales du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 29.-)
Exos-malices, ACL	.....	(ex. à Fr. 29.-)
Histoire de Maths, ACL	.....	(ex. à Fr. 19.-)
La magie du calcul, ACL	.....	(ex. à Fr. 19.-)
Pythagore et Thalès, ACL	.....	(ex. à Fr. 19.-)
Le monde des pavages, ACL	.....	(ex. à Fr. 19.-)
Les maths & la plume, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux mathématiques pour tous, ACL	.....	(ex. à Fr. 16.-)
Pliages mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	.....	(ex. à Fr. 25.-)
Le système métrique, hier et aujourd'hui, ADCS	.....	(ex. à Fr. 38.-)
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS	.....	(ex. à Fr. 38.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	.....	(ex. à Fr. 26.-)
La CIEAEM au travers de ses 50 premières rencontres	.....	(ex. à Fr. 6.-)
Actes de la CIEAEM 50	.....	(ex. à Fr. 35.-)

PROBLEMES DE RALLYES ET CONCOURS :

Actes des rencontres internationales de Brigue sur le RMT	.....	(ex. à Fr. 18.-)
Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	.....	(ex. à Fr. 28.-)
Fichier Evariste APMEP	.....	(ex. à Fr. 25.-)
Panoramath 96, APMEP	.....	(ex. à Fr. 12.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP, ACL	.....	(ex. à Fr. 18.-)
Panoramath 96, Panoramath 2,	.....	(ens. à Fr. 25.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école	.....	(ex. à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles	.....	(ex. à Fr. 16.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles, *POLE*	.....	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous	.....	(ex. à Fr. 16.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous, *POLE*	.....	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens	.....	(ex. à Fr. 16.-)
Le Trésor du vieux Pirate (n°12)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Pin's Tourneur (n° 11)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

*En liquidation jusqu'à épuisement du stock.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M.....

Adresse (rue et numéro) : .....

Localité (avec code postal) : .....

Date : ..... Signature : .....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7

EDITORIAL :
François Jaquet 2

Deux puzzles logiques
François Boule 4

Géométrie Pascale
Denis Odiet 7

Voyage au centre de la géométrie
Le puzzle, un outil didactique
au service des maths
G. Sarcone, M. J. Waeber 14

Chiffres inversés
François Jaquet 22

8e Rallye Mathématique Transalpin
Finale 26

Réponses aux problèmes de
la finale du 8e RMT 31

Notes de lecture 39