1/9801 ; Évolution du milieu d'une division un peu particulière (Partie 2)

Christine Del Notaro

Université de Genève

Liminaire

Dans la première partie, parue dans le numéro 220 de Math-école[1], j'ai exposé l'origine de mon questionnement à propos de cette division particulière[2] et l'ai situé dans le contexte de mes recherches actuelles. J'ai ensuite procédé à une investigation personnelle de ce milieu (en tant que chercheuse) puis décrit une première interaction de connaissances[3] entre des étudiants et moi-même. J'ai tenté de montrer, d'une part, que la distinction chiffre/nombre prenait du sens auprès de ces derniers et, d'autre part, que le milieu évoluait en fonction des différentes interactions. J'ai présenté également le lien que je faisais entre une question d'ordre mathématique et sa mise en situation auprès d'étudiants futurs enseignants (dispositif de formation), ainsi qu'avec des élèves de l'école primaire (recherches en classe).

La médiation par le jeu de tâches[4] permet de considérer les relations entre quatre parties : le savoir mathématique, les élèves, les étudiants et l'expérimentatrice (auteure du présent article). Nous verrons que plusieurs triades au sein de ces quatre parties interagissent entre elles, ce qui rend l'exercice plus délicat, du fait des nombreuses imbrications.

La distinction chiffre/nombre

La division particulière s'inscrit dans mon étude de la compréhension de la distinction chiffre/nombre, initiée auprès d'élèves de fin du primaire genevois (11-12 ans). Cette question guide mes réflexions depuis quelques années et se trouve ravivée à chaque rentrée universitaire, lorsque, de manière récurrente, les étudiants me demandent comment on reconnait un chiffre d'un nombre. On peut soit en donner une explication rudimentaire et toutefois incomplète, comme on l'entend souvent : « les chiffres sont aux nombres ce que les lettres sont aux mots », soit y consacrer un temps de réflexion et se demander si cette assertion est satisfaisante d'un point de vue mathématique. On pourra en outre se demander pourquoi cette distinction résiste à ce point et pourquoi des étudiants possédant un bagage mathématique conséquent se trompent néanmoins régulièrement, ainsi que la majorité des gens en général, cette confusion étant fréquente dans la vie courante. Ce qui pourrait passer pour une question de vocabulaire insignifiante révèle, en fait, une problématique beaucoup plus complexe, allant bien au-delà de la simple comparaison lettres/mots évoquée plus haut. Le caractère incomplet apparait de manière évidente pour quiconque y réfléchit un tant soit peu : premièrement, une lettre ne constitue pas un mot dans tous les cas (les cas sont même plutôt rares), alors qu'un chiffre peut toujours indiquer une quantité, et en conséquence, se révéler être un nombre.

Au fil de mes expérimentations auprès d'élèves de 11-12 ans et d'étudiants, je découvre que cela pose une véritable question de contenu. Je m'explique : si l'on considère que les chiffres sont des attributs du nombre et que ces derniers disent des choses sur le nombre (on pourrait les quali-

1 *On peut consulter l'article en cliquant sur le lien cité en référence bibliographique.*

2 *Si l'on effectue cette division, l'une des premières surprises est le fait que les décimales s'organisent en une suite de 00 à 99, mais que cette dernière s'interrompt à un moment inattendu.*

3 *L'expérimentateur est un élément du milieu qui va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève (Del Notaro, 2011).*

4 *Ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, sans être hiérarchisées pour autant. Cet ensemble de tâches procède d'un savoir mathématique et met en évidence les connaissances que les élèves ont accumulées et qui constituent leur expérience (ibid.).*

fier d'ostensifs[5]), il est manifeste que ce n'est pas le cas des mots. Par exemple, les deux *f* du mot chiffre ne disent rien sur la nature de l'objet alors que le 8 de 9801, en revanche, donne une indication sur le nombre dont 9801 est le nom. Nous avons donc un nom de nombre, 9801, dont chaque chiffre nous indique l'une de ses particularités. Ne serait-ce que le fait suivant : si le nombre est écrit en base 10, les chiffres représentent les restes des divisions successives par dix de ce nombre.

Nous avons vu dans le premier article que les étudiants s'interrogeaient sur la lecture des nombres ; étant donné qu'ils en retenaient deux différentes, je leur ai demandé si deux lectures différentes pouvaient désigner le même nombre[6]. Ce questionnement se retrouve également chez les élèves ; il y a une question de fond robuste qui mérite que l'on s'y arrête : un questionnement autour du nombre et de sa désignation. Ces discussions alimentent les interrogations des étudiants et leur donne envie de poursuivre leurs propres investigations : le jeu de tâche prend forme !

Il convient de rappeler ici que les notions d'investigation du milieu[7] et d'interaction de connaissances sous-tendent la notion de jeu de tâches.

Le jeu de tâches s'inscrit donc pour l'instant essentiellement dans la recherche en didactique des mathématiques et apparait comme un moyen de permettre qu'une interaction de connaissances ait lieu entre les différents partenaires, id est, que chacune des parties puisse répondre à l'autre, à partir des connaissances convoquées par la tâche. Le jeu de tâches permet à la fois l'exploration des mathématiques, celle de ses propres connaissances et celle de l'autre, en tant qu'il table sur un certain sens de l'improvisation (au sens jazz) dans le cadre strict et contraignant du savoir mathématique.

LE JEU DES ETUDIANTS

La partie 1 (Math-Ecole, 220)[8] se focalisait essentiellement sur le jeu des étudiants ; afin de relier les différentes parties de la recherche, je vais décrire principalement le jeu des élèves dans cette partie 2 et terminerai par le dispositif interactif entre étudiants et élèves dans la dernière partie à venir.

LE JEU DES ÉLÈVES

Les consignes d'un jeu de tâches ne sont pas précises du fait de l'interaction dont elles sont issues. Lorsqu'il se trouve face à 1/9801, la première des choses que l'élève a envie de faire est d'effectuer la division à la calculette. Avec quel autre nombre pourrait-on essayer ? Comment poursuivre ? Le jeu continue avec des tâches que l'on aura préalablement préparées (mais de manière non hiérarchisées) et seront proposées en fonction de ce que le sujet répondra, à l'image d'un jeu de cartes où l'on va jouer un coup en fonction de celui de l'adversaire. Qu'est-ce que des élèves de l'école primaire (7P-8P Harmos) font de cette division et par quel bout l'empoignent-ils ? Passons en revue quelques exemples. La première élève (Figure 1. E1) choisie pour illustrer mes propos commence par décliner les numérateurs de 1 à 10 et indique qu'« entre 8/9801 et 9/9801, il y a plus de zéros (dans les décimales tout de suite après la virgule), qu'à 10/9801 »[9].

Elle poursuit dans le but de faire décaler la virgule, jusqu'à l'éliminer ; c'est ce qu'elle veut dire quand elle dit : « 100 billiards, la virgule est à la fin des chiffres ». Le grand nombre évoqué par l'élève est en réalité de l'ordre du milliard ; elle écrit 100 billiards (10^{17}) au lieu de 100 milliards (10^{11}). Elle recourt à une connaissance-en acte, pour-

5 « Les objets ostensifs sont des objets qui ont une matérialité qui peut être captée par les sens – des écritures, des sons, des gestes, etc. – et qui peuvent, de ce fait, être manipulés. Les objets non ostensifs n'ont pas de matérialité, mais ils se constituent comme des contrôles qui régissent la manipulation des objets ostensifs » (Acosta, 2008, pp. 7-8).

6 L'un des premiers ajustements s'est porté sur la lecture du quotient : lit-on « zéro virgule zéro zéro, zéro un, zéro deux, zéro trois » ou « zéro virgule zéro zéro zéro, dix, vingt, trente ? » (Del Notaro, 2013).

7 Il s'agit de l'analyse préalable de la tâche (‡ analyse a priori) permettant ensuite à l'expérimentateur d'élaborer son jeu de tâches.

8 Le lecteur voudra bien excuser les références à la première partie et à celle à venir, mais pour des raisons d'intelligibilité, il est en effet impossible de rendre les trois parties autonomes, dans la mesure où elles sont inter-reliées et restituent des liens nombreux et imbriqués.

9 À comprendre qu'à partir de 10/9801, on passe à deux zéros après la virgule : 0,00…

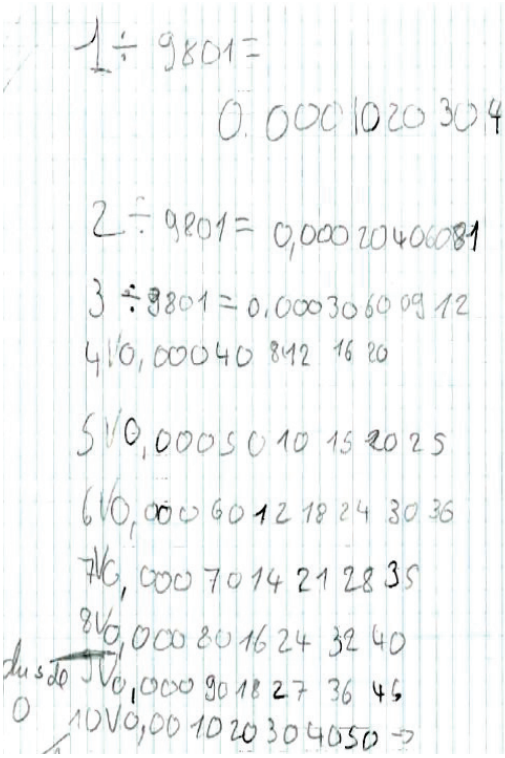


Figure1 E1-1

rait-on dire, qui lui permet de faire reculer la virgule et d'affirmer que la virgule est à la fin, ce qui signifie pour elle qu'elle n'existe plus.

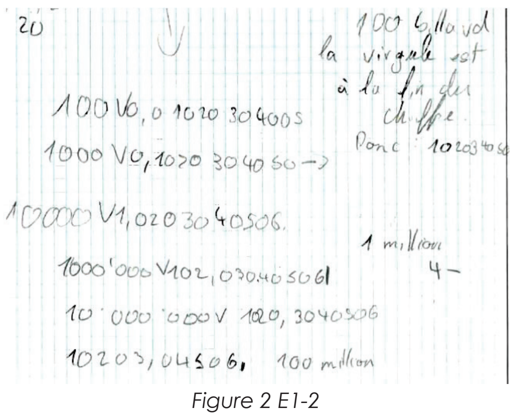


Figure 2 E1-2

Un autre élève (E2) ayant procédé de la même façon effectue (Figure 2. E2) un saut de 10/9801 à 9800/9801 ; la dévolution a opéré, il s'est approprié le problème, se posant la question de savoir si ce qui donne lieu à des régularités dans le quotient de 1/9801, 2/9801, 3/9801 se retrouve encore plusieurs étapes plus loin, notamment dans la dernière avant d'obtenir 1, à savoir, 9800/9801. La dévolution est un processus très long et il n'échappera pas au lecteur que les résultats présentés ici s'étendent, en réalité, sur plusieurs mois d'investigations.

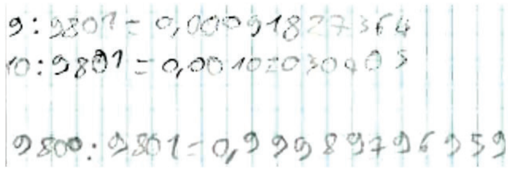


Figure 3 E2

De manière générale, les élèves ont un goût prononcé pour ce type de calculs, dont la régularité est très souvent perçue et lue en termes de chiffres : par exemple, le quotient 0.999897969594, est lu : zéro virgule neuf-neuf, neuf-huit, neuf-sept, neuf-six, etc., comme s'il y avait un regroupement des décimales par 2 (0. 99 98 97 96 95 94) avec pour moment déclaré surprenant, le passage de neuf-zéro à huit-neuf : 0,[…]91908988878685. A partir de là, la lecture rebascule vers une lecture en termes de nombre ; ils déclarent : « alors là, ça fait 89-88-87 (quatre-vingt-neuf, quatre-vingt-huit,...) », comme si l'on écrivait 0,[…] 91 90 89 88 87 86 85. La mise en forme ou l'affichage de certaines calculettes vs des logiciels de calcul changent complètement la conception des élèves (et perturbent certains étudiants). Pour la division 1/9801, selon les affichages on obtient : 0, 0001 0203 0405 ou 0,000102030405 ou encore, 0, 00 01 02 03 04 05. Ceci questionne la compréhension des élèves et des étudiants, puisque ces derniers en sont venus à se demander comment il fallait lire ce nombre. Que faire de cette surprise, sinon la réinvestir dans le milieu afin de permettre de continuer le jeu ? Le jeu a donc dévoilé que lors d'un regroupement des décimales par quatre, les élèves voient une suite pour laquelle il suffit d'ajouter 0202 aux décimales précédentes : 0001 + 0202 = 0203 ; 0203 + 0202 = 0405, etc. Il est très étrange de voir ces combinaisons d'enchainements qui font fi de certaines conventions, en maintenant, par exemple, le zéro avant le nombre, nécessaire pour obtenir la suite qui les intéresse. Ils reconstruisent donc la suite 0, 0001 0203 0405 0607 d'une autre manière, qui leur permet de lever le doute à propos de ce qui viendra après 0809 (anticipations des élèves : 1011 ? 010 011 ?). On peut ainsi reconstruire 1011 en ajoutant 0202 à 0809 ; de la même manière, obtenir 1213 en ajoutant 0202 à 1011, et ainsi de suite. Les élèves se sont arrêtés à 4041. Le regroupement par quatre décimales leur fait faire ce qui ne sont autre que des sauts de 2 en 2 (de 01 à 03, de 02 à 04) écrits sous la forme 0202, alors que dans un regroupement par 2 décimales (0, 01 02 03 04), ils ne parlent plus d'addition ni de sauts, mais simplement de suite de 1 en 1, avec un zéro entre deux. Quant à la lecture, les élèves vont lire le nombre : zéro-un, zéro-deux, zéro-trois, etc. alors que dans une écriture sans espaces, ils auront tendance à lire : zéro-virgule-zéro-zéro-zéro-dix-vingt-trente. Cette suite est vraiment curieuse et passionnante et permet un travail au cœur du nombre, de sa construction et de l'essence de sa signification.

La question, encore ouverte pour l'instant, est la suivante : est-ce que la lecture d'un nombre en affecte sa compréhension ?

Le côté esthétique, la beauté des nombres est une autre variable dont on ne peut faire l'économie en tant qu'elle porte l'élève à vouloir recréer cette régularité. E3 a trouvé que lorsqu'il divisait 2 par 90, il obtenait des décimales périodiques à partir de la deuxième. Cet effet de surprise l'a amené à vouloir le retrouver dans d'autres divisions. Autrement dit, si l'on obtient pour quotient 0,02222, on doit pouvoir obtenir 0,0333 ou 0,04444, mais comment ?

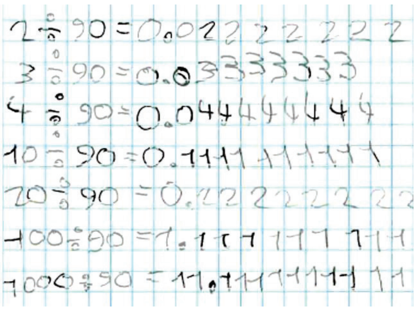


Figure 4 E3

Le jeu de E3 est clair : 1, 2, 3, 4 fonctionnent de la même manière ; il essaie ensuite avec 10 et 20 pour lesquels il obtient un quotient presque identique, si ce n'est que « le zéro rajouté (au numérateur) a disparu dans le résultat (les décimales) ». La curiosité se transmet et les deux exemples suivants, E4 et E5, montrent que les surprises sont communicatives et que les explorations se nourrissent mutuellement. En outre, elles permettent d'avancer dans l'exploration et de rendre explicites les liens entre dividende, diviseur et quotient.

Figure 5 E4

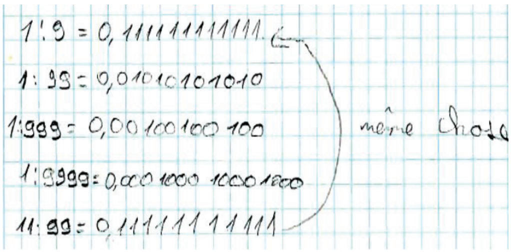


Figure 6 E5

Apparaissent ensuite des théorisations dans lesquelles les élèves écrivent des règles résultant de leur expérience de ces relations.

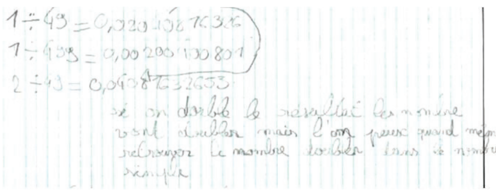


Figure 7 E6

E6 fournit une règle : « si on double le résultat, les nombres vont doubler mais l'on peut quand même retrouver le nombre doublé dans le nombre simple ». Ceci le porte à poursuivre son exploration et à formuler les constats suivants :

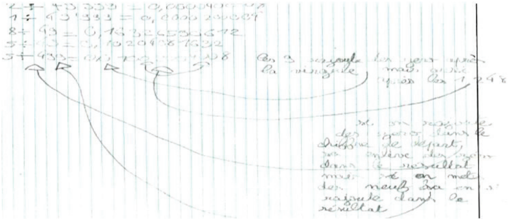
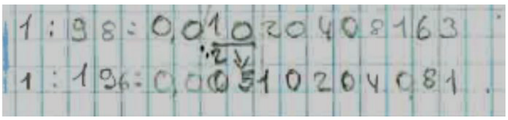


Figure 8 E6-2

Retranscription de la Figure 8 : « Les 9 rajoutent des zéros après la virgule, mais aussi après les 1, 2, 4, 8. Si on rajoute des zéros dans le chiffre de départ, ça enlève des zéros dans le résultat, mais si on met des neuf, ça en rajoute dans le résultat ».

Et l'E7, de reprendre l'idée :



1 ÷ 98= 0.0<u>10</u>20408163

÷ 2

1 ÷ 196=0.0<u>05</u>10204081

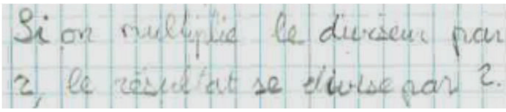


Figure 9 E7

« Si on multiplie le diviseur par 2, le résultat se divise par 2. »

À l'inverse, E8 explore les relations divisives :

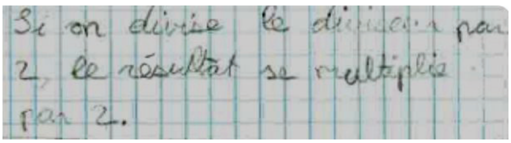


Figure10 E8

« Si on divise le diviseur par 2 le résultat se multiplie par 2. »

Dans le même ordre d'idées encore, un autre élève poursuit : « La virgule se déplace parce que s'il y a un « 0 » de moins que le calcul précédent, la virgule se déplace vers la gauche et si c'est le contraire c'est vers la droite ».

De même que E1, E9 enchaine avec l'idée de la multiplication par 10 permettant le déplacement de la virgule jusqu'à l'éliminer, en argumentant de la sorte :

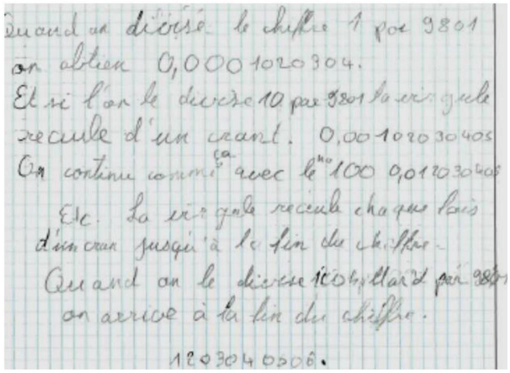


Figure11 E9

« Quand on divise le chiffre 1 par 9801 on obtient 0,0001020304. Et si l'on le divise 10 par 9801, la virgule recule d'un cran. 0,00102030405. On continue comme ça avec le no 100 0,012030405 etc. la virgule recule chaque fois d'un cran jusqu'à la fin du chiffre. Quand on le divise 100 billiard par 9801 on arrive à la fin du chiffre. 1203040506 ».

Voici un compte-rendu d'étudiants, qui s'avère intéressant en ce que la question de la lecture du nombre est présente, ainsi que celle du décalage de la virgule, tout comme chez les élèves :

1. On effectue le calcul
2. Le résultat est trouvé et on se demande maintenant comment faire pour le lire : 0,0001020304...
3. Relance avec une question : ''Est-ce qu'on pourrait faire d'une autre manière ?''
4. Proposition avec un autre calcul : 10/9801 = 0,0010203...
5. Nouveau calcul : 10'000 / 9801 = 1,02030405. ''On a décalé sur la gauche''
6. Essai avec 100'000 : On constate que la calculatrice a arrondi le nombre
7. Essai avec 200 : = 0,02040608...
8. Essai avec 50 : = 0,005101520... ''Cela donne un résultat avec les multiples de 5'' (5, 10,15)
9. Proposition : ''Si on met 300, ça va don-

ner avec les multiples de 3''

10. Essai avec 247 mais on n'a pas les multiples de ce nombre dans le résultat[10] = 0,25020151...

LE DISPOSITIF INTERACTIF

Disposant de données conséquentes à propos du jeu des étudiants et de celui des élèves, il manquait cependant un lien entre les deux parties, qui fut établi par la mise sur pied d'un dispositif interactif, pour modéliser ma propre interaction avec les deux systèmes. L'idée princeps est, pour l'expérimentatrice, de jouer avec les narrations des élèves d'une part et celles des étudiants, de l'autre, et de voir ce que cela produit. Autour de cette fraction particulière, pour faire en sorte de maintenir l'interaction vive, il a fallu aménager un milieu donnant l'opportunité aux étudiants et aux élèves de pouvoir procéder à des explorations en groupes (investigation du milieu mathématique) et de laisser, en outre, un espace à la production de narrations.

En provoquant l'interaction entre les deux parties, en tant qu'expérimentatrice, j'ai été l'interface de ces deux publics, me mettant en interaction avec chacune d'elles. Il m'a fallu transiter d'une instance à l'autre et interagir sur le vif. L'intérêt de ce dispositif est, d'une part, de provoquer l'étonnement des étudiants avec des récits d'élèves (produire une narration, destinée à des enfants de 12 ans) et, du point de vue des élèves, d'écrire une narration à destination des étudiants. Dispositif porteur si l'on considère qu'il a, entre autres, permis aux élèves d'entrer dans une démarche de recherche et dans un processus inductif / déductif et aux étudiants, d'approcher différemment la question du savoir et des connaissances à travers une division particulière.

Le résultat de ces interactions sera exposé dans le troisième et dernier volet de l'expérimentation et commenté à la lueur de ma théorisation des relations effectives entre une règle, l'expérience sous-jacente et la logique y afférente.

10 Et pourtant… cf. partie 1 : « J'obtiens les multiples de 247 dans les décimales de ce nombre, moyennant quelques soustractions successives. Ainsi, les premiers multiples de 247 = {247 ; 494 ; 741 ; 988 ; …} se retrouvent de la manière suivante : dans 0,0252, on peut voir 247, et il reste 5 (252-247). J'abaisse ensuite les deux chiffres suivants, 0 et 1, ce qui me donne 501 et je continue ainsi : à 501, je soustrais 494, il reste 7, etc. ».

Références

Acosta, M. (2008). *Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie*. Thèse de doctorat. Université de Genève.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Del Notaro, C. (2013). 1/9801 évolution du milieu d'une division un peu particulière (Partie 1), *Math-Ecole 220*, 26-29. http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/220DelNotaro.pdf consulté le 2 mai 2014

Del Notaro, C. (2014). Des élèves à l'Uni ! De la narration de l'expérience à l'expérience par la narration : mise en évidence de relations entre « règle, expérience et logique », *Educateur, 01*.14, 16-18.