

MATH E C O L E



Le marchand de soie



Origami
et solides de Platon



9e RMT, la finale

40e
année

197

mai 2001

Math-Ecole, pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.

Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces – bonnes – lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques**.

Dans *Math-Ecole*, on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques,
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros) :

Suisse : CHF 30.- compte de chèque postal 12-4983-8

Etranger : CHF 35.- par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8

Prix au numéro : CHF 7.-

anciens numéros : CHF 3.- /pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :

de 5 à 9 CHF 22.- par abonnement

de 10 à 50 CHF 20.- par abonnement

(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :

Rédaction de *Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7,

par courrier électronique E-mail : francois.jaquet@irdp.unine.ch

ou par INTERNET : <http://www.irdp.ch/math-eco>

Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.

Adresse

Rédaction de *Math-Ecole*
Case postale 54
CH-2007 Neuchâtel 7

Administration

Institut de Recherche et
de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH-2007 Neuchâtel 7
Tél (032) 889 86 03
(de 14h à 17h30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 86 09
Fax (032) 889 69 71

Fondateur

Samuel Roller

Rédacteur responsable

François Jaquet

Comité

Michel Bréchet
Roger Délez
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Mireille Snoecks
Janine Worpe

Mise en page

Raphaël Cuomo

Imprimerie

Florina, rue de la Lombardie 4
CH-1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture

Spirale de carrés ayant pour côté
les nombres de la suite de Fibonacci

Sommaire

Editorial

F. Jaquet, IRDP

2

Le marchand de soie

Joëlle Cretton, IRDP

4

Réponses

au problème du tailleur

16

Exposition

Rivages Mathématiques

18

Origami

et solides de Platon

Denis Odiet

23

Racines carrée

et cubique

Antoine Gaggero

29

Parcours et détours 2:

les labyrinthes géométriques

G. Sarcone, M. J. Waeber

33

9e RMT, la finale

42

Editorial

A propos de l'entraînement
des techniques de calcul

F. Jaquet, IRDP

Après «Mathématiques 1P – 4P», les nouveaux moyens d'enseignement de Suisse romande abordent le cycle 5 – 9 par la parution récente de «Mathématiques 5e». La presse l'a largement annoncé et chacun se réjouit de savoir que, dans quelques années, l'ensemble de la scolarité obligatoire sera couverte par une collection de manuels de mathématiques, en cohérence «verticale» dans ses conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques.

Après les tendances structuralistes des années 1960 à 1980, la résolution de problèmes tient maintenant le haut du pavé et le rôle prépondérant de l'élève dans la construction de ses connaissances mathématiques est largement confirmé.

Il n'y a pas eu de «retour en arrière» du genre «back to the basics» des Américains et, même si les «maths modernes» ont révélé leurs limites et glissements, parfois coûteux, la Suisse romande s'en tire sans révolution de palais ni trop de casse.

Mais tout n'est pas encore réglé. Il y a encore beaucoup à faire pour modifier des pratiques et habitudes solidement ancrées dans notre institution scolaire. Entre autres, il faut encore s'entendre sur ce que les nouveaux

moyens d'enseignement désignent par «outils de calcul» et sur leurs rôles et fonctions respectifs.

Les lignes directrices de la collection romande, élaborées il y a bientôt 10 ans, demandent expressément que *les techniques, notions ou outils particuliers se construisent au cours des périodes de recherche où leur utilisation se révèle fonctionnellement nécessaire...* La majorité des activités proposées à l'élève rejoindra les buts généraux de l'enseignement des mathématiques, définis par les «finalités» du plan d'études.

Quant au *Plan d'études romand de mathématiques* (degrés 1 à 6), texte officiel de référence adopté par tous les cantons en 1997 il précise, à propos des opérations nécessaires pour résoudre des problèmes du champ numérique: «Effectuer les calculs à l'aide d'outils appropriés (... en 4e de 0 à 10000, en 5e et 6e dans R) – ...»

Ces textes ne peuvent en aucun cas être compris comme une incitation à un entraînement intensif. C'est dans l'interprétation des termes «outils appropriés» que se situeront les enjeux de l'entraînement des algorithmes écrits des opérations arithmétiques.

La nouvelle édition de «Mathématiques 5e» a ainsi diminué la part d'entraînement des algorithmes de calcul en raison de l'utilisation généralisée de la calculatrice et au profit du calcul réfléchi. Si elle reconnaît la nécessité de l'entraînement de l'algorithme écrit d'addition des nombres décimaux, elle se demande jusqu'à quel degré celui-ci doit être entraîné. En sixième année le problème sera reporté sur la multiplication, mais surtout sur la division de nombres décimaux. Les propositions vont actuellement vers une limitation à quelques activités de découverte et de compréhension des diverses techniques de calcul. Mais il y a loin du moyen d'enseignement, qui ne doit pas être confondu avec le programme, aux pratiques enseignantes.

Si chacun semble reconnaître à la calculatrice une plus grande efficacité que le calcul écrit pour les opérations, beaucoup souhaitent toutefois conserver une certaine dextérité du calcul à la main. Or, on ne peut acquérir cette maîtrise technique, même minimale, sans un entraînement intense, car un algorithme est précisément une suite d'opérations automatisées.

En résumé, soit on entraîne les algorithmes et on y consacre le temps nécessaire – beaucoup dans le cas de la division des décimaux – soit on y renonce et on se contente de les observer, par curiosité et par intérêt historique pour une technique ancienne. C'est le cas aujourd'hui pour l'extraction des racines carrées, comme le montre notre collègue A. Gaggero dans son article publié dans ce numéro (pages 29 à 32).

Nos collègues français se posent aussi des questions sur les outils de calcul. Une équipe de l'INRP vient de rédiger des « propositions pour un texte d'accompagnement des programmes¹ » des cycles 2 et 3 (de 7 à 11 ans degrés 2 à 5 en Suisse romande). On y lit, au chapitre des nombres naturels, après l'évocation du calcul mental réfléchi et du calcul assisté par une machine, les paragraphes suivants :

Le travail sur les techniques usuelles (calcul posé) doit faire l'objet d'un recentrage. Pour l'addition, la soustraction et la multiplication,

leur usage dans des cas simples (résultat à deux ou trois chiffres) doit être assuré. Mais une part essentielle de l'activité doit résider dans la recherche de la compréhension et de la justification des techniques utilisées... Pour la division, en attendant les conclusions de travaux qui devraient être menés, on peut se limiter à des calculs simples à la fin du cycle 3 (du type 432 divisé par 7) posés en gardant la trace des soustractions effectuées. A terme, la pertinence de cet apprentissage de la « division posée » devra être ré-interrogée.

En ce qui concerne les nombres décimaux, ce texte propose de n'envisager que la prolongation de la division d'un entier par un entier, à la recherche du quotient décimal.

Et si, après avoir constaté les concordances entre nos plans d'études, lignes directrices, moyens d'enseignement et le point de vue de collègues français engagés dans la réflexion sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, on passait aux actes ?

La première chose ne serait-elle pas de supprimer les questions sur la maîtrise des techniques d'opérations de tous les examens, tests ou autres épreuves qui jalonnent le parcours de nos élèves ? Ou, si l'on pense vraiment qu'il est nécessaire de mesurer les compétences en calcul, pourquoi ne pas autoriser la calculatrice à cet effet et vérifier si les élèves sont capables de l'utiliser efficacement ?

1. Texte publié dans le numéro 67 (année 2000 - 2001) de la revue *Grand N* (pp 41 à 61) dont les auteurs sont engagés dans l'équipe ERMEL : H-C. Argaud, R. Charnay, J. Douaire, M-P. Dussuc, R. Neyret.

Le marchand de soie

Joëlle Cretton, IRDP¹

Donnée du problème

Un marchand de soie descend de son navire. Il doit parcourir 120 lieues pour se rendre au château du roi.

Il commence le voyage à pied et le termine dans un carrosse que le roi a envoyé à sa rencontre.

Le marchand et le carrosse partent au même moment.

A pied, le marchand parcourt 10 lieues par jour. Le carrosse parcourt 20 lieues par jour. Au bout de combien de jours le marchand arrivera-t-il au château ?

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

Analyse a priori

Ce problème fait appel à des connaissances en arithmétique (addition, soustraction, division, multiplication) et met en jeu des notions de vitesse et de mesure (distance).

1. Joëlle Cretton a effectué un stage à l'IRDP, au cours duquel elle a analysé un problème de mathématiques proposé aux classes de niveaux 4 à 6, dans le cadre du 8e Rallye mathématique transalpin. Cet article constitue un extrait de son rapport de stage, dont le texte complet peut être obtenu à l'IRDP.

Il s'agit de comprendre dans un premier temps que le marchand et le carrosse vont à la rencontre l'un de l'autre, que l'un va moins vite que l'autre et que par conséquent, la rencontre ne se fait pas au milieu du chemin. Dans un deuxième temps, il faut prendre en compte le retour du carrosse au château après la rencontre.

Les élèves peuvent calculer les positions jour après jour, en utilisant éventuellement un schéma, ou additionner les chemins parcourus chaque jour dans la première partie du parcours ($10 + 20$) et diviser la distance totale à parcourir par cette somme ($120 : (20 + 10) = 4$), pour trouver le nombre de jours nécessaires jusqu'à la rencontre, puis doubler ce nombre en tenant compte du retour ($4 \times 2 = 8$).

Types de réponses prévus et barèmes correspondants

Réponse complète et correcte: 8 jours avec explications claires (qui peut aussi être un schéma): 4 pts

Réponse correcte avec explications incomplètes ou non claires, ou erreur de calcul avec raisonnement correct explicité: 3 pts

Erreur de calcul avec explications non claires ou seulement la réponse intermédiaire, 4 jours, avec explications: 2 pts

Début de raisonnement correct: 1 pt

Incompréhension du problème: 0 pt

Résultats

Pour la Suisse Romande, 157 copies ont été examinées. Le tableau ci-dessous présente pour chaque niveau le nombre de classes ayant obtenu 4, 3, 2, 1 ou 0 points.

Ces résultats sont les premiers à apparaître, en raison des contraintes de classement qui existent dans toute activité de concours.

Résultats du problème 8

points	niveau 4		niveau 5		niveau 6		total	
	N	%	N	%	N	%	N	%
4	4	7.0	13	23.6	18	40.0	35	22.3
3	9	15.8	9	16.4	11	24.4	29	18.5
2	9	15.8	10	18.2	4	8.9	23	14.6
1	17	29.8	13	23.6	10	22.2	40	25.5
0	18	31.6	10	18.2	2	4.5	30	19.1
total	57	100.0	55	100.0	45	100.0	157	100.0
moyenne des points	1.37		2.04		2.73		2	

Le nombre de classes de chaque niveau est du même ordre de grandeur. On remarque également un assez bon équilibre de la répartition totale des classes selon le nombre de points obtenus.

Il y a pour ce problème une augmentation significative de réussite (4 points) en fonction du degré scolaire. Peu de classes de 4ème primaire réussissent ce problème, alors que 40 % des classes de 6ème y parviennent en justifiant correctement leur réponse². On remarque également une augmentation du nombre de réponses à 3 points avec le changement de degré scolaire.

Avec le passage d'un niveau scolaire à l'autre, le nombre de 0 point diminue, avec une chute au niveau 6. Le nombre de réponses à 1 point diminue également, mais de façon moins spectaculaire.

L'analyse selon le nombre de points n'est pas prioritaire du point de vue de la didactique, mais est essentielle pour les classes participantes.

Lors de l'élaboration des problèmes et du choix des degrés à qui on les proposera, les auteurs de l'épreuve s'efforcent d'éviter les problèmes trop difficiles ou trop faciles. Ce tableau des résultats du « marchand de soie » montre que ce problème est bien équilibré, voire un peu trop difficile en 4ème.

Analyse des stratégies

Contrairement à ce que laissait supposer l'analyse a priori, les réponses ont été très diversifiées. Les correcteurs ont donc passé un certain temps à discuter des critères d'évaluation pour déterminer le nombre de points à attribuer aux divers types de réponses.

La liste des différents types de réponses, en nombre de jours, est présentée ci-dessous, en commençant par la réponse correcte (8 jours). Cette présentation ne tient pas compte du nombre de points obtenus. Ces différentes catégories de réponses sont regroupées à la fin de cet article dans un graphique récapitulatif³. Ces réponses donnent de précieux indices sur les stratégies développées,

2. En 6ème année, on arrive à un taux de réussite de 64.4 % si on ne tient compte que de la réponse correcte indépendamment des explications.

3. cf. page 14

bien que deux mêmes réponses peuvent être dans certains cas l'aboutissement de représentations différentes.

La réponse «8 jours» et ses différentes stratégies

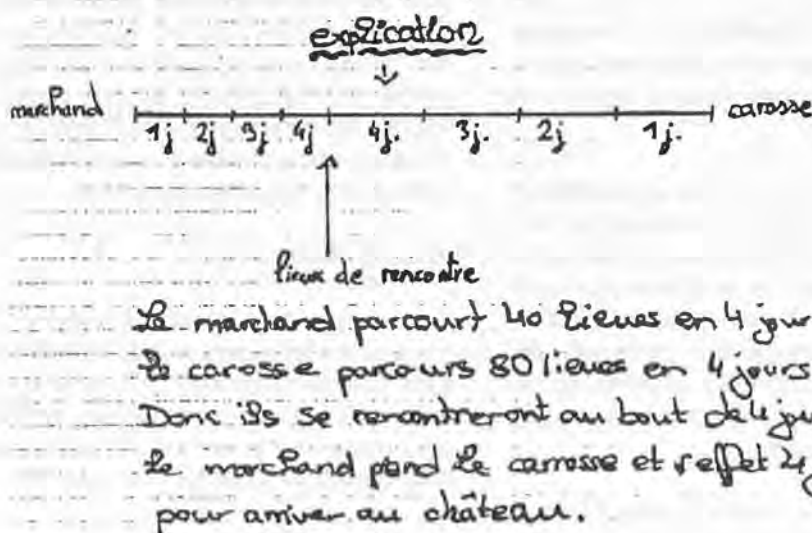
63 classes (40 %) ont donné cette réponse, dont 12 classes de niveau 4, 22 classes de niveau 5 et 29 classes de niveau 6. Parmi ces réponses, nous pouvons distinguer les copies

reques en fonction des justifications complètes ou incomplètes que les élèves ont données.

1. Réponse 8 jours avec justification :

Les élèves expliquent dans un premier temps quand a lieu la rencontre entre le marchand et le carrosse. Dans un deuxième temps, les élèves parlent du retour au château avec le carrosse, en précisant qu'il faut encore quatre jours pour y arriver.

Au bout de combien de jours le marchand arrivera-t-il au château ? Au bout de 8 jours.



Sur les 63 classes ayant donné la réponse correcte, 36 fournissent ce type d'explications, dont 5 classes de 4^{ème}, 13 classes de 5^{ème} et 18 classes de 6^{ème}.

2. Réponse 8 jours sans justification :

Parmi les 63 classes, 27 ont donné des explications incomplètes, dont 7 classes de 4^{ème}, 9 de 5^{ème} et 11 de 6^{ème}.

Nous trouvons dans la majorité des cas l'explication suivante :

$$80 + 40 = 120, \text{ nombre de lieues parcourues en tout}^4$$
$$80 = 4 \times 20 \text{ et } 40 = 4 \times 10$$

4. L'orthographe a été corrigée.

Pour certaines réponses, dans lesquelles aucune indication n'est donnée sur le retour, on peut se demander comment les élèves sont arrivés à la réponse de 8 jours :

- ont-ils additionné les quatre jours que met à pied le marchand jusqu'à la rencontre et les quatre jours que met le carrosse jusqu'à la rencontre ?
- ou ont-ils additionné les quatre jours que mettent le marchand et le carrosse jusqu'à la rencontre et les quatre jours pour retourner en carrosse jusqu'au château ?

Dans certaines réponses, il est évident que les élèves ont utilisé la première stratégie. Dans d'autres, ce l'est moins.

Il se peut également que les élèves aient compté à haute voix le nombre de jours qui restaient de la rencontre jusqu'au château.

Il est légitime d'estimer que dans ces procédures, la simultanéité des deux déplacements a été reconnue jusqu'au moment de la rencontre (les élèves écrivent deux fois « premier jour », « deuxième jour... »), mais qu'ils confondent ensuite ces durées avec des segments de leur représentation graphique et qu'ils terminent leur résolution en additionnant ces segments ou « longueurs ».

Enfin, dans une copie, une classe a utilisé une stratégie (utilisation de parenthèses) qui n'est apparue nulle part ailleurs :

$$\cancel{120-4}$$

$$120 - (20 \times 4) = 40 \quad 0 + (10 \times 4) = 40$$

$$4 \text{ jours à pied, } 4 \text{ jours à pied} =$$

$$8 \text{ jours}$$

La réponse «4 jours» (réponse intermédiaire)

Les élèves se rendent compte que le carrosse et le marchand n'avancent pas à la même vitesse et donc que la rencontre n'a pas lieu à mi-parcours. Mais ils s'arrêtent là, comme s'ils avaient oublié la deuxième partie de l'énoncé du problème :

Le marchand fait en quatre jours 40 lieues et le carrosse fait en quatre jours 80 lieues. Donc ils se rencontrent au bout de quatre jours.

8 classes (5 %) ont donné cette réponse, dont 3 classes de 4ème, 4 classes de 5ème et 1 classe de 6ème.

La réponse «6 jours»

Les élèves ne tiennent compte que du marchand et du nombre de jours qu'il doit faire pour parcourir les 120 lieues en carrosse. Ils n'ont pas compris que le marchand et le carrosse, qui partent bien au même moment, ne partent pas du même endroit.

*Le marchand fait en carrosse 20 lieues par jour et doit parcourir 120 lieues.
 20 lieues x 6 jours = 120.
 Réponse: le marchand doit faire 6 jours pour faire 120 lieues.*

2 classes (1 %) ont donné cette réponse, dont une de 4ème et une de 6ème.

La réponse «6 et 12 jours»

Calcul du nombre de jours que met le marchand pour parcourir les 120 lieues à pied et pour parcourir les 120 lieues en carrosse, sans tenir compte du fait que le carrosse vient à la rencontre du marchand et que le marchand finit le trajet dans le carrosse:

*Nous avons fait $120 : 20 = 6$ donc, s'il fait tout en carrosse, il fera 6 jours.
 Nous avons aussi fait $120 : 10 = 12$ donc, s'il fait tout à pied, ça fera 12 jours.*

Comme dans la réponse précédente, il n'y a aucune simultanéité des déplacements.

Cinq classes (3 %) ont donné cette réponse, dont deux de 4ème, deux de 5ème et une de 6ème.

La réponse «9 jours» et ses différentes stratégies

15 classes (10 %) ont donné cette réponse, dont 5 classes de 4ème, 6 de 5ème et 4 de 6ème.

1. Première stratégie menant à cette réponse:

Les élèves partent du principe que la rencontre entre le marchand et le carrosse a lieu à mi-parcours. Ils divisent donc la distance totale (120 lieues) par deux et cherchent combien de jours le marchand et le carrosse doivent mettre chacun pour parcourir les 60 lieues en tenant compte du fait qu'ils n'avancent pas à la même vitesse. Pour ce faire, les élèves ont utilisé diverses stratégies:

- la division (une classe de 5ème):
 $60 : 10 = 6$ et $60 : 20 = 3$, $6 + 3 = 9$ jours
- la multiplication (trois classes de 4ème):
 $6 \times 10 = 60$ et $3 \times 20 = 60$, alors $6 + 3 = 9$ jours
- utilisation des jours de la semaine (une classe de 5ème):
*le carrosse: le lundi 20 lieues, mardi 20 lieues, mercredi 20 lieues = 60 lieues
 le marchand à pied: le lundi 10 lieues, le mardi 10 lieues, mercredi 10 lieues, jeudi 10 lieues, vendredi 10 lieues, samedi 10 lieues = 60 lieues.
 Il arrive au bout de 9 jours.*
- autres (trois classes, dont deux de 4ème et une de 6ème):
*Il va faire 6 jours à pied et 3 jours en carrosse. En tout, il va faire 9 jours.
 Calculs: moitié de $120 = 60$
 A pied, pour parcourir 60 lieues, il va faire 6 jours. En carrosse, pour faire 60 lieues, il va faire 3 jours. En tout, il va faire 9 jours.*

Sur les 15 classes ayant donné pour réponse 9 jours, 8 classes ont utilisé cette stratégie, dont 5 classes de 4ème, 2 classes de 5ème et 1 classe de 6ème.

Comme justification de la rencontre à mi-parcours, on trouve l'argument suivant (une classe de 4ème):

On a d'abord fait la moitié de 120 parce que le marchand et le carrosse partent au même moment.

Il y a ici confusion entre le moment du départ et le moment de la rencontre.

Dans les autres copies, on ne trouve pas d'explication sur la raison pour laquelle ils se rencontrent à mi-chemin.

Nous pouvons cependant imaginer que les élèves se sont représentés un trajet entre le navire et le château et qu'ils ont pensé que la rencontre avait lieu entre les deux. Nous pouvons alors faire l'hypothèse que c'est leur conception trop étroite de «entre» qui leur fait

effectuer un partage équitable de l'espace et placer la rencontre à mi-parcours. Il y a ainsi confusion entre les termes «au milieu» et «entre»⁵.

2. Deuxième stratégie menant à 9 jours:

Les élèves partent du principe que la rencontre a lieu à la moitié du parcours sans indiquer de manière explicite la division de 120 par deux:

Le marchand de soie arrivera au château au bout de 9 jours.

Le carrosse = 3 jours 60 lieues

Le marchand = 6 jours 60 lieues

Sur les 15 classes ayant donné 9 jours comme réponse, 5 classes ont utilisé cette deuxième stratégie, dont 3 classes de 5ème et 2 classes de 6ème.

3. Troisième stratégie conduisant à 9 jours:

Les élèves calculent le nombre de jours pour parcourir les 120 lieues à pied et en carrosse, puis divisent les réponses par deux, puisque

le marchand et le carrosse se rencontrent à la moitié du parcours (une classe de 5ème):

1) *il faut 12 jours pour aller à pied*
 $(120 : 10 = 12)$

2) *il faut 6 jours pour aller en carrosse*
 $(120 : 20 = 6)$

Après il faut diviser 12 par 2 et 6 par 2 parce qu'il fait la moitié du trajet en carrosse et l'autre à pied.

Réponse: il lui faut 9 jours pour arriver au château.

Avec l'utilisation de ces trois types de stratégies, on peut se demander comment les élèves sont arrivés à cette réponse de neuf jours. Il est en effet parfois difficile de savoir si les neuf jours sont obtenus en additionnant les six et les trois jours que mettent le marchand et le carrosse jusqu'à la rencontre à mi-parcours, ou s'ils sont obtenus en additionnant les six jours que le marchand met jusqu'à la rencontre à mi-parcours et les 3 jours qu'il met en carrosse depuis la rencontre jusqu'au château:

Exemple de réponse ambiguë:

$$\begin{array}{l} 6 \times 10 = 60 \text{ lieu à pied} \\ 3 \times 20 = 60 \text{ lieu en carrosse} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} 120 \\ 120 \end{array}$$

$$6 \text{ jours} + 3 \text{ jours} = 9 \text{ jours}$$

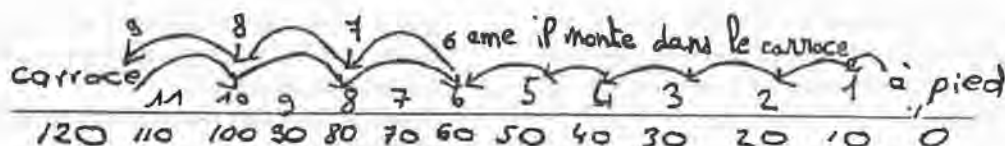
La moitié à pied + l'autre moitié en carrosse

Voilà la réponse et on a tout 9 jours

5. On peut également observer cela lorsqu'on demande aux élèves de donner un nombre par exemple entre 10 et 20 : ils répondront souvent 15.

Exemple de réponse non ambiguë :

à pied 6 jours = 60 lieues
 en carrosse 3 jours = 60 lieues



: au bout de 9 jours

4. Quatrième type de stratégie conduisant à 9 jours :

Les élèves comprennent que la rencontre n'a pas lieu à mi-chemin. Mais ils imaginent que le marchand et le carrosse se rencontrent à midi, soit après quatre jours et demi. Il leur reste encore 80 lieues à parcourir ensemble, et ceci pendant quatre jours et demi :

Le carrosse et le marchand se rencontrent 4 jours à midi après leur départ, il leur reste 80 lieues pour atteindre le château, alors ils font le reste du chemin en 4 1/2 et ils arrivent au château. Ils font 9 jours en tout.

Une classe de 6ème a répondu de cette manière.

La réponse «11 jours»

Les élèves partent du principe que la rencontre a lieu quand le marchand a parcouru 100 lieues à pied. Il lui reste ensuite 20 lieues à parcourir avec le carrosse. Le marchand arrivera ainsi au bout de 11 jours au château :

*Le marchand fait 100 lieues = 10 jours
 en carrosse il parcourt 20 lieues = 1 [jour]
 $10 + 1 = 11$
 $100 + 20 = 120$*

7 classes (4 %) ont donné cette réponse, dont 4 classes de 4ème et 3 classes de 5ème.

La réponse «7 jours» et ses différentes stratégies

5 classes (3 %) arrivent à cette réponse, dont 1 classe de 4ème et 4 classes de 5ème.

1. Première stratégie :

Les élèves semblent partir du principe que la rencontre a lieu quand le marchand a parcouru 20 lieues. Ils tiennent compte, pour le retour au château, du fait que le carrosse va plus vite que le marchand :

$$\begin{array}{l} 10 + 10 = 20 \text{ lieues et } 20 + 20 + 20 \\ 1 \text{ jour } 1 \text{ jour} \qquad \qquad \qquad 1 \text{ jour } 1 \text{ jour } 1 \text{ jour} \\ + 20 + 20 = 100 \text{ lieues} \\ 1 \text{ jour } 1 \text{ jour} \end{array}$$

*Le marchand a fait 2 jours à pied, ce qui fait 10 lieues et 10 lieues = 20 lieues.
 Après, il a pris le carrosse. Pour arriver à 100, il doit faire 5 jours parce que $20 \times 5 = 100$
 $5 + 2 \text{ jours} = 7 \text{ jours}$*

Parmi les 5 classes, 4 utilisent ce raisonnement, dont 1 de 4ème et 3 de 5ème.

2. Deuxième stratégie :

Les élèves commencent par calculer combien de jours le marchand met pour atteindre le château en carrosse. Puis ils tiennent compte du fait que le marchand fait un bout de chemin à pied (une classe de 5ème) :

$20 \times 6 = 120$. Donc en carrosse il faudrait 6 jours, mais comme il doit aller à pied, on rajoute 20 jours [lieues] à pied, ce qui fait 7 jours.

La réponse « 12 jours » et ses différentes stratégies

25 classes (16 %) sont arrivées à cette réponse : 14 classes de 4ème, 8 de 5ème et 3 de 6ème.

1. Premier type de stratégie utilisée :

Les élèves ne tiennent compte que du marchand et calculent par conséquent le nombre de jours qu'il met pour parcourir les 120 lieues à pied.

Pour arriver à cette réponse de 12 jours, on constate plusieurs manières de procéder :

- multiplication (9 classes, dont 5 de 4ème, 3 de 5ème et 1 de 6ème) :
 $10 \times 12 = 120$
- division (7 classes, dont 3 de 4ème, 3 de 5ème et 1 de 6ème) :
 $120 : 10 = 12$
- multiplication et division (2 classes, dont une de 4ème et une de 5ème) :
Le marchand de soie arrivera dans 12 jours au château parce que $10 \times 12 = 120$ ou $120 : 12 = 10$.
Ou, on a fait $120 : 10$ car il fait dix lieues par jour et $10 \times 12 = 120$.
- addition en colonne (une classe de 4ème).
- tableau avec deux colonnes : le nombre de jours et le nombre de lieues correspondant (une classe de 4ème).
- calcul en deux étapes : calcul du nombre de

jours que le marchand met pour parcourir 100 lieues, puis calcul du nombre de jours pour parcourir les 20 dernières lieues (une classe de 4ème) :

On a fait $10 \times 10 \text{ jours} = 100 \text{ lieues} + 2 \times 10 = 20 \text{ lieues}$

$100 \text{ lieues} + 20 \text{ lieues} = 120 \text{ lieues}$.

Parmi les 25 classes ayant trouvé 12 jours, 21 ont utilisé cette première stratégie : 12 classes de 4ème, 7 classes de 5ème et 2 classes de 6ème.

2. Deuxième type de stratégie utilisée :

Les élèves tiennent compte du marchand et du carrosse dans leur raisonnement. Dans un premier temps, ils calculent le nombre de jours que mettent le marchand et le carrosse pour parcourir les 120 lieues. Puis partant du principe que le marchand et le carrosse se rencontrent à mi-parcours, ils divisent les nombres de jours parcourus par le marchand et par le carrosse par deux. Comme le carrosse a mis, selon leurs calculs, trois jours jusqu'à la rencontre, ils rajoutent encore trois jours pour le retour du carrosse au château (une classe de 5ème) :

*Le marchand 120 lieues : 10 lieues par jour
= 12 jours*

*le carrosse 120 lieues : 20 lieues par jour
= 6 jours*

*mais comme ils se rencontrent à la moitié,
les jours se divisent par deux $12 : 2 = 6$,
 $6 : 2 = 3$*

$3 + 6 = 9$

+ le retour = 12 jours.

3. Troisième type de stratégie utilisée :

Les élèves font le même raisonnement que celui qui conduit à la réponse de 9 jours, mais ils rajoutent à la fin les trois jours du retour au château (une classe de 6ème) :

$120 : 2 = 60$

nombre de jours à pied $60 : 10 = 6 \text{ jours}$

nombre de jours en carrosse $60 : 20 = 3 \text{ jours}$

total de jours: 6 jours + 3 jours = 9 jours +
3 jours de retour = 12 jours.

Ce dernier rajout de trois jours ne tient pas compte de la simultanéité.

4. Quatrième type de stratégie utilisée:

Les élèves commencent par le même raisonnement que celui qui conduit à la réponse de

9 jours, c'est-à-dire qu'ils partent du principe que la rencontre a lieu à mi-parcours et qu'ils calculent le nombre de jours que le carrosse et le marchand mettent jusqu'à la rencontre. Mais ils font ensuite une erreur d'interprétation de leur schéma, additionnant $2 + 2 + 2 = 6$ jours pour le carrosse, au lieu de déduire que ces 3×2 (2 pour 20 lieues) correspondent aux trois jours que le carrosse met jusqu'à la rencontre (une classe de 4ème):

au bout de 12 jours

$$10 \times 10 + 20 = 120$$

on dit que le marchand parcourt
10 lieues par jour, et le carrosse
parcourt 20 lieues par jours, alors

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \\ 1 \quad 2 \\ 1 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 6 \text{ jours} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

5. Autre:

La réponse de 12 jours sans explication (une classe de 4ème).

La réponse «18 jours»

Les élèves calculent le nombre de jours que met le marchand pour parcourir les 120 lieues à pied et en carrosse. Puis ils additionnent les nombres de jours, puisqu'ils comprennent qu'il y a à la fois le marchand et le carrosse qui parcourent les 120 lieues:

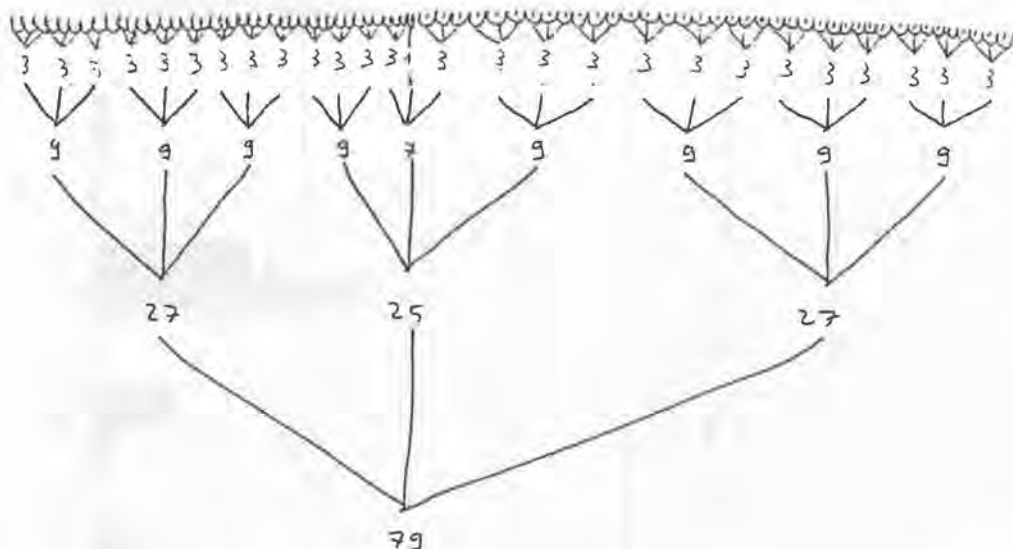
12 à pied et 6 en carrosse = 18 jours.

Deux classes (1 %) sont arrivées à cette réponse, dont une de 4ème et une de 5ème.

Les réponses «autres»

1. Feuille blanche: 3 classes de 4ème année.
2. Les élèves donnent deux réponses: 2 classes de 4ème.
3. Erreur de calcul: Les élèves arrivent à 7 jours au lieu de 8 jours (une classe de 4ème).
4. Réponses erronées difficiles pour nous à interpréter ou sans explication, qui dénotent une incompréhension du problème (19 classes, dont 8 de 4ème, 5 de 5ème et 6 de 6ème):

Il va faire 79 jours pour atteindre le château.



La stratégie prévue dans l'analyse a priori consistant à additionner les chemins parcourus chaque jour dans la première partie du parcours ($10 + 20$) et à diviser la distance totale à parcourir par cette somme ($120 : (20 + 10) = 4$), stratégie généralement utilisée par l'adulte, n'a été que rarement rencontrée.

Certains élèves ont en partie utilisé cette stratégie, cela de plusieurs manières :

- Une classe de 4ème a suivi la stratégie décrite ci-dessus pour trouver la réponse de 4 jours :

Il peut parcourir 120 lieues en 4 jours.

On a fait $20 + 10 = 30$ et ensuite on a fait $120 : 30 = 4$ alors ça fait 4 jours.

- Utilisation de la multiplication sans préciser d'où provient le nombre 30 (une classe de 4ème) :

On a fait $4 \times 30 = 120$

- Addition puis multiplication ou division (deux classes de 5ème) :

$$10 + 20 = 30, 30 \times 4 = 120 \text{ et } 120 : 30 = 4$$

- Une classe de 5ème a multiplié, au lieu de diviser, le nombre de lieues par 4 :

Réponse 16 jours.

On a fait $120 \times 4 = 480$

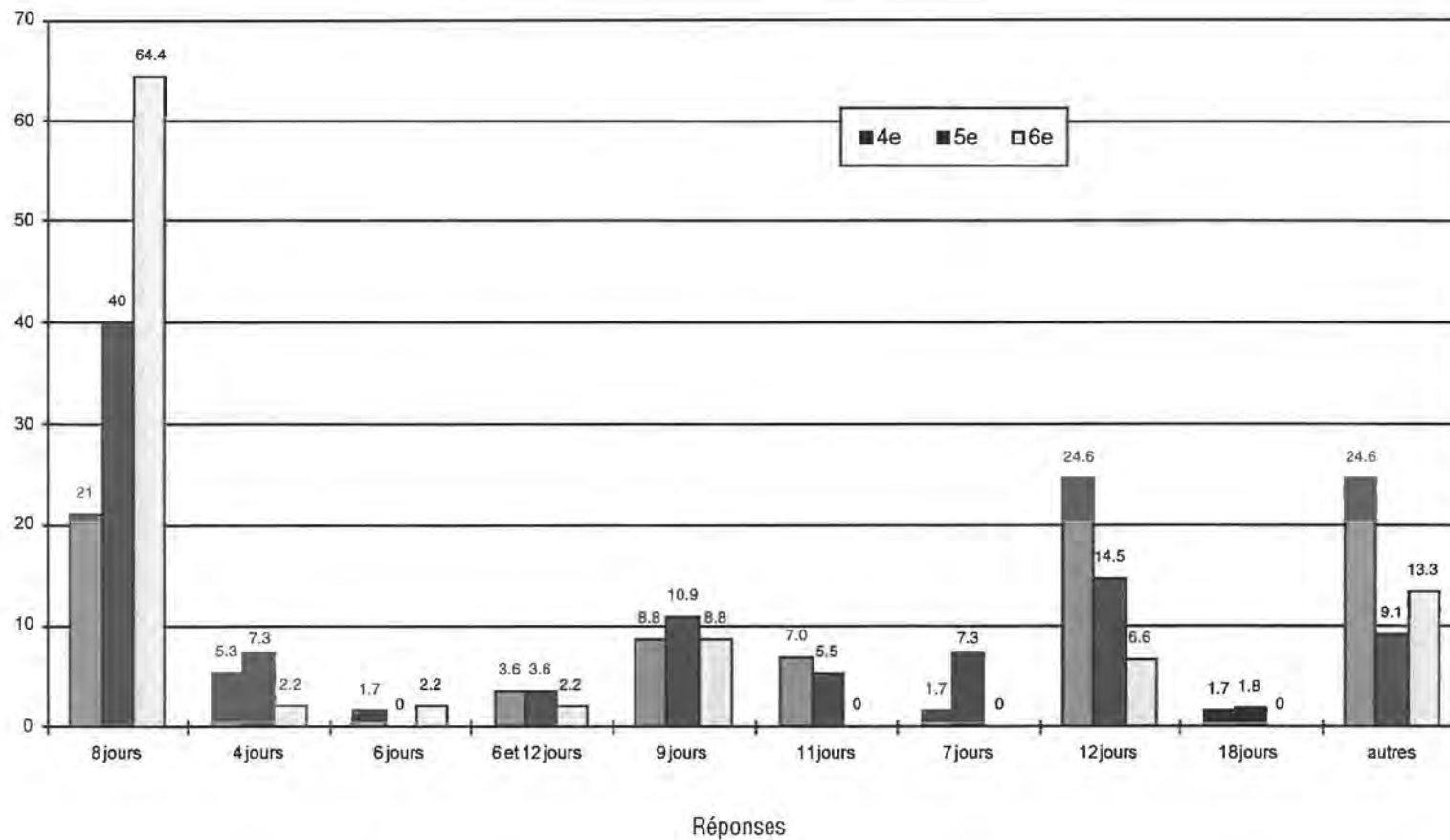
$480 : 30 \rightarrow (20 + 10) = 16 \text{ jours}$

Commentaires du tableau

En 4ème primaire, nous trouvons autant de réponses 8 jours avec justification que de 9 jours (8.8 %). Avec le passage dans les degrés supérieurs, le pourcentage de ce dernier type de réponse reste plus ou moins le même, tandis que le nombre de réponses 8 jours avec justification va en augmentant. Imaginer que la rencontre entre le marchand et le carrosse a lieu à mi-parcours est donc une stratégie utilisée autant en 4ème qu'en

Graphique – Les différentes réponses et stratégies

Pourcentage



6ème, alors qu'on s'attend à la voir diminuer avec la progression d'un niveau scolaire à l'autre. En 4ème primaire également, les réponses *autres* et *12 jours* sont plus nombreuses (24.6 %) que les réponses *8 jours avec justification* (8.8 %). Le nombre de réponses *autres* et *12 jours* diminuent par la suite.

En ce qui concerne les réponses *autres*, on ne trouve plus, en 5ème et en 6ème primaire, de feuilles blanches, d'erreur de calcul ou de doubles réponses. Il ne reste que quelques réponses erronées avec explications peu claires ou sans explication.

Avec le passage d'un niveau scolaire à l'autre, il y a une augmentation du nombre de réponses *8 jours avec justification*. Il s'agit donc globalement d'un problème bien adapté, puisque les élèves progressent d'une année à l'autre.

Le nombre de réponses *8 jours sans justification* augmente également, mais dans des proportions plus restreintes. Cette augmentation pose question, puisque l'on s'attendrait plutôt à voir diminuer ce type de réponse avec le changement de niveau scolaire.

On peut se demander ce qui permet aux élèves de 6ème année de mieux réussir ce problème que les enfants plus jeunes.

L'hypothèse d'une difficulté à calculer chez les plus jeunes est à écarter, puisque les calculs de ce problème sont relativement simples

à effectuer une fois qu'on les a posés et qu'il n'y a quasiment pas d'erreurs de calculs par rapport au nombre des copies examinées. La division, bien qu'introduite en 5ème année seulement, ne semble pas poser de difficultés particulières, puisque les élèves qui l'utilisent le font correctement, y compris les élèves de 4ème, et qu'il est possible de résoudre ce problème par d'autres moyens que la division.

Cet emploi de la division par certains élèves de 4ème année nous montre qu'en situations de problèmes, les enfants sont tout à fait capables d'utiliser des outils indépendamment du programme scolaire.

La difficulté semble résider dans la capacité à se représenter deux déplacements simultanément, difficulté accentuée par le fait qu'ils ne se font pas à la même vitesse.

Cette difficulté à concevoir deux déplacements de vitesses différentes (10 lieues par jour pour le marchand et 20 lieues par jour pour le carrosse) se reflète dans les stratégies des élèves qui imaginent que la rencontre a lieu à mi-parcours (réponse *9 jours*) ou à divers endroits autres qu'à mi-chemin (réponses *7 jours*, *11 jours*).

Outre la difficulté de se représenter mentalement le scénario, une autre difficulté résiderait dans la longueur de l'énoncé, puisqu'un certain nombre d'élèves semblent en oublier une partie au cours de la résolution du problème (oubli du retour au château, oubli du carrosse...).

Réponses au problème du tailleur

[ndlr] Le problème du « tailleur » de l'épreuve I du 9e RMT (voir Math-Ecole 195, page 27) se révèle décidément de plus en plus riche. Après avoir découvert que la réponse proposée dans son analyse a priori n'était pas optimale, nous l'avons soumis à nos lecteurs (voir Math-Ecole 196, page 39 et 40).

Ceux-ci n'ont pas hésité à se lancer à leur tour dans la recherche. Voici leurs réponses, qui arrivent toutes à placer les 9 pièces de tissu dans le ruban de 120 cm de largeur et de 160 cm de longueur.

Comme promis, chacun recevra le livre de problèmes de mathématiques annoncé.

Mais le concours est toujours ouvert. On devine qu'il y a beaucoup de solutions. Combien ? (avec la contrainte – implicitement admise par tous nos lecteurs – que les mesures des côtés des « trous » sont des multiples de 10, en cm.)

1. De « enitram tenomis » (en verlan)

Chic, voilà un problème comme je les aime ! (D'autant plus que ce casse-tête m'a résisté durant environ une heure et demie). Comment ai-je procédé ?

- J'ai découpé les neuf pièces dans du papier quadrillé cartonné.

- J'ai dessiné un rectangle de 12 □ sur 16 □ (1 □ : 10 cm x 10 cm).
- J'ai calculé que la somme des espaces libres sera égale à 9 □ et qu'il ne faudra donc pas laisser de trous plus grands.
- J'ai placé les pièces selon différentes combinaisons tout en constatant que :
 - il faut éviter de juxtaposer des pièces qui laissent un vide de 3 □ x...
 - certaines pièces ne peuvent être mises côte à côte car elles dépassent la largeur de la bande
(exemple : $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = 13$
5 8

Et pour terminer, voici ma solution :

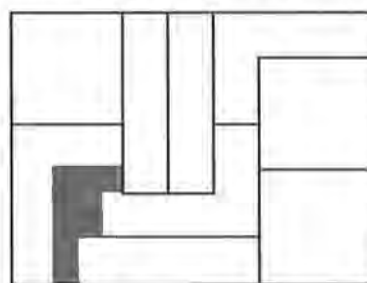


Fig 1

2. De Danyel Stevanovic, Via Quinta 17, Biasca :

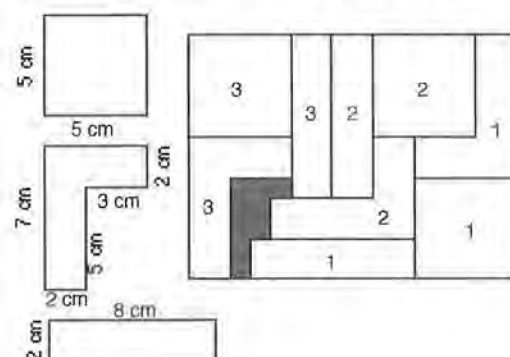


Fig 2

3. De Sarah Zufferey, Rte des Colombettes 548, 1628 Vuadens, date de naissance: 9 mai 1990, Classe de 4P. Vuadens, ce collage de pièces:

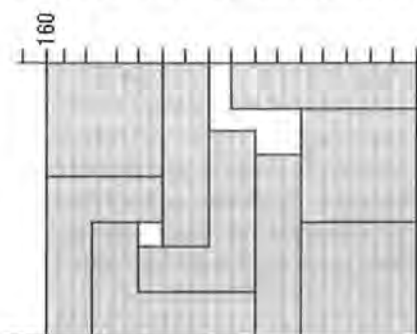


Fig 3

4. De la Scuola Media, Via Franscini 21, 6710 Biasca (TI).

Siamo 4 allievi di 3° Media (degré 8) e abbiamo trovato la soluzione. Eccola rappresentata qui sotto. Cordiali Saluti.

Nathalie Persico, Samuele Faretti, Luana Rodoni, Edonita Begiri.

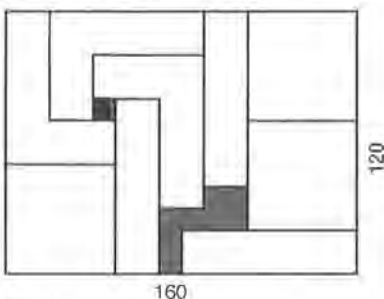


Fig 4

5. De Cédric Ischi, Ch. de la Panessière 18, 1803 Chardonne:

Voici deux solutions, avec les pièces 1 et 2 qui peuvent se déplacer. La pièce 1 peut se placer de 3 manières différentes et la pièce 2 de 2 manières différentes, ce qui offre 12 solutions distinctes (sans compter bien sûr les solutions symétriques).

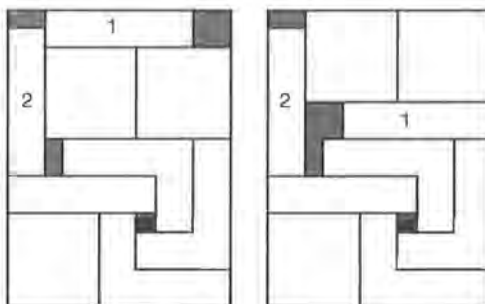


Fig 5

J'ai aussi donné l'exercice à mes élèves de 8ème année et ils ont trouvé la solution suivante (qui donne aussi 2 solutions en déplaçant la pièce 1).

[ndlr] Cette dernière solution est celle de la figure 1, et la pièce mentionnée est le rectangle inférieur.

6. De Clara Colombo-Bozzolo, Via al Nido 10, 6900 Lugano, la solution de la figure 2, à une isométrie près.

Exposition Rivages Mathématiques

La rédaction

Chacun a entendu parler du *Festival Science et Cité*, à la TV, à la radio, dans tous les journaux. Organisée dans les dix villes universitaires de Suisse du 4 au 11 mai 2001, cette manifestation a connu un succès dépassant les espérances des plus optimistes de ses organisateurs. C'est par dizaines de milliers que les visiteurs ont afflué dans les stands proposés par différentes facultés des sciences de nos universités et par des associations directement concernées par le développement de la culture scientifique.

Parmi elles, dans le cadre du festival de Neuchâtel, il y avait la Société des enseignants neuchâtelois scientifiques (SENS), qui s'est retrouvée aux côtés de douze autres groupes ou institutions : l'Institut de Chimie, le Laboratoire d'écologie animale, le Jardin botanique, l'Institut d'ethnologie, l'Ecole d'ingénieurs du Locle... pour animer l'un des treize stands du site, dont le thème était celui des métamorphoses.

Mais que pouvaient bien faire les collègues de la SENS, sous les bulles de la Place du Port de Neuchâtel pour rapprocher les sciences de la cité ?

Comme il y a de nombreux professeurs de mathématiques parmi eux, ils ont choisi de présenter une exposition active : *Rivages mathématiques*, récemment créée par le Comité International des Jeux Mathématiques (CIJM)

avec l'appui du magazine Hypercube et des Editions Archimède.

Pour s'insérer dans le thème du Festival Science et Cité de Neuchâtel, l'exposition est devenue : *Métamorphoses mathématiques dans les anciennes civilisations autour de la Méditerranée*. Cette adaptation du titre s'est faite assez naturellement car, au cours de ces derniers millénaires, beaucoup de choses se sont transformées en mathématiques, et ces métamorphoses n'en prennent que plus d'intérêt aujourd'hui.

Thème

Des figures aux nombres au fil des civilisations : expériences mathématiques

Contenu

L'exposition propose une promenade mathématique réalisée par 10 activités qui sont autant de raccourcis à travers le temps. L'histoire qu'elle survole commence voici quelque 6000 ans, quand les hommes ont commencé à compter pour les nécessités du commerce, à tracer des plans pour irriguer leurs champs ou construire leurs temples, à établir des calendriers en observant la lune et les étoiles. Elle continue de nos jours, peut-être moins visible, au creux des ordinateurs, des satellites, des appareils médicaux, dans les objets quotidiens, de l'affichage des consoles vidéo au pilotage des feux rouges... Cette histoire, c'est la fabuleuse histoire des mathématiques, de leur évolution, de ses transformations, des métamorphoses du monde qu'elles offrent à l'esprit humain.

Les activités proposées ménagent quelques haltes rapides, quelques fenêtres ouvertes sur 35 siècles de cette histoire, entre -2000 et 1500, autour de la Méditerranée. Des panneaux centraux engagent le visiteur dans des problèmes ou recherches, avec le support de matériel de manipulation, d'explications, de commentaires historiques et de questions qui complètent l'expérience.

Le visiteur peut ainsi découvrir combien les mathématiques, loin d'être froides et impersonnelles sont une aventure profondément humaine, à la fois belle et fragile.

Il peut voir aussi que les mathématiques se retrouvent partout, sous différentes formes, passant en particulier des figures géométriques aux nombres.

Les sujets des dix expériences sont :

- Les poids de Babylone (La métamorphose du qualitatif à la mesure)
- La pierre angulaire (Des pyramides d'Egypte au calcul des volumes)
- Thalès en un clin d'oeil (La mesure de l'inaccessible)
- Nombres figurés (Le nombre comme système philosophique)
- Pavages magiques (La géométrie de l'harmonie)
- Pythagore en puzzles (Métamorphoses d'un théorème au travers des civilisations)
- Kwarizmath (Le passage du géométrique à l'algorithmique)
- Trois carrés en un (Du découpage à la naissance de la démonstration)
- L'escalier de Leonardo (Des mathématiques arabes à la renaissance italienne)
- Curieux carrelages (La métamorphose de la mosaïque aux structures cristallines)

Matériel

Stand permanent :

De grandes tables offraient, alternativement, 10 postes de travail pour des expériences mathématiques: 10 ensembles de panneaux

(5 triptyques recto-verso, 120 x 80, quadrichromie) et le matériel d'expérimentation¹;

Des fiches complémentaires et un «dossier pédagogique» accompagnaient chaque expérience.

Activités complémentaires

Le thème était enrichi par des jeux sur ordinateur, dans le cadre du projet *Ermitage*, lieu d'activités et d'animation mathématique, qui sera présenté prochainement dans *Math-Ecole*. Les visiteurs pouvaient, sous forme de quizz, répondre à des questions ou en savoir plus sur les thèmes développés pas les panneaux des postes de travail de l'exposition.

Parmi les nombreuses animations qui se sont déroulées le soir, au Café de la Métamorphose, la SENS a organisé deux exposés-débats :

Métamorphoses de l'Univers: du «big bang» au présent, avec Adel Bilat et Jean-Pierre Derendinger, professeurs à l'Institut de Physique.

Jeux et concours mathématiques, avec Véronique Antille, professeure de mathématiques à Cescôle, Lucia Grugnetti, professeure associée de l'Université de Parme, Alain Valette, professeur à l'Institut de Mathématiques de Neuchâtel, François Jaquet, collaborateur scientifique de l'IRDP.

Pour se faire une idée du contenu des postes de travail, voici l'une des dix fiches d'accompagnement, préparées par les collègues de la SENS, à partir des textes de l'exposition «10 expériences mathématiques» (Hypercube 33-34) et de son dossier pédagogique :

¹ L'exposition fait l'objet du numéro spécial Hypercube no 32-33: les panneaux, en réduction, avec tous les textes et problèmes, des planches de figures à découper et à construire,... de quoi reconstituer les 10 postes de travail. Un guide pédagogique complète ce matériel, qui peut être obtenu auprès de *Math-Ecole* (voir page 3 de couverture).

TOUT EST NOMBRE

Né à Samos vers 570 avant notre ère, peut-être disciple de Thalès, Pythagore est presque plus mystérieux encore.

Il a créé à Crotone (sud de l'actuelle Italie) une école qui, mêlant science, politique et mysticisme, ressemblait beaucoup à une secte, ce qui lui valut d'être dissoute. Malgré cet éclatement, sa production scientifique se prolongea jusqu'à vers 400 av. J.-C.

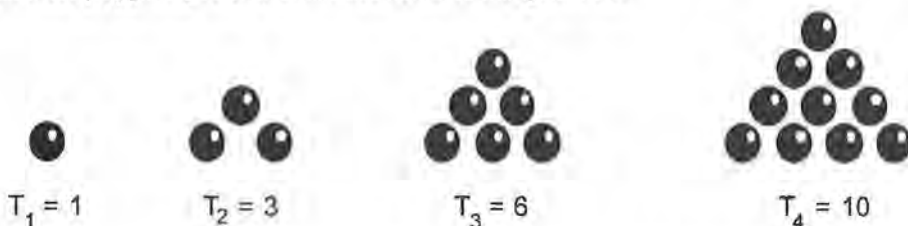
Comme Thalès, il voyage pour recueillir les connaissances des Babyloniens et des Égyptiens.

Pour Pythagore, « Tout est nombre », et les nombres représentent l'harmonie secrète du monde. Mais le nombre a aussi une réalité géométrique. Pythagore étudie les nombres figurés (triangulaires, carrés, pyramidaux...) et leur attribue des propriétés mystiques.

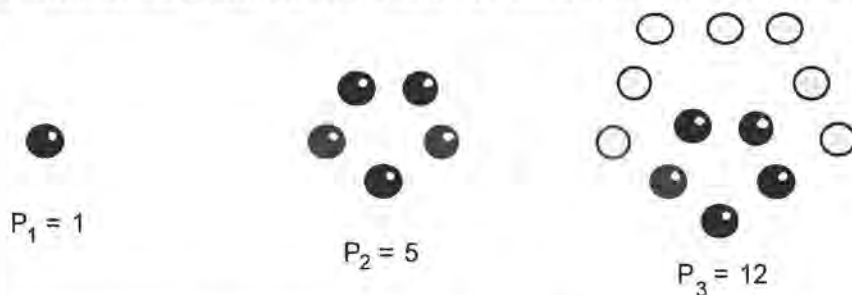
Pour Pythagore, les nombres sont comme des assemblages géométriques des unités qui les constituent. Lorsqu'il dit « le carré de cinq », expression qui nous est restée pour dire 5×5 , c'est vraiment comme si on disposait 25 petites billes en un carré de 5 rangées comptant chacune 5 billes.

Des nombres de toutes formes

Mais les carrés ne sont pas les seuls à pouvoir se représenter comme des assemblages géométriques. Du côté des polygones, voici la famille des nombres triangulaires...



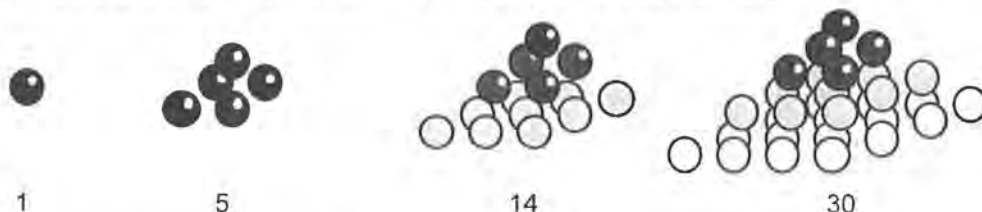
Parmi eux, en quatrième position, le nombre 10, la « tétrakis », nombre sacré dont la forme figurée servait de signe de reconnaissance à la secte des Pythagoriciens. Voici encore les premiers nombres pentagonaux :



Sur le même principe, on peut varier à l'infini en augmentant le nombre de côtés, et construire les nombres hexagonaux, heptagonaux etc.

Mais on peut aussi, comme dans l'exposition, utiliser des formes de l'espace. Nous connaissons tous les cubes (comme $2 \times 2 \times 2$ ou $3 \times 3 \times 3$), on peut également choisir d'autres solides, réguliers ou pas pour servir de modèles à de nouvelles familles de nombres figurés.

Voici par exemple les nombres pyramidaux, avec cette fois-ci des pyramides à base carrée :



ou encore les premiers nombres tétraédriques



A VOUS DE JOUER

Activité 1 : En triangle

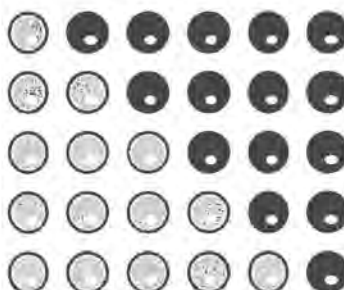
Observez attentivement cette figure.

Comment calculeriez-vous le 5e nombre triangulaire T5 ?

Et le centième, T100 ?

Sauriez-vous écrire une formule pour Tn ?

Combien vaut $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1000$?



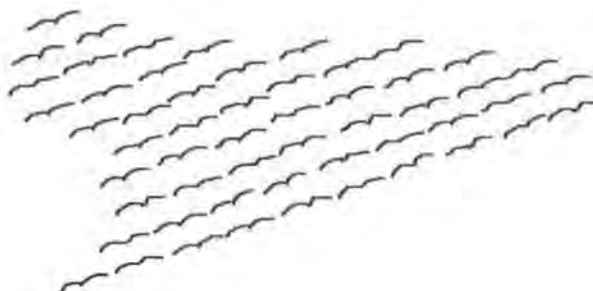
Activité 2

L'hirondelle Esquadrus est une espèce en voie de disparition. Elle a la particularité de ne pouvoir voler en groupe qu'en « escadrille », c'est-à-dire en formation dont chaque rang a un nombre d'oiseaux qui vaut exactement 1 de plus que le celui qui le précède.

Il ne reste au monde qu'environ 200 individus de cette espèce Esquadrus, qui viennent de quitter notre pays pour leur migration hivernale.

A leur départ, ces hirondelles ne formaient qu'une seule escadrille, mais peu après, elles se sont séparées en deux escadrilles.

Combien étaient-elles au départ ?





Un bilan ?

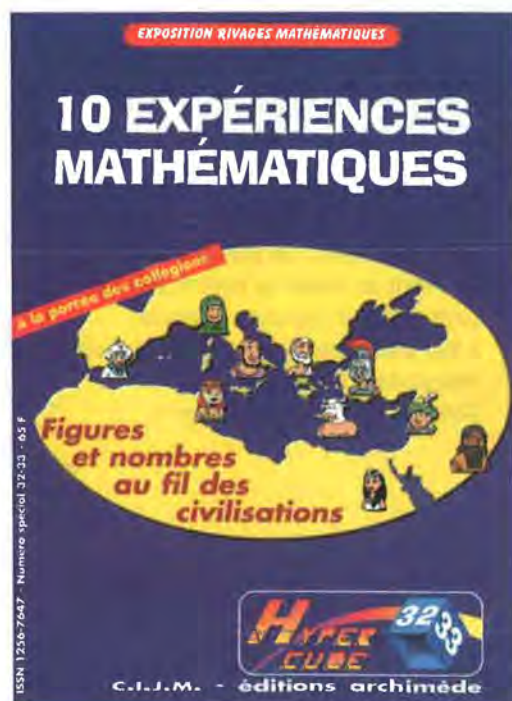
La participation au festival Science et Cité a exigé de gros efforts de la part des membres de la SENS, du SPES (Séminaire pédagogique de l'enseignement secondaire), de l'Institut de mathématiques de l'Université, de l'IRDP : trois personnes en permanence pour animer l'exposition, sur une semaine, de 8h à 21h, la préparation de fiches d'accompagnement, l'organisation de débats et, finalement la préparation et l'entretien du matériel.

Mais cet engagement a porté des fruits. C'est évident, pour tous ceux qui ont répondu aux

questions des visiteurs et qui ont pu les voir à l'action dans les postes de travail : l'un essayant de trouver la hauteur d'un poteau à l'aide d'une « croix de bûcheron » (Thalès), l'autre essayant d'équilibrer un objet sur le plateau d'une balance avec des masses marquées de 1, 3, 9 et 27 (Babylone), l'un cherchant à réaliser un grand puzzle carré sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle avec les pièces de deux carrés sur les côtés de l'angle droit (Pythagore)... Pour tous, il y avait le plaisir de donner du sens à des souvenirs bien estompés de son passé scolaire où les théorèmes n'étaient souvent que récités ou appliqués formellement.

Développer les liens entre la science et la cité, c'était l'objectif de ce festival gigantesque. Les mathématiques étant une discipline scientifiques, parmi d'autres, elles ont tout à gagner dans cette rencontre avec le citoyen, car celui-ci a aussi besoin d'elles, de plus en plus.

Photographies de Pierre Favre



Origami et solides de Platon

Daniël Odlet,
Collège de Delémont

Les orientations générales de la collection *Math 1P-4P*, des futurs moyens d'enseignement romands 5-6 aussi bien que 7-8-9 s'inspirent d'options pédagogiques et de conceptions d'apprentissage répertoriées en neuf fondements principaux.

Parmi ceux-ci, relevons-en deux, extraits de *Mathématiques 5e : d'une édition à l'autre*¹:

Fondement 1

Les finalités et les buts généraux de l'enseignement des mathématiques concernent l'acquisition de démarches de pensée et d'attitudes.

En conséquence, les moyens d'enseignement devront donc faciliter le développement de la personnalité et de la créativité de l'enfant et porter une attention soutenue à ses propres méthodes d'apprentissage.

Fondement 5

L'enseignement des mathématiques est à comprendre dans sa globalité. Il s'inscrit également dans une perspective interdisciplinaire.

1. *Mathématiques 5e : d'une édition à l'autre*, Michel Chastellain, François Jaquet, COROME

Globalité, interdisciplinarité, créativité... L'article qui suit se propose d'illustrer ces aspects de l'enseignement des mathématiques, à travers une incursion dans le monde de l'origami et des solides de Platon.

L'origami est l'art du pliage de papier. A partir d'un simple carré, il est surprenant de voir apparaître un animal, une forme géométrique, un personnage... Les possibilités sont pour ainsi dire infinies et en constante évolution. Les vertus de l'origami sont multiples: cet art développe notamment la précision et la dextérité, mais il exige surtout beaucoup de patience. Son origine est japonaise et remonte à deux mille ans.

Environ 400 ans auparavant, Platon, reprenant les travaux de Théétète d'Athènes (475 – 370 av. J.-C.) décrit cinq polyèdres réguliers et convexes. Euclide démontre, livre XIII des *Eléments*, que ces cinq-là – le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre – sont bien les seuls qui peuvent exister.

L'activité décrite ci-dessous peut évidemment servir d'introduction à différentes études.



Proposée à des élèves de neuvième année montrant de bonnes dispositions pour les mathématiques, les domaines d'exploitation qui ont été retenus et privilégiés sont les suivants: dessin de chaque solide et pour chacun d'eux représentation du nouveau solide obtenu en joignant les centres de chacune des faces, calcul du volume du solide dual au cube, au tétraèdre et à l'octaèdre.

Six périodes ont été nécessaires pour que chacun construise les cinq solides, sans compter beaucoup de temps à la maison pour les pliages, alors que le maître n'avait rien demandé de particulier.

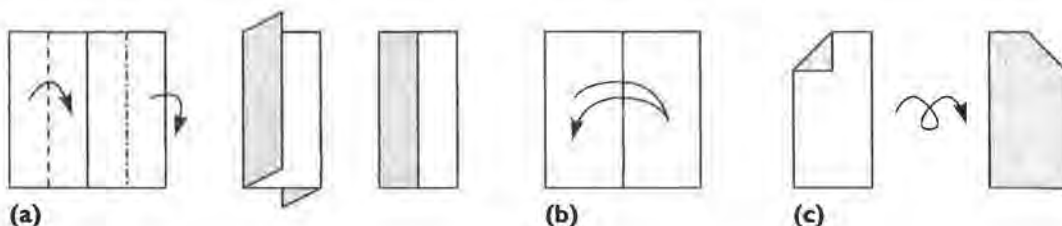
Tous les élèves se sont montrés particulièrement satisfaits du résultat obtenu, à un point

tel qu'ils étaient souvent très réticents à faire passer dans d'autres mains leurs constructions, de peur de les voir se détériorer!

Au terme des six périodes, ceux qui le désiraient ont pu procéder à une autoévaluation chiffrée de leur production, mise en commun avec l'évaluation du maître. La possibilité de comparer leur travail à d'autres a bien facilité les choses. Plusieurs élèves ont même été surpris de constater que leur note était plus sévère que celle du maître.

Le texte qui suit est illustré de photos de leurs constructions, alors que les schémas explicatifs des pliages ont été tirés d'un ouvrage mathématique américain².

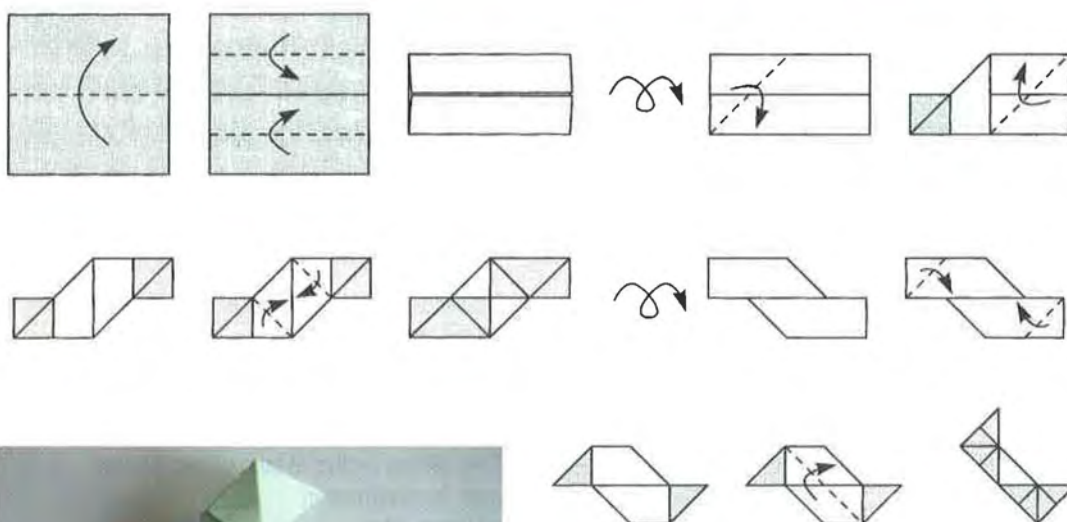
Les règles de pliage



- (a) pli vallée et pli montagne
- (b) marquer le pli
- (c) retourner

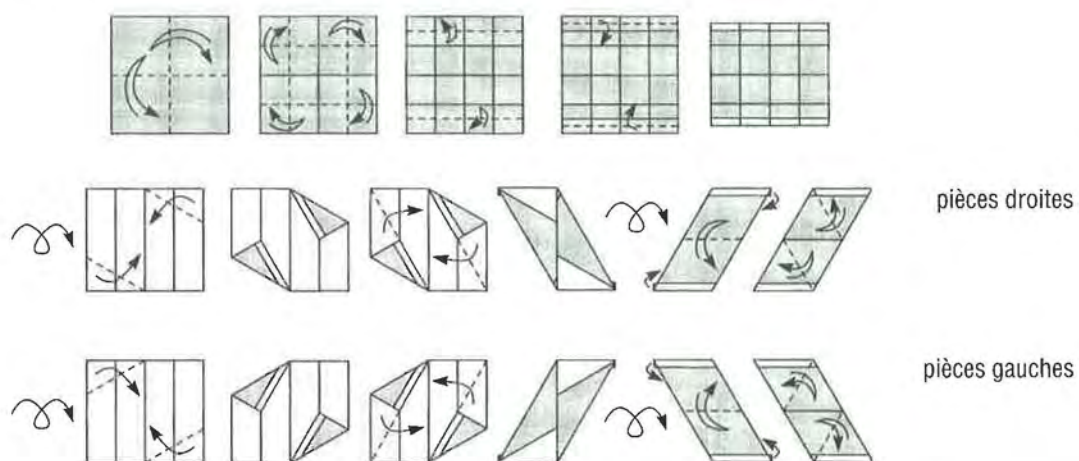
2. *Andrew Glassner's Notebook, Recreational Computer Graphics*, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, California

La construction du cube



12 pièces sont nécessaires à la construction.
Voici la manière de les assembler

La construction du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre.



Une pièce gauche et une pièce droite pour la construction du tétraèdre



Quatre pièces droites pour la construction de l'octaèdre



Cinq pièces droites et cinq pièces gauches pour la construction de l'icosaèdre.

L'assemblage des pièces pour...

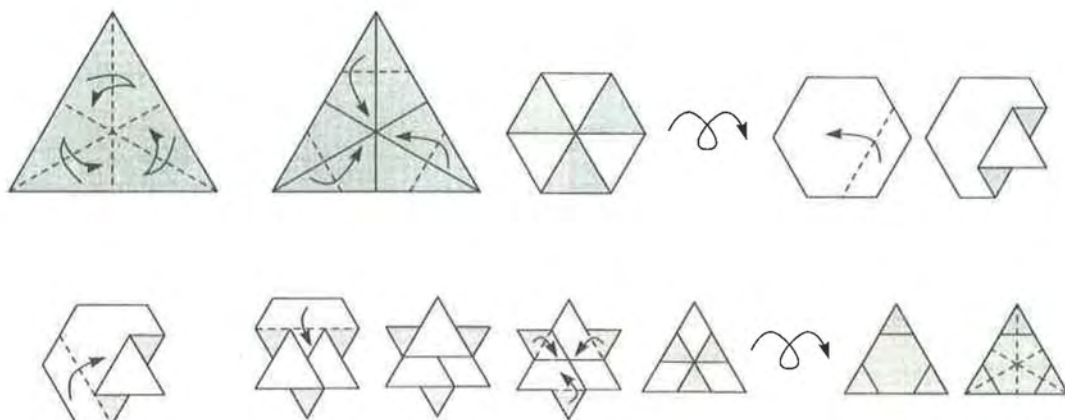


le tétraèdre



l'octaèdre et l'icosaèdre

La construction du dodécaèdre

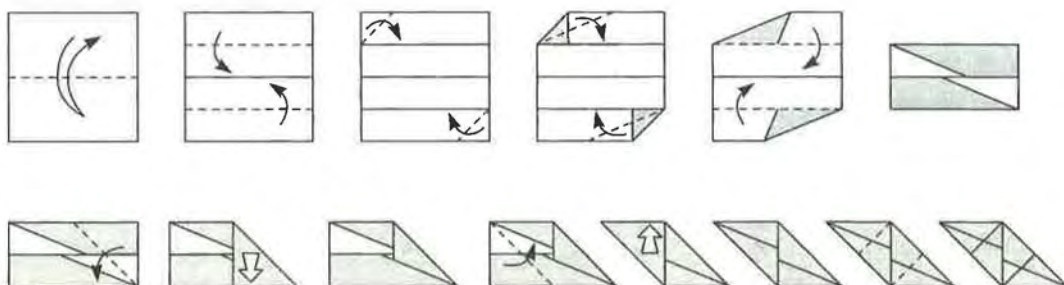


20 pièces sont nécessaires à la construction



Pour aller plus loin...

L'icosaèdre étoilé



L'assemblage des pièces:



Dualité icosaèdre-dodécaèdre



De jolis calculs permettent de déterminer la mesure à donner aux carrés permettant de construire l'icosaèdre et son dual le dodécaèdre.

Racines carrée et cubique

Antoine Gaggero, ECLF¹, Berne

Motivation

Suite à une discussion avec mes élèves, où il était question de savoir se débrouiller en toutes circonstances sans calculatrice, je fus mis au défi d'extraire une racine carrée sans calculatrice. Pour donner l'exemple ont-ils dit !!

En voici le résultat : une méthode d'extraction de la racine carrée et cubique avec un clin d'œil à un algorithme du début du siècle passé.

Ce texte a été utilisé en leçon avec des élèves très débrouilles de neuvième à l'exclusion des passages un peu abrupts réservés au maître. Ces passages sont indiqués par le symbole initial «[» et final «]».

Archéologie

En ce début de 21^{ème} siècle, prendre la racine carrée d'un nombre est une opération très banale. Le seul effort que nous devons faire, est de retrouver notre calculatrice!!

Il y a quarante ans, les étudiants devaient connaître la manipulation de la règle à calculer. Ensuite, estimer une racine carrée était une opération très simple.

Il y a septante ans, les étudiants ne disaient pas «calculer une racine carrée» mais «extraire une racine carrée», car effectivement le calcul avec crayon et papier est assez laborieux.

A la... racine de la méthode

Pour expliquer cette méthode, on ne considérera ici que des racines de nombres entiers. Le résultat sera un nombre entier laissant éventuellement un reste.

1. Si le nombre est compris entre 1 et 100, alors la partie entière de la racine carrée de ce nombre est un nombre entier compris entre 1 et 10.

2. Tout nombre est décomposable par l'identité en $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

En particulier, nous utiliserons ici l'identité associée à l'écriture d'un nombre en dizaines et unités, par exemple :

$$37^2 = (3 \times 10 + 7)^2 = 3^2 \times 10^2 + 2 \times 3 \times 10 \times 7 + 7^2$$

3. On partage le nombre donné en tranches de deux chiffres en commençant par la droite, car le carré d'un nombre à un chiffre est toujours un nombre à 1 ou 2 chiffres.

[Le “car” ci-dessus n’est pas suffisant pour cette justification. En effet, il faut démontrer que la partie de taille 10^{2n} du nombre dont on cherche la racine n’aura aucune influence sur la partie supérieure à 10^n de la racine. Une justification m’a été fournie par mon collègue A. Dalla Piazza et peut être obtenue sur demande.]

12	11	04	Résultat
----	----	----	----------

1. Ecole cantonale de langue française

4. Le but est de trouver le chiffre de gauche du nombre résultat. Il doit représenter le nombre g maximum pour lequel $g^2 \leq 12$. Ici, g représente le chiffre des centaines du résultat et vaut 3.
On soustrait 3^2 de 12.

12	11	04	3	Résultat
- 9				
3				

On abaisse la deuxième tranche, ici le 11, pour former le nombre 311.

12	11	04	3	Résultat
- 9				
311				

5. Le chiffre des centaines étant connu, on va rechercher le chiffre des dizaines. On approche le nombre 311 avec la formule de l'identité:
Il faut trouver d maximal tel que $(2 \times 3 \times 10 \times d + d^2) \leq 311$
On trouve que $d = 4$

12	11	04	3	Résultat
- 9				
311				
$2 \times 30 = 60$ $60 \times 5 + 5 \times 5 = 325 > 311$ $60 \times 4 + 4 \times 4 = 256 < 311$				

6. On soustrait 256 de 311 et on place le 4 comme chiffre des dizaines sur la ligne du résultat. On abaisse ensuite la dernière tranche, ici 04.

12	11	04	34	Résultat
- 9				
311				
-256				
5504				

7. On approche le nombre 5504 avec la formule de l'identité:
Il faut trouver u maximal tel que $(2 \times 34 \times 10 \times u + u^2) \leq 5504$
On trouve que $u = 8$

12	11	04	34	Résultat
- 9				
311				
-256				
5504				
$2 \times 340 = 680$ $680 \times 8 + 8 \times 8 = 5504$				

8. On soustrait 5504 à 5504 et on place le 8 comme chiffre des unités sur la ligne résultat.

12	11	04	348	Résultat
- 9				
311				
-256				
5504				
-5504				
0				

9. Le reste étant égal à 0, la racine carrée exacte de 121104 est 348, donc $\sqrt{121104} = 348$

Explications :

Effectuons le calcul $(3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 8)^2$ pour mieux suivre le raisonnement ci-dessus. En groupant les différents produits, on verra apparaître les nombres qui figurent dans le développement ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 (3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 8)^2 &= \\
 &= (3^2 \times 10^4) + (2 \times 3 \times 4 \times 10^3 + 4^2 \times 10^2) + \\
 &\quad + (2 \times 3 \times 8 \times 10^2) + (2 \times 4 \times 8 \times 10) + 8^2 \\
 &= 9 \times 10^4 + 256 \times 10^2 + 5504
 \end{aligned}$$

On retrouvera ces nombres dans l'étape 8 ci-dessus.

Voici un autre exemple résolu :

$\begin{array}{r} \sqrt{3\ 80\ 25} \\ - 1 \\ \hline 280 \\ - 261 \\ \hline 1925 \\ - 1925 \\ \hline 0 \end{array}$	<table border="0"> <tr> <th style="text-align: left;">195</th> <th style="text-align: left;">Résultat</th> </tr> <tr> <td>$2^2 \cdot 10 = 20$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$20^2 \cdot 9 + 9^2 = 261$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$2^2 \cdot 190 = 380$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$380^2 \cdot 5 + 5^2 = 1925$</td> <td></td> </tr> </table>	195	Résultat	$2^2 \cdot 10 = 20$		$20^2 \cdot 9 + 9^2 = 261$		$2^2 \cdot 190 = 380$		$380^2 \cdot 5 + 5^2 = 1925$	
195	Résultat										
$2^2 \cdot 10 = 20$											
$20^2 \cdot 9 + 9^2 = 261$											
$2^2 \cdot 190 = 380$											
$380^2 \cdot 5 + 5^2 = 1925$											

Avec une disposition plus classique :

$\begin{array}{r} \sqrt{22\ 37\ 29} \\ - 16 \\ \hline 637 \\ - 609 \\ \hline 2829 \\ - 2829 \\ \hline 0 \end{array}$	<table border="0"> <tr> <th style="text-align: left;">473</th> <th style="text-align: left;">Résultat</th> </tr> <tr> <td>87</td> <td>943</td> </tr> <tr> <td>$\times 7$</td> <td>$\times 3$</td> </tr> <tr> <td>609</td> <td>2829</td> </tr> </table>	473	Résultat	87	943	$\times 7$	$\times 3$	609	2829
473	Résultat								
87	943								
$\times 7$	$\times 3$								
609	2829								

[Abordons un exemple à l'envers :

$$\begin{aligned}
 22\ 37\ 41 &= 220000 + 3741 \\
 &= 160000 + 60000 + 3741 \\
 &= 4^2 \times 10^4 + 63700 + 41 \\
 &= 4^2 \times 10^4 + 60900 + 2800 + 41 \\
 &= 4^2 \times 10^4 + (2 \times 4 \times 10 \times 7 + 7^2) \times 10^2 + 2841 \\
 &= 4^2 \times 10^4 + (2 \times 4 \times 10^2 \times 7 \times 10 + 7^2 \times 10^2) + 2829 + 12 \\
 &= (4 \times 10^2)^2 + (2 \times 4 \times 10^2 \times 7 \times 10 + (7 \times 10)^2) + 2829 + 12 \\
 &= (4 \times 10^2)^2 + (2 \times 4 \times 10^2 \times 7 \times 10 + (7 \times 10)^2) + (2 \times 47 \times 10 \times 3 + 3^2) + 12 \\
 &= (4 \times 10^2)^2 + (2 \times 4 \times 10^2 \times 7 \times 10 + (7 \times 10)^2) + (2 \times 4 \times 10^2 \times 3 + 2 \times 7 \times 10 \times 3 + 3^2) + 12 \\
 &= (4 \times 10^2 + 7 \times 10 + 3)^2 + 12 \\
 &= 473^2 + 12
 \end{aligned}$$

On s'est guidé sur le développement précédent. Mais c'est possible, sans être facile avec un autre nombre!!!]

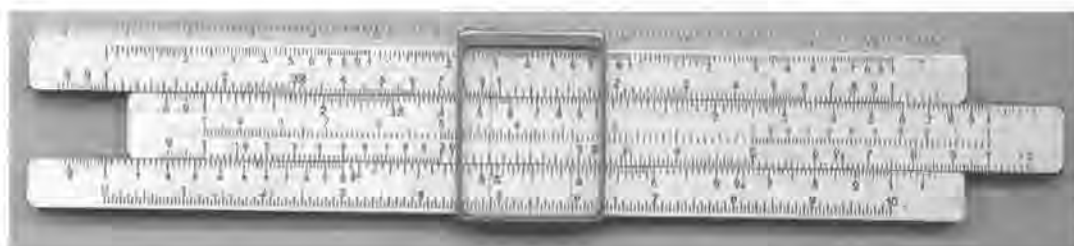
A toi de jouer!!!

- Extrais les racines carrées des nombres 61009 293764 12321
- Formule ta propre règle d'extraction de la racine carrée. Teste-la avec un camarade!
- Complète ta règle pour extraire la racine carrée d'un nombre décimal, comme par exemple : 2937,64 ; 156,25.
- Si tu te sens d'attaque, découvre la méthode de la racine cubique. Celle-ci est basée sur un raisonnement similaire à celui de la racine carrée.

Règle pour extraire la racine carrée d'un nombre trouvée dans un manuel de mathématique de 1930 et reportée ici mot à mot :

- On partage ce nombre en tranches de deux chiffres à partir des unités. La première tranche de gauche peut avoir un seul chiffre.

- On extrait la racine du plus grand carré contenu dans le nombre formé dans cette première tranche, et l'on a le premier chiffre de la racine. On soustrait de ce nombre le carré du chiffre trouvé, et à côté du reste on écrit la deuxième tranche, dont on sépare par un point le dernier chiffre à droite.



- On divise le nombre placé à gauche de ce chiffre par le double de la racine trouvée. Le quotient est le deuxième chiffre de la racine, ou un chiffre trop fort! On l'essaie. Pour cela, on l'écrit à la droite du double de la racine déjà trouvée, et on le multiplie par le nombre ainsi formé. Si ce produit peut se retrancher du nombre formé par le premier reste suivi de la deuxième tranche, le chiffre est exact. Sinon il faut le diminuer successivement d'une unité jusqu'à ce que la soustraction soit possible.
- A côté du deuxième reste, on écrit la troisième tranche dont on sépare le dernier chiffre par un point. On divise le nombre placé à gauche de ce chiffre par le double de la racine déjà trouvée. Le quotient est le troisième chiffre de la racine, ou un chiffre trop fort! On l'essaie comme il a été dit précédemment.
- Si le reste de l'opération est nul, la racine est exacte, sinon elle est approchée à son unité.

[Pour le sport, je vous propose l'algorithme du début du siècle passé ci-après pour chercher la racine cubique d'un nombre donné. Bien entendu, vous pouvez obtenir un développement circonstancié en me faisant parvenir votre requête par e-mail, gaggero@bluewin.ch.]

Règle pour extraire la racine cubique d'un nombre trouvée dans un manuel de mathématique de 1930 et reportée ici mot à mot:

- On partage ce nombre en tranches de trois chiffres à partir des unités. La première

tranche de gauche peut avoir un seul ou deux chiffres.

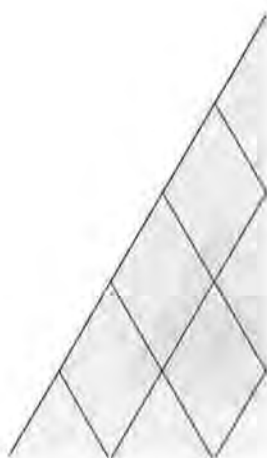
- On extrait la racine du plus grand cube contenu dans le nombre formé dans cette première tranche, et l'on a le premier chiffre de la racine. On soustrait de ce nombre le cube du chiffre trouvé, et à côté du reste on écrit la deuxième tranche, dont on sépare par un point les deux derniers chiffres à droite.
- On divise le nombre placé à gauche du point par le triple carré de la racine trouvée. Le quotient est le deuxième chiffre de la racine, ou un chiffre trop fort! On l'essaie. Pour cela, on ajoute ensemble le triple carré des dizaines par les unités, le triple des dizaines par le carré des unités et le cube des unités. Si cette somme peut se soustraire du nombre formé par le premier reste suivi de la deuxième tranche, le chiffre est exact. Sinon il faut le diminuer successivement d'une unité jusqu'à ce que la soustraction soit possible.
- A côté du deuxième reste, on écrit la troisième tranche dont on sépare les deux derniers chiffres à droite par un point. On divise le nombre placé à gauche de ce point par le triple carré de la racine déjà trouvée. Le quotient est le troisième chiffre de la racine, ou un chiffre trop fort! On l'essaie comme il a été dit précédemment.
- Si le reste de l'opération est nul, la racine cubique est exacte, sinon elle est approchée à son unité.

Parcours et détours 2: les labyrinthes géométriques

G. Sarcone, M. J. Waerber

«Le labyrinthe des chiffres qui peuplent le calendrier» (G.S.)

Dans notre précédent article*, nous avons visité de fond en comble les différents aspects des labyrinthes (leur histoire, comment les résoudre, leurs liens avec les mathématiques, etc.). Cette fois-ci, nous étudierons une façon originale de les «fabriquer» et traiterons des pavages labyrinthiques.



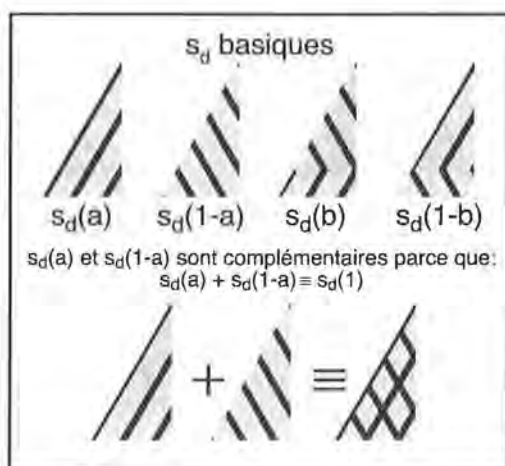
Intégrale: $s_d(1)$

Figure 1

* Voir *Math-Ecole* numéro 196

Remontons à la source du labyrinthe géométrique et cherchons le module le plus simple qui puisse nous permettre, par assemblage, de construire aisément un labyrinthe. Nous en avons déniché un, que nous avons appelé «singulabyrion». Un singulabyrion est un élément graphico-formel triangulaire, le plus souvent un triangle rectangle, qui, assemblé avec un autre singulabyrion, forme une cellule. A leur tour, les cellules, au moins quatre, forment un motif de base qui, à son tour... Je crois que nous nous arrêterons là. Voilà, le reste vous l'apprendrez dans les pages qui suivent. Ne vous souciez pas trop des formules que vous rencontrerez, attachez-vous plutôt à comprendre le mécanisme général de la formation d'un labyrinthe géométrique.

Un «singulabyrion» d'ordre $s_d = [3]$ est un élément triangulaire – le plus simple – d'un labyrinthe géométrique. Il est composé d'un réseau diagonal interne de 15 segments subdivisant ses côtés en trois parties (fig.1). Il existe en tout 32'766 combinaisons graphiques du singulabyrion $s_d = [3]$ dont voici ci-dessous les plus remarquables (voir encadré).



©98, Sarcone & Waerber, Lausanne

Bien qu'il existe 6 façons distinctes d'assembler deux singulabyrions s_d , nous n'en retiendrons que trois (voir fig. 2). Par convention, un assemblage de deux s_d forme une cellule T (T comme *tile*, «pièce d'assemblage» en anglais) prédéfinie.

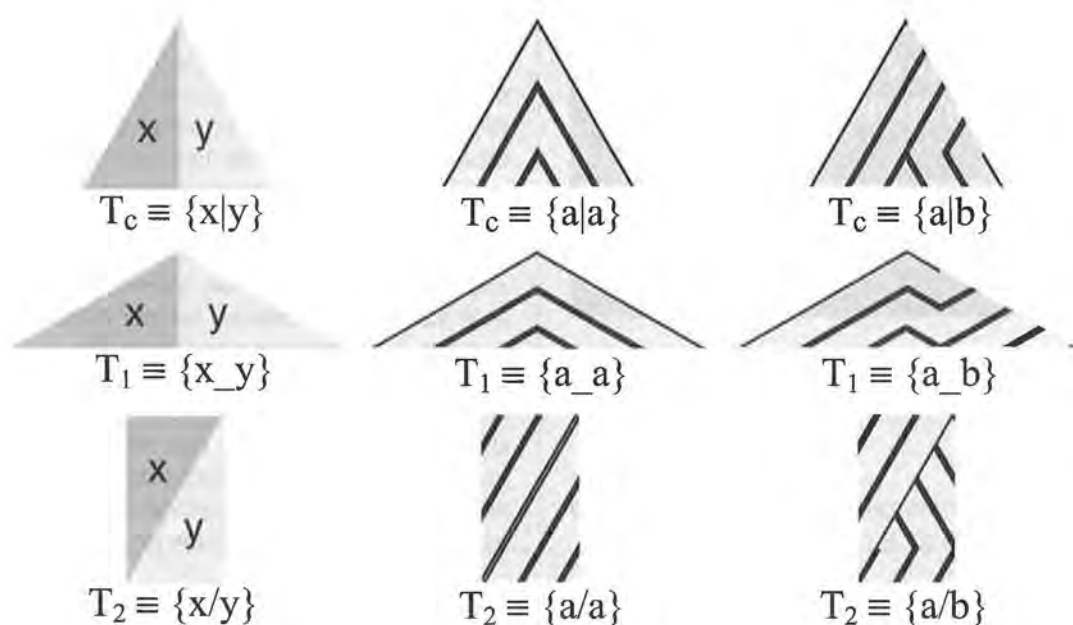
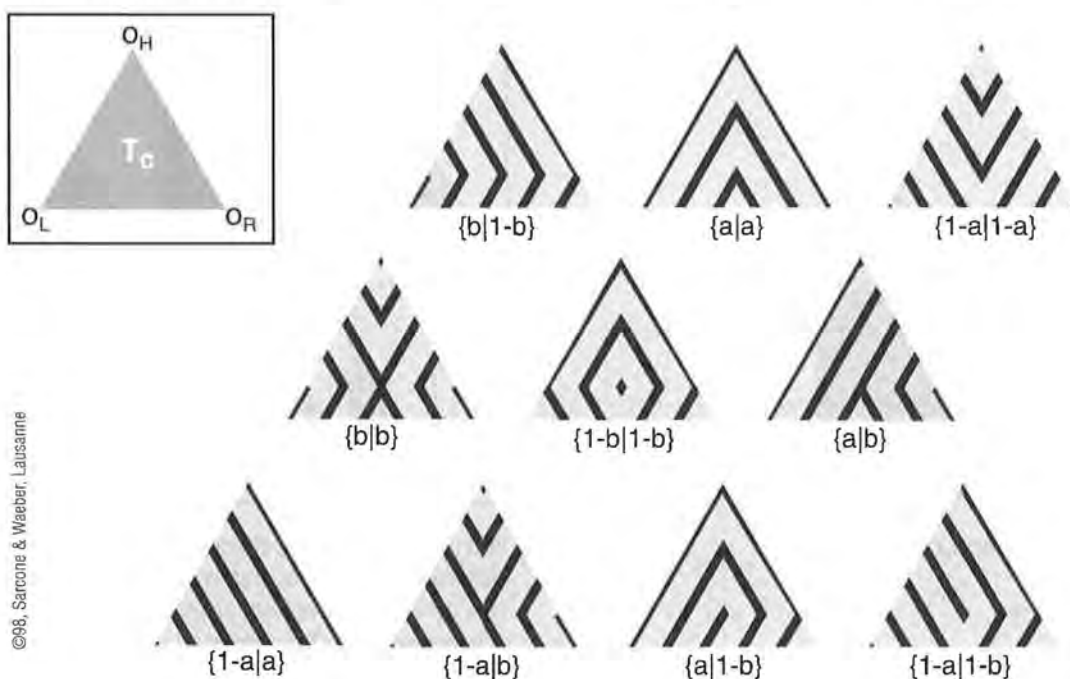


Figure 2

Sont représentées ci-dessous les 10 différentes cellules triangulaires dites « canoniques » (T_c) que l'on peut composer avec les 4 s_d basiques.



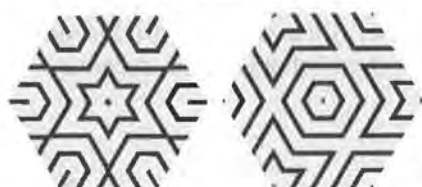
Par rotation, réflexion et translation d'une ou plusieurs cellules T_c , nous obtenons un motif P (*pattern*, en anglais).

Motifs P réguliers :

6 . (b 1-b)	Par le point O_L	Par le point O_H	Par le point O_R
Rotation			
Symétrie axiale			

Nous pouvons distinguer en gros trois sortes de motifs P :

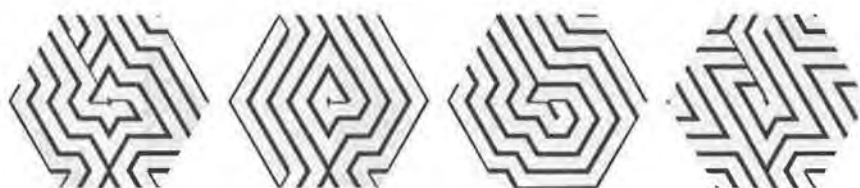
Motifs kaléidoscopiques



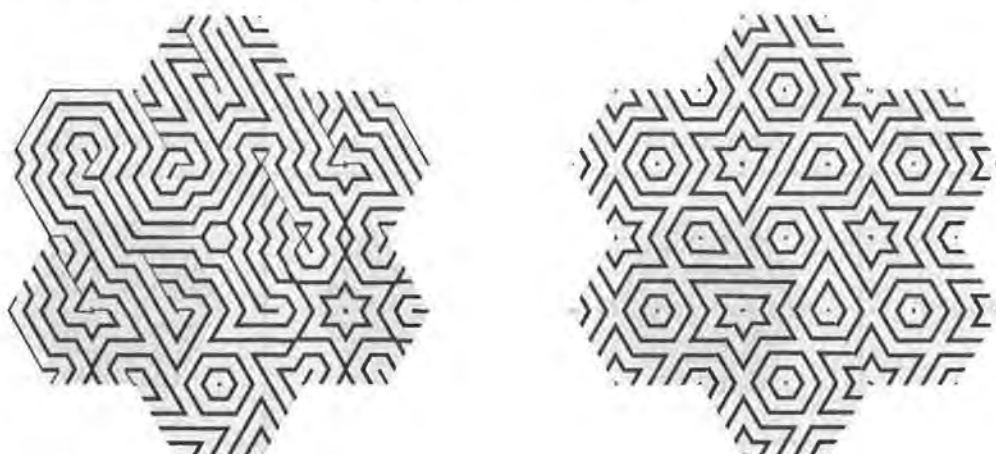
Motifs en spirales



Motifs à méandres



Voici deux sortes de « noyaux » labyrinthiques composés de 7 motifs P :



©98, Sarrone & Waerber, Lausanne

Transformations d'un « noyau » labyrinthique par glissements :



Un « singulabyrion » d'ordre $s_0=[3]$ est un élément triangulaire composé d'un réseau **orthogonal** interne de 12 segments subdivisant ses côtés en **trois parties** (fig.3). Il existe en tout 4'094 représentations graphiques du singulabyrion $s_0=[3]$ dont voici quelques échantillons ci-dessous.

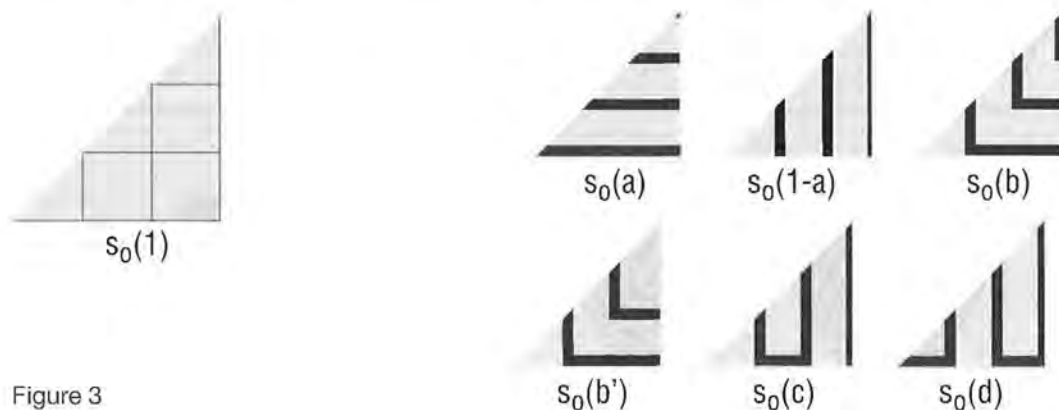
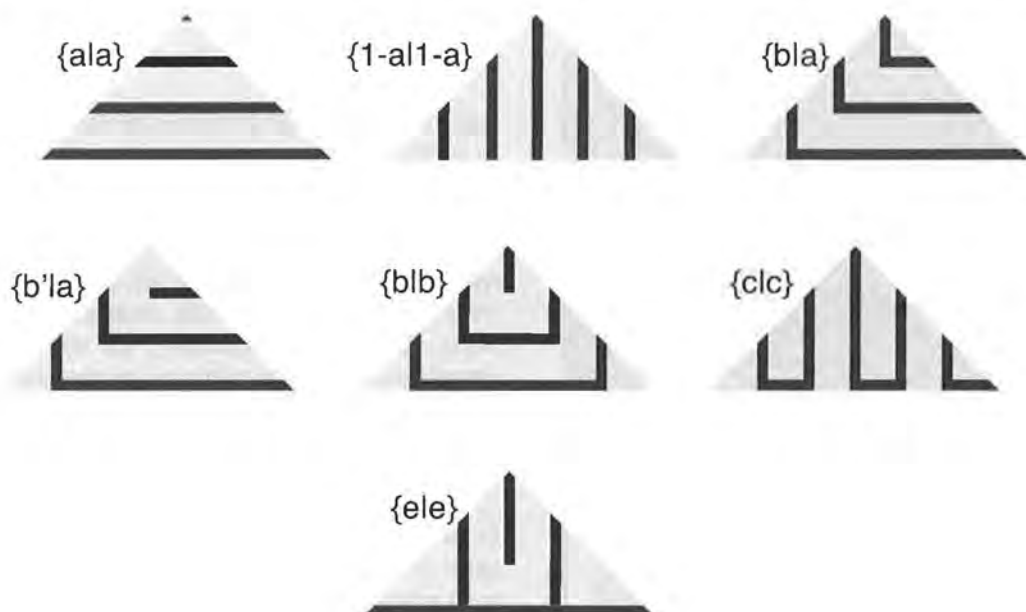
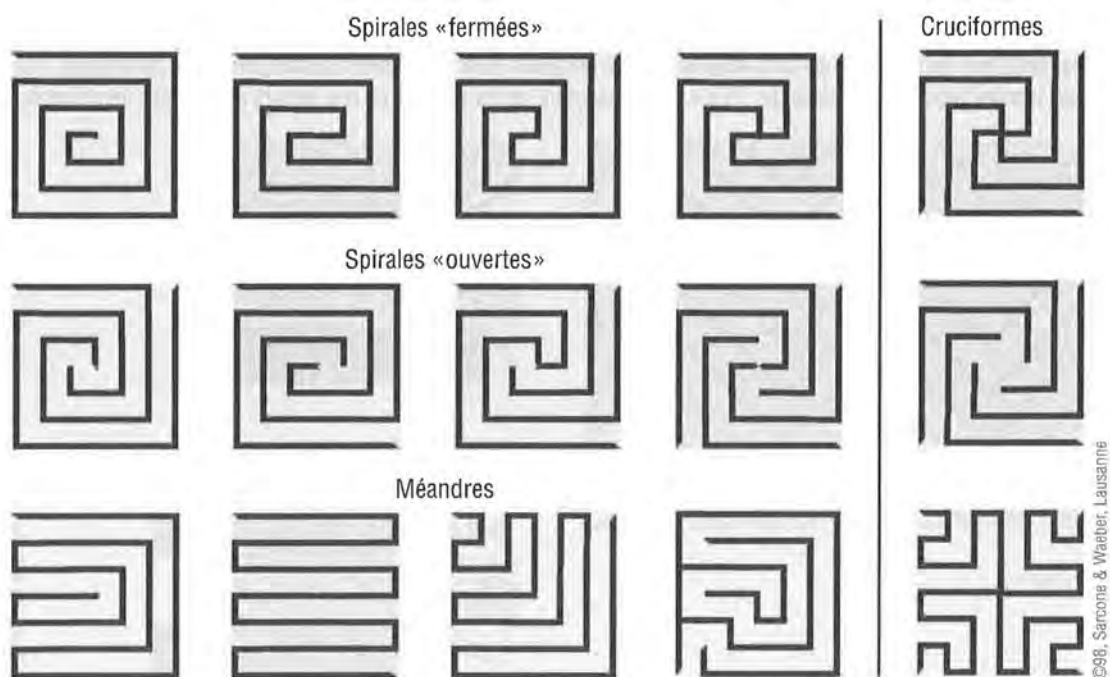


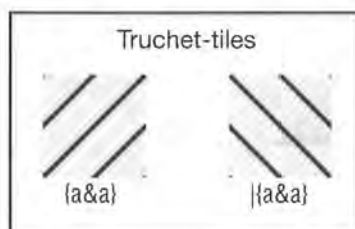
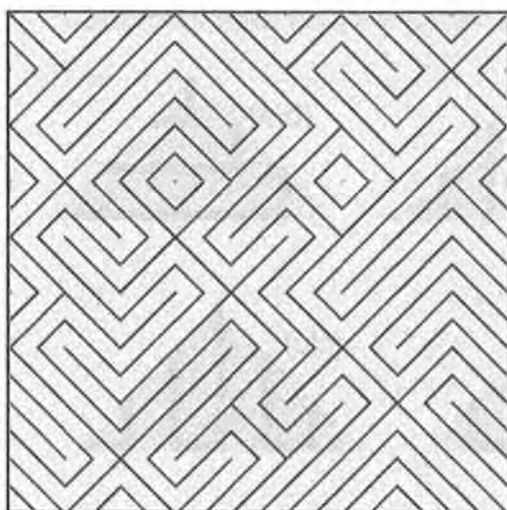
Figure 3

A l'instar des basiques s_d , nous pouvons composer avec les singulabyrions s_o des cellules triangulaires (T').



Par rotation, réflexion et translation d'une ou plusieurs cellules T' , nous obtenons ici un motif de base carrée (P').





Quand la complexité naît de modules élémentaires... La surface labyrinthique ci-contre est construite à partir d'une simple cellule T' $\{a\&a\}$ composée de singulabyrions d'ordre $s_0=[2]$. Ce genre de cellules carrées, ne comportant que des diagonales, se nomme également *Truchet-tile* (de leur découvreur: père Sébastien Truchet, inventeur entre autres du point typographique!). La répétition «modulée», aléatoire ou rythmique de deux combinaisons d'un même élément simple crée toujours une image globale très complexe.

Si l'on substituait la cellule $\{a\&a\}$ par le chiffre 1 et la cellule $| \{a\&a\}$ par 0, nous obtiendrions une matrice binaire >>>

```
011001001
111000010
011011011
100110110
001011110
```

...

Avec les *Truchet-tiles* que nous avons étudiés, vous pouvez composer une texture régulière et répétitive, dite «rythmique» (voir fig. 4). Mais si l'on déplace par glissement une ou plusieurs de ses rangées, elle fait alors apparaître des entrelacs qui évoquent certains dessins stylisés celtiques. Avec ces mêmes *Truchet-tiles*, il est possible de réaliser une texture plus complexe (fig. 5) qui, par glissement, se transforme en une texture encore plus inextricable.



Figure 4



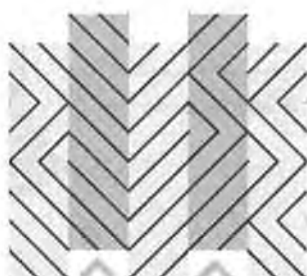
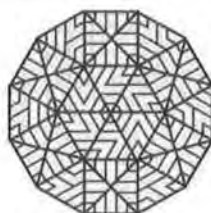
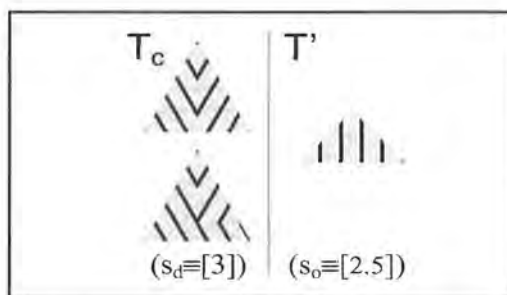


Figure 5

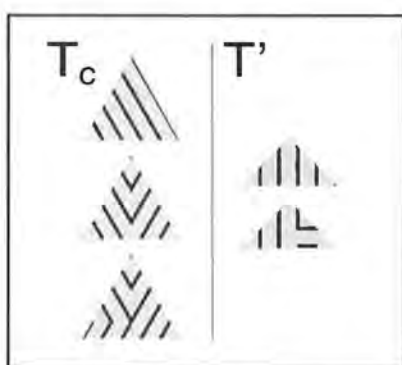
©98, Sarcione & Waerber, Lausanne

Nous avons vu que nous pouvions moduler des cellules en un nombre presque infini de combinaisons pour créer des labyrinthes suggestifs et compliqués. Mais il est également possible de combiner des cellules composées de singulabyrions d'ordres différents. Nous pouvons joindre deux cellules T_c et T' ayant un ordre $s_d \equiv [3]$ et $s_o \equiv [2.5]$, par exemple, et créer en modulant ces pièces des labyrinthes géométriques toujours plus complexes.

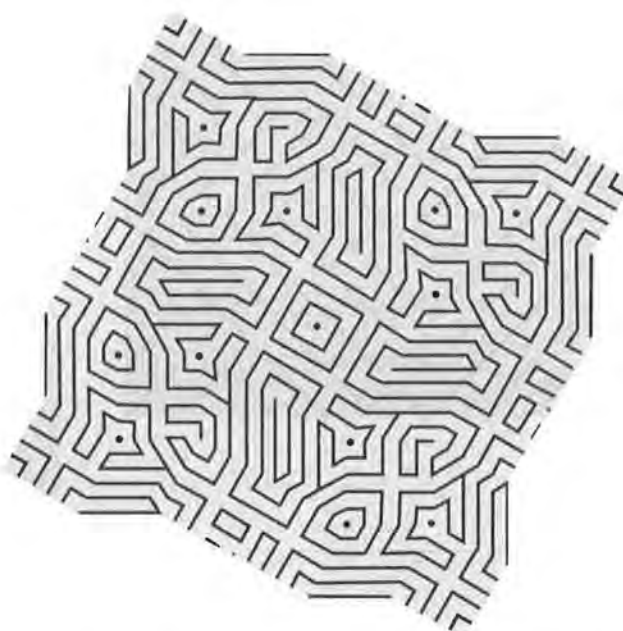


Les côtés apparents forment un réseau

Les labyrinthes géométriques formés avec des cellules T_c et T' peuvent servir de modèles pour l'aménagement de jardins et espaces publics à thèmes.



Cellules utilisées pour le labyrinthe >>>



©98, Sarcone & Waerber, Lausanne

Pour parachever le thème, voici encore une méthode originale pour élaborer des labyrinthes géométriques: la méthode du « patch ». Il s'agit d'appliquer à un motif comportant des polygones concentriques des « patches » reproduisant partiellement le motif concerné en les disposant de sorte à « casser » l'uniformité ou la symétrie du premier (fig. 6).

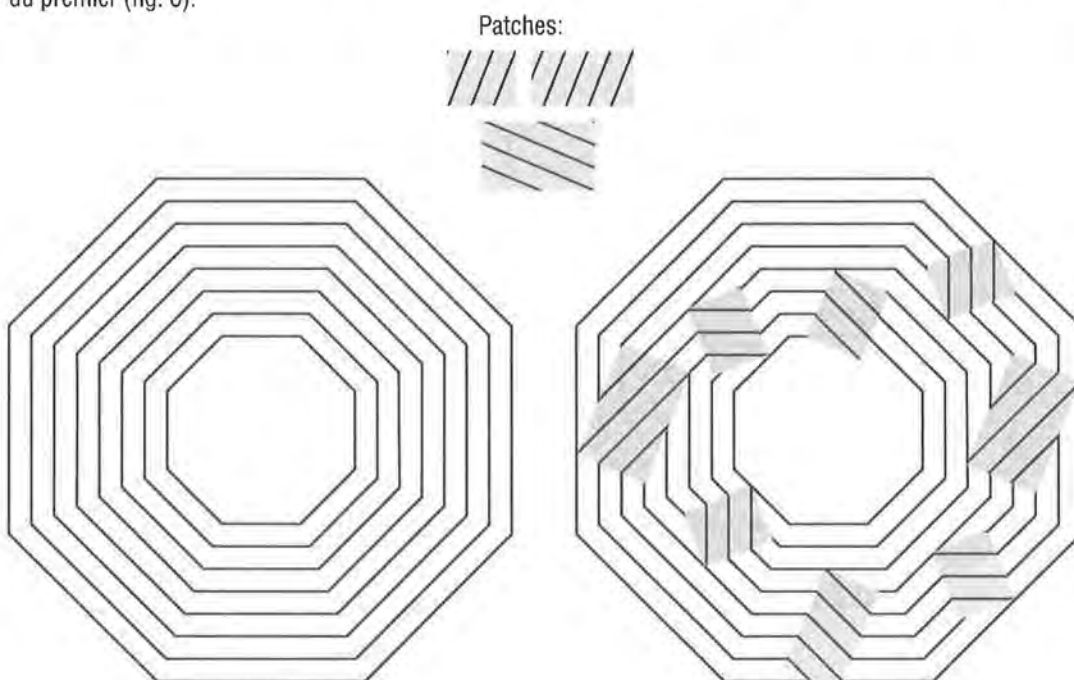
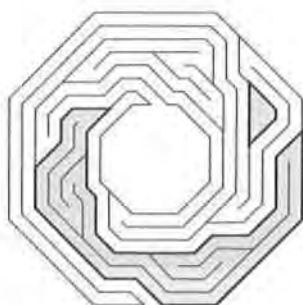
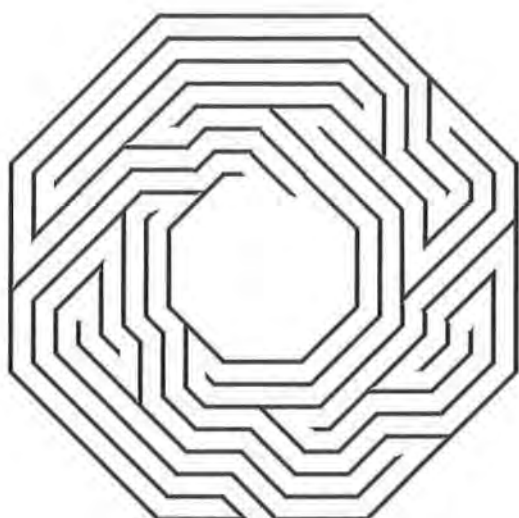
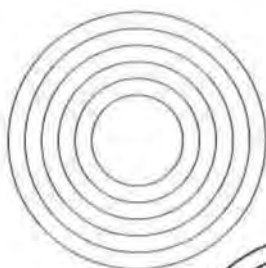


Figure 6



Lors de la mise au net, il faudra vérifier que le labyrinthe ne comporte pas trop de boucles fermées ou de parcours « orphelins » (en gris sur l'image ci-dessus). A partir de là, tout est permis... Essayez toutefois de conserver une certaine régularité au dessin (voir exemples ci-dessous).



9e RMT, la finale

La Finale romande du neuvième rallye mathématique transalpin s'est déroulée le 16 mai 2001, à l'école cantonale de langue française (ECLF) de Berne. 25 classes étaient réunies sur les 250 ayant participé aux deux épreuves précédentes. On aurait aimé en sélectionner plus, mais, 550 élèves est une masse critique à ne pas dépasser.

Une organisation de professionnels

Le programme d'une finale est quasi immuable, que l'on soit en Suisse romande ou dans d'autres régions. Il faut faire vite car les classes viennent souvent de loin et les trains n'attendent pas, les copies doivent être corrigées rapidement, pendant le goûter, car la distribution des prix ne peut se faire trop attendre. Il y a donc tout un travail de préparation pour les animateurs et les organisateurs locaux: répartition des classes, épreuves, critères d'analyses, liste des résultats. Nos collègues de l'ECLF n'en sont pas à leur première expérience, ils ont parfaitement dominé leur matière. Voyons plutôt:

- Réception des classes, dès 13h30.
- A 13h45, les élèves se rendent dans les salles prévues, sous la conduite de leur maître. Celui-ci donne les consignes habituelles (règles du rallye, respect du matériel, prière de ne rien déranger et de remettre

les salles dans l'état où elles étaient auparavant).

- A 13h55, les maîtres quittent leurs élèves, les classes reçoivent les énoncés des problèmes.
- Les élèves sont seuls, les portes des classes restent ouvertes, un surveillant par étage exerce un contrôle discret de la régularité de l'épreuve. Les visiteurs et maîtres peuvent passer de salle en salle sans déranger les élèves ni intervenir.
- A 14h35 on annonce aux classes qu'il reste 10 minutes pour rédiger leurs solutions.
- L'épreuve se termine à 14h45. Les maîtres retrouvent leurs élèves et les conduisent dans le préau, après avoir vérifié que les salles sont dans l'état où elles étaient à l'arrivée.
- Une boisson et un goûter léger sont offerts aux élèves, de 14h45 à 15h15, pendant la correction des épreuves.
- Proclamation des résultats et distribution des prix à 15h30.
- Fin de la rencontre: 16h00.

De beaux problèmes

Le RMT, c'est l'engagement, le travail en groupe, le plaisir, le défi, tout ceci sur un fond de résolution de problèmes. Ceux-ci ne peuvent être médiocres ou ennuyeux; on les veut inédits, plaisants, engageants, résistants et surtout, riches en contenus mathématiques. Leur préparation a demandé des heures d'analyses a priori, d'échanges, de consultations entre toutes les équipes régionales ou nationales qui animent le RMT. Voici ceux sur lesquels nos finalistes se sont fait les dents, à Berne comme à Bourg en Bresse, au Luxembourg, dans une dizaine de villes d'Italie, à Prague et en Israël.

1. Les jetons (Cat. 3)

Antoine a 30 jetons à répartir dans des boîtes. Deux boîtes sont rouges et trois sont bleues.

Il veut qu'il y ait le même nombre de jetons dans les boîtes de même couleur.

Trouvez et indiquez toutes les façons possibles de répartir tous les jetons dans les boîtes.

2. Rectangles! (Cat. 3, 4)

Jean a fait ce dessin qu'il a intitulé *Rectangle*.



Julie lui dit qu'il faut mettre un «s» au mot «*Rectangle*» car il y en a plusieurs et, en regardant bien, on peut en voir beaucoup.

Combien peut-on voir de rectangles sur ce dessin ?

Expliquez votre réponse.

3. La combinaison du coffre (Cat. 3, 4)

Paperone se trouve devant son coffre-fort. Il a oublié la combinaison qui permet d'ouvrir le coffre mais il se souvient :

- que c'est un nombre de 3 chiffres,
- que ce nombre est plus grand que 400,
- qu'il ne contient pas de 0,
- que le chiffre des unités vaut la moitié du chiffre des centaines.

Paperone est patient, et il décide d'essayer tous les nombres de ce genre.

Combien de nombres devra-t-il essayer pour être sûr de pouvoir ouvrir son coffre ?

Ecrivez-les tous.

4. Nettoyage (Cat. 3, 4, 5)

Les 18 élèves de la classe de Berthe et les 24 élèves de la classe de Gédéon ont nettoyé la place du village et les rives du ruisseau.

Le boulanger, très content, leur apporte 14 gros paquets de biscuits pour les remercier. Berthe propose que chaque classe prenne 7 paquets.

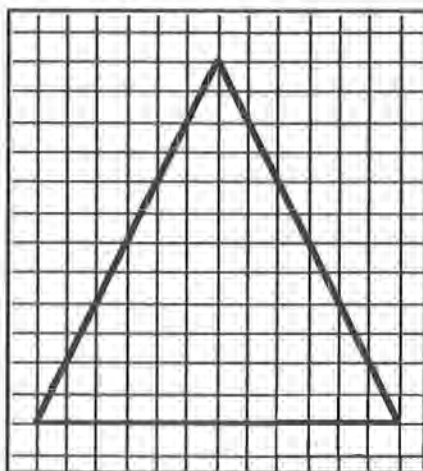
Gédéon dit que ce n'est pas juste car il y a plus d'élèves dans sa classe.

Combien de paquets chaque classe doit-elle recevoir pour que le partage soit équitable ?

Expliquez votre raisonnement.

5. Sapins de Noël (Cat. 3, 4, 5)

Dans une feuille quadrillée carrée, de 30 carreaux de côté, on découpe des triangles isocèles tous identiques pour fabriquer des sapins de Noël.



Comme le montre le dessin, chaque sapin a une base de 12 unités et une hauteur de 12 unités (l'unité est le côté d'un carreau du quadrillage).

Combien de sapins entiers peut-on découper dans la feuille ?

Combien pourrait-on encore fabriquer de sapins en découpant ou en assemblant les morceaux restants ?

6. La collection de timbres (Cat. 4, 5, 6)

Pierre a 45 timbres, en partie italiens et en partie français. Il veut commencer une collection de timbres italiens seulement. Il décide alors de se faire donner des timbres italiens en échange de ses timbres français par son ami André, qui collectionne des timbres du monde entier. Ils se mettent d'accord sur la règle d'échange suivante :

3 timbres français contre 5 timbres italiens.

A la fin des échanges, Pierre est satisfait. Il possède 51 timbres, tous italiens.

Combien de timbres français avait-il dans sa collection au départ ?

Expliquez votre raisonnement

7. Une étrange calculatrice (Cat. 4, 5, 6)

Une étrange calculatrice ne permet que de multiplier par 2 ou de soustraire 2.

L'écran de la calculatrice affiche actuellement le nombre 15.

Quel est le nombre minimum d'opérations à effectuer pour obtenir le nombre 200, à partir du nombre 15 ?

Donnez le détail de vos opérations.

8. Le Château (Cat. 5, 6)

Le roi veut embellir son château : il veut faire poser, dans le couloir, des dalles carrées toutes pareilles.

Il peut choisir parmi trois sortes de dalles :

- des petites dalles de 20 cm de côté,
- des dalles moyennes de 25 cm de côté,
- des grandes dalles de 30 cm de côté.

Il s'aperçoit qu'il peut faire poser soit des petites dalles, soit des dalles moyennes, soit des grandes dalles, tout le long de son couloir : dans tous les cas, le couloir sera exactement recouvert, par des dalles toutes pareilles.

On sait aussi que pour parcourir la longueur du couloir, le roi fait 10 pas réguliers d'un peu moins d'un mètre.

Quelle est la longueur du couloir du château ? Justifiez votre réponse.

9. La fermeture du bar (Cat. 5, 6)

C'est la fermeture du bar. Il faut balayer le sol. Le barman a mis les chaises et les tabourets sur les tables.

Dans le bar, il y a :

- 3 tables carrées, qui ont chacune 4 pieds,
- des tables rondes, qui ont chacune un seul pied central,
- des chaises, qui ont chacune 4 pieds,
- des tabourets, qui ont chacun 3 pieds.

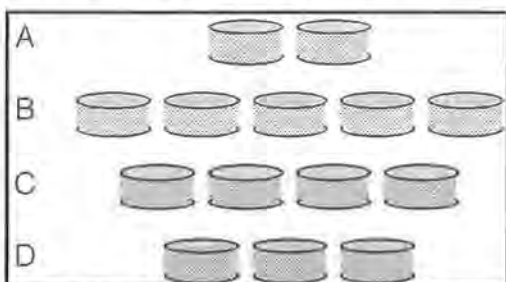
Sur chaque table carrée, il y a 4 chaises. Sur l'une des tables rondes, il y a 2 tabourets. Sur chacune des autres tables rondes, il y a 2 chaises.

Le barman compte les pieds des tables, des chaises, et des tabourets : il en trouve 94 au total.

Combien y a-t-il de tables en tout dans le bar ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

10. Les œufs d'Anastasia (Cat. 5, 6, 7)



Voici les quatre lignes de nids où, chaque semaine, la poule Anastasia pond ses œufs selon les règles suivantes :

- un œuf chaque jour du lundi au samedi et deux le dimanche,
- chaque semaine, un œuf au moins sur chaque ligne,
- jamais plus d'un œuf par nid,
- jamais une ligne de nids entièrement remplie.

A la fin de la semaine, le nombre d'œufs de chaque ligne, dans l'ordre A, B, C, D, permet de former un nombre de quatre chiffres. (Par exemple, si Anastasia a pondu 1 œuf sur la ligne A, 3 œufs sur la ligne B, 2 œufs sur la ligne C et 2 œufs sur la ligne D, le nombre formé est 1322.)

Quels sont tous les nombres qu'on peut obtenir en une semaine avec les œufs d'Anastasia ?

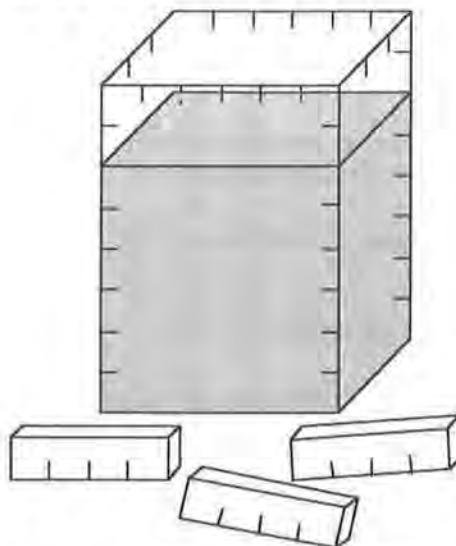
Indiquez comment vous avez trouvé ces nombres.

11. A ras le bord (Cat. 6, 7)

Marina a une belle boîte de plastique transparente qu'elle a rempli d'eau jusqu'à la sixième graduation. Elle y plonge maintenant des petites briques, une à une, comme celles qui sont représentées sur le dessin et qui vont se déposer au fond du récipient.

A un certain moment, elle se rend compte que

si elle ajoutait encore une brique, l'eau déborderait de la boîte.



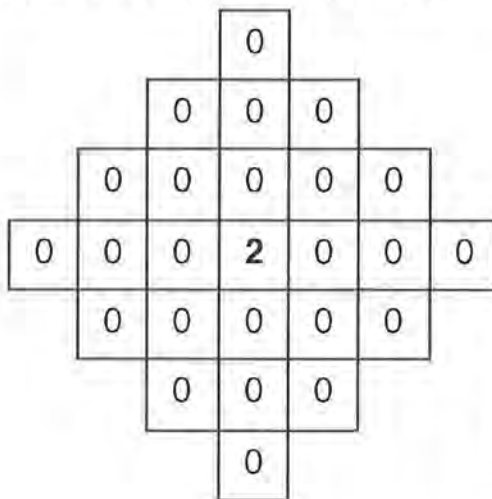
Combien de briques a-t-elle mis dans la boîte ?

Expliquez votre réponse.

(Les dimensions de la boîte et les briques de la figure sont des nombres entiers d'unités, indiqués par les graduations sur le dessin.)

12. L'année passée (Cat. 6, 7, 8)

Partez de la case contenant le chiffre 2.



Déplacez-vous trois fois d'une case, horizontalement ou verticalement, sans jamais revenir sur vos pas.

Notez, les chiffres des cases de votre chemin.

Combien de chemins différents permettent ainsi d'obtenir la séquence 2 - 0 - 0 - 0 ?

Expliquez votre démarche.

13. Le jeu de dés (Cat. 7, 8)

4 amis ont chacun un dé, qu'ils lancent en même temps.

Les dés sont de couleurs différentes: il y a un vert, un rouge, un noir et un blanc.

2 joueurs forment l'équipe vert-blanc (VB), les deux autres joueurs l'équipe rouge-noir (RN).

Le résultat de l'équipe VB est le produit des nombres visibles sur le dé vert et sur le dé blanc.

Le résultat de l'équipe RN est la somme des nombres visibles sur le dé rouge et sur le dé noir.

L'équipe ayant obtenu le résultat le plus élevé gagne.

Mais attention ! Un jeu n'est compté que si les deux conditions suivantes sont réalisées :

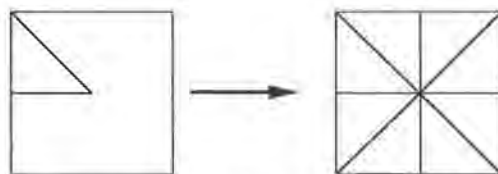
- les 4 nombres indiqués sur les dés sont différents et
- l'équipe VB doit avoir lancé le plus petit et le plus grand des 4 nombres (et l'équipe RN donc les deux nombres du milieu).

Pour quelle équipe les chances de réussite sont-elles les plus grandes ?

Justifiez votre réponse.

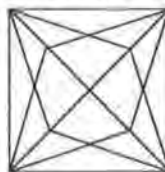
14. L'une sur l'autre (Cat. 7, 8)

Priscilla joue avec des cartes transparentes sur lesquelles elle dessine un motif. Elle découvre que, en les superposant, elle obtient des nouvelles figures.



En superposant 4 cartes avec le même motif, composé de deux segments (figure de gauche), elle obtient la figure de droite

Priscilla superpose ensuite 4 nouvelles cartes identiques, avec un autre motif, composé de trois segments. Elle obtient cette figure :



Quel est le motif, composé de trois segments qu'il est nécessaire de faire sur les cartes pour obtenir cette figure ? Y a-t-il plusieurs possibilités ?

Expliquez votre solution.

15. Salle de bal (Cat. 7, 8)

Un roi doit restaurer le sol de la salle de bal de son château qui est de forme carrée, avec des carreaux, tous de la même grandeur et entiers, de manière à recouvrir tout le sol sans découper aucun carreau.

L'architecte dit à son roi : « Vous pouvez choisir entre trois sortes de carreaux : des petits de 20 cm de côté, des moyens de 25 cm de côté ou des grands de 30 cm de côté ».

- Si vous choisissez des petits carreaux, il en faudra plus de 3000.

- Si vous choisissez des carreaux moyens, il en faudra moins de 4000.
- Si vous choisissez les grands carreaux, il en faudra plus de 2000.

Quelles sont les dimensions de la salle de bal ?
Expliquez votre raisonnement.

16. 2001 cubes (Cat. 7, 8)

Julie a empilé patiemment les 2001 cubes de son jeu de construction et elle obtient un «pavé» (parallépipède rectangle) plein, (sans trous) qu'elle pose devant elle sur sa table.

En l'observant de dessus puis selon chacun des quatre côtés, elle constate que plus de la moitié des cubes sont invisibles.

Trouvez le nombre de cubes visibles du «pavé» de Julie.

Expliquez votre solution

17. Un si long train (Cat. 8)

Un train, qui se déplace à la vitesse constante de 45 km/h en rencontre un autre qui se déplace en sens opposé à la vitesse de 36 km/h.

Un passager du premier train observe que le second train met 6 secondes pour passer devant lui.

Quelle est la longueur du second train ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

18. Nombres en colimaçon (Cat. 8)

Les nombres de 1 à 51 sont déjà écrits, en colimaçon. 51 est dans la 4e colonne à droite de celle de 1 et dans la 2e ligne au-dessous de celle de 1.

Si l'on continue ainsi, où se situera le nombre 2001 ?

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49
						50

©ARMT/2001

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Le palmarès

Le RMT est évidemment un concours, mais sans perdants. Il n'y a que des gagnants. Les prix souvenirs sont les mêmes pour tous : un certificat de participation, un crayon et un yoyo pour les finalistes, notés «9e RMT». Mais ce qui a le plus de valeur, c'est d'avoir pu participer, de s'être creusé la tête, ensemble, d'avoir transpiré et, souvent d'être arrivé à dompter ces satanés problèmes et de justifier sa démarche.

Bien sûr, certains obtiennent quelques points de plus que les autres et, l'espace de quelques minutes lors de la remise des prix, se voient sur la plus haute marche du podium, comme ce fut le cas pour les classes suivantes :

en catégorie 3 :

Collège de Corsier, VD

(Classe de Gilbert Karlen)

(2e ex-aequo en FdF¹)

1 La finale des finales (FdF), virtuelle, s'est déroulée à Parme le 1 juin 2001. Les élèves n'étaient pas là, mais leurs feuilles-réponses ont été comparées par une équipe internationale de correcteurs. Cette confrontation a conduit à une nouvelle attribution des points pour les classes gagnantes des régions de Suisse romande, Tessin, Parme, Cagliari, Gênes, Aoste, Belluno, Foggia, Lodi, Milan, Riva del Garda, Sienne.



en catégorie 4:
Ecole primaire de Belfaux, FR
(Classe de André Bongard)
(3e en FdF)

en catégorie 5:
Ecole primaire de Nods, BE
(Classe de Nathalie Turavani)
(2e en FdF)

en catégorie 6:
ECLF de Berne (BE)
(Classe de Marie-Louise Gerber)
(3e ex-aequo en FdF)

en catégorie 7:
Etablissement secondaire de Prilly (VD)
(Classe de Philippe Dony)
(première en FdF)

en catégorie 8:
Collège de Delémont (JU)
(Classe de Michel Bréchet)
(première en FdF)

Mais, en redescendant du podium, chacun se retrouve au même stade: heureux d'avoir fait un peu de mathématiques, dans une ambiance stimulante.

Photographies de Jean-Michel Von Muhlenen

Abonnements et commandes

☐ Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).

Veuillez me faire parvenir :

<i>Encyclopédie kangourou</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 28.-)
<i>Mathématiques du kangourou</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 28.-)
<i>Les annales du kangourou</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 29.-)
<i>Exos-malices</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 29.-)
<i>Histoire de Maths</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 19.-)
<i>Faites vos jeux!</i>	...	(ex. à Fr. 18.-)
<i>La magie du calcul</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 19.-)
<i>Pythagore et Thalès</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 19.-)
<i>Le monde des pavages</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 19.-)
<i>Les maths & la plume</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 19.-)
<i>Jeux et découvertes mathématiques</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 19.-)
<i>Jeux mathématiques pour tous</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 19.-)
<i>Pliages mathématiques</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 17.-)
<i>Apprivoiser l'infini</i> , ACL	...	(ex. à Fr. 25.-)
<i>100 Jeux mathématiques du « Monde »</i> , POLE	...	(ex. à Fr. 27.-)
<i>10 expériences mathématiques (HyperCube 32/33)</i>	...	(ex. à Fr. 20.-)
<i>Jeux mathématiques du « Scientific American »</i> , ADCS	...	(ex. à Fr. 38.-)
<i>Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans</i> , N. Rouche, CREM	...	(ex. à Fr. 26.-)
<i>Mille ans d'histoire des mathématiques (Tangente HS 10)</i>	...	(ex. à Fr. 20.-)

PROBLÈMES DE RALLYES ET CONCOURS :

<i>Actes des rencontres internationales de Brigue sur le RMT</i>	...	(ex. à Fr. 18.-)
<i>Fichier Evariste</i> APMEP	...	(ex. à Fr. 25.-)
<i>Panoramath 96</i> , APMEP	...	(ex. à Fr. 12.-)
<i>Panoramath 2</i> , CIJM, APMEP, ACL	...	(ex. à Fr. 18.-)
<i>Panoramath 96, Panoramath 2</i>	...	(ens. à Fr. 25.-)
<i>50 Enigmes mathématiques pour l'école</i>	...	(ex. à Fr. 14.-)
<i>50 Enigmes mathématiques faciles</i>	...	(ex. à Fr. 16.-)
<i>52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles</i> , POLE	...	(ex. à Fr. 16.-)
<i>50 Enigmes mathématiques pour tous</i>	...	(ex. à Fr. 16.-)
<i>52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous</i> , POLE	...	(ex. à Fr. 16.-)
<i>50 Enigmes mathématiques pour lycéens</i>	...	(ex. à Fr. 16.-)
<i>Le Trésor du vieux Pirate</i> (n° 12)	...	(ex. à Fr. 5.-)*
<i>Le Pin's Tourneur</i> (n° 11)	...	(ex. à Fr. 5.-)*
<i>Les Pentagones</i> (n° 8)	...	(ex. à Fr. 5.-)*
<i>Le Serpent Numérique</i> (n° 10)	...	(ex. à Fr. 5.-)*
<i>Le Singe et la Calculatrice</i> (n° 14)	...	(ex. à Fr. 5.-)*
<i>Anciens numéros de Math-Ecole</i>		(ex. à Fr. 4.-)

Nom et prénom : ☐ Mme / ☐ M.

Adresse (rue et numéro) :

Localité (avec code postal) :

Date : Signature :

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.
*En liquidation jusqu'à épuisement du stock.

Bulletin à retourner (photocopié) à : **Math-Ecole, CP 54, 2007 Neuchâtel 7**

sommaire

Editorial F. Jaquet, IRDP	2
Le marchand de soie Joëlle Cretton, IRDP	4
Réponses au problème du tailleur	16
Exposition Rivages Mathématiques	18
Origami et solides de Platon Denis Odiet	23
Racines carrée et cubique Antoine Gaggero	29
Parcours et détours 2: les labyrinthes géométriques G. Sarcone, M. J. Waeber	33
9e RMT, la finale	42