A propos de triangles

François Jaquet

Rallye mathématique transalpin

Introduction

Depuis 22 ans, le Rallye mathématique transalpin (RMT) propose des problèmes à des milliers de classes d'Italie, France, Luxembourg, Belgique et Suisse, dans des conditions bien particulières : épreuves de 5 à 7 problèmes, à résoudre en 50 minutes, sous l'entière responsabilité de la classe (en absence de l'enseignant remplacé par un collègue « surveillant »), avec remise d'une seule réponse par problème accompagnée des explications sur la manière dont les solutions ont été trouvées[1].

En vingt ans, le RMT a accumulé des analyses, observations et autres résultats sur un millier de problèmes qu'il est en train de regrouper dans une « banque de problèmes ».

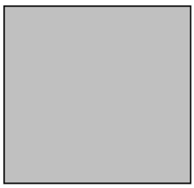
Pour se donner une idée de l'ampleur et de la nature de ce recueil de données, nous présentons ici les premières analyses des copies rendues par des classes d'élèves de 8 à 12 ans[2] de Suisse romande à propos de deux problèmes du 22e RMT résolus au printemps dernier, qui font intervenir la perception de triangles, la confrontation entre mesures de longueurs et mesures d'aires et les pavages.

Pour chacun d'eux l'article présente l'énoncé, le choix du contexte, la tâche de l'élève dans la résolution du problème, quelques données statistiques et, avec plus de détails, les analyses des copies reçues. Il se conclut par quelques réflexions sur l'usage de ces données.

Premier problème : Triangles envolés

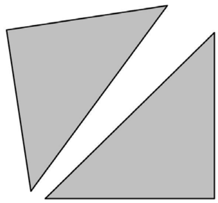
Triangles envolés (Cat. 3, 4, 5, 6)

Albert avait un carré de carton gris.



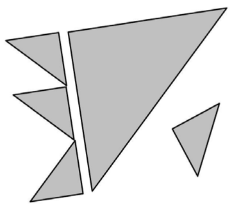
Le carré d'Albert

Il l'a découpé en deux triangles égaux :



Les deux triangles

Puis Albert a découpé un des deux triangles en petits triangles tous égaux.



Mais le vent a emporté quelques-uns des petits triangles. Il n'en reste plus que quatre :

Sur la figure ci-dessus, on voit que l'on peut aligner exactement trois des petits triangles égaux sur un côté du grand triangle.

Dessinez sur le carré d'Albert le grand triangle restant et tous les petits triangles.

Combien de petits triangles se sont-ils envolés ?

---

1 Pour en savoir plus, voir le site www.armtint.org ous la rubrique « présentation du Rallye ».

2 Catégories 3 à 6 du RMT, 5e à 8e HarmoS pour la Suisse.

Les choix du contexte et de l'énoncé

Entre l'idée d'origine et l'énoncé définitif d'un problème du RMT, le chemin est parfois très long, constitué d'échanges, d'écritures et réécritures, de consultations multiples. La proposition d'origine s'exprimait en termes de « figures géométriques » : *triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent chacun 1 ou 3 unités,* avec des notations *1**u*** et *3**u*** pour indiquer le rapport des deux types de triangles.

Pour contourner l'usage de mots peu familiers aux élèves, nous sommes passés par un carré découpé en deux triangles égaux, illustré par deux figures, et pour éviter l'unité indéterminée, ***u***, et le rapport 3, nous avons imaginé un alignement de trois côtés de petits triangles sur un côté correspondant du grand.

Le contexte a été ainsi sensiblement modifié pour aboutir à une situation, jugée plus « concrète », avec un énoncé mieux adapté à de jeunes élèves qui, rappelons-le, devront se l'approprier sans aucune aide extérieure durant les 50 minutes accordées pour la résolution.

La tâche de l'élève

La tâche mathématique revient à décomposer un triangle rectangle isocèle en triangles égaux qui lui sont semblables dans le rapport 1/3, ou 3 pour en déterminer le nombre.

L'adulte sait que le rapport des aires est 1/9 ou 9, mais n'est pas forcément convaincu qu'on peut paver le grand triangle avec exactement 9 petits, sans les couper. Les enfants, eux, ne le savent pas.

Pour trouver le nombre de pièces qui se sont envolées, il faut d'abord se demander combien il y en avait avant le coup de vent. Cette recherche a malheureusement été occultée par la première injonction : « Dessinez tous les petits triangles ».

Il ne reste alors aux élèves que la tâche du recouvrement du grand triangle, par découpages et reports, ou le dessin d'une trame triangulaire, ou la construction des petits triangles un à un, afin de déduire, par soustraction des quatre triangles restés, le nombre de ceux qui se sont envolés.

Données statistiques

Après l'épreuve, les sections du RMT procèdent à une « attribution des points », de 0 à 4, pour chaque problème, selon des critères communs élaborés a priori. On obtient alors un tableau de résultats avec les fréquences des points et les moyennes, par catégorie.

Par exemple, sur 2539 classes de 21 sections du RMT, les moyennes des points attribués aux 2539 copies du problème Triangle envolés sont, pour les catégories 3, 4, 5, 6, (5^{è}, 6^{è}, 7^{è} et 8^{è} HarmoS) respectivement 1,5 ; 2,0 ; 2,3 ; 2,3. Les occurrences des « 4 points » selon le critère « Réponse correcte : cinq triangles envolés et un dessin précis de la répartition » sont respectivement de 25% ; 38% ; 46% ; 44%.

Les résultats de la Suisse romande sont du même ordre et ne présentent pas de différences significatives par rapport à l'ensemble.

Ces données statistiques ne sont cependant que des indices globaux de réussite ou de difficulté d'un problème ; elles ne permettent pas de jugement, mais seulement des constatations. Par exemple, la hausse sensible des moyennes de la catégorie 3 (5^{è} HarmoS, 1,5) à la catégorie 5 (7^{è} HarmoS, 2,3) et une stabilisation pour la catégorie 6 (8^{è} HarmoS, 2,3).

Observation des copies

Ce n'est que maintenant que nous entrons sur ce que nous appelons volontiers « le terrain de l'élève[3] ».

Sur les 145 copies de la section de Suisse romande, 119 (~80%) font apparaître les petits triangles dessinés sur le grand.

Dans une dizaine de cas, il s'agit d'un collage effectif de pièces découpées ou du report du contour d'un petit triangle, déplacé dans des positions successives.

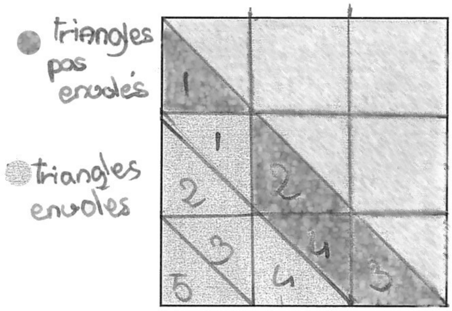
Dans la majorité des cas, on se rend compte que les figures ont été dessinées, à la règle, après les mesures ou reports nécessaires pour assurer l'isométrie des petits triangles. On relève une progression, de la catégo-

3 L'expression est empruntée à Nicolas Rouche (2005) : Il faut partir du terrain de l'élève mais ne pas y camper.

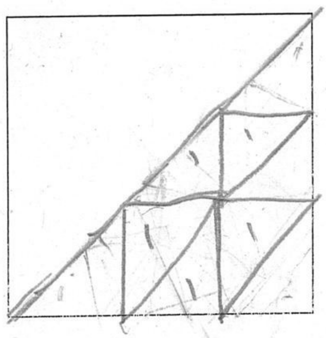
rie 3 à la catégorie 6, dans la précision des dessins et le respect des directions (parallélisme et perpendicularité).

Lorsqu'on s'intéresse de plus près aux dispositions des triangles les uns par rapport aux autres, on observe quatre types de dessins :

Procédure I. Les triangles sont images les uns des autres par des translations et symétries dans 25 copies (17 %). On pourrait penser que cette trame triangulaire atteste d'une compréhension globale de la répartition. C'est vraisemblablement le cas dans une partie des cas (exemple de la Copie 1a) mais souvent le dessin révèle une construction triangle par triangle (Copie 1b).

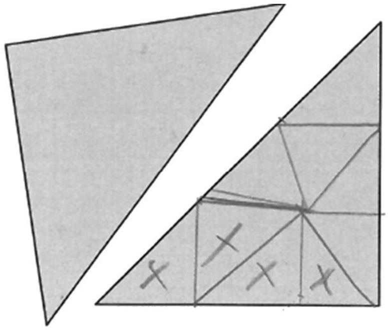


Copie 1a

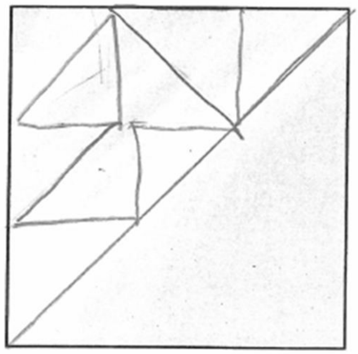


Copie 1b

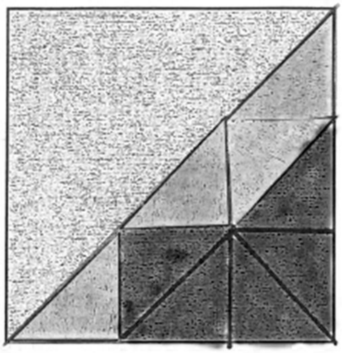
Procédure II. Des rotations d'un quart de tour ou des symétries axiales s'ajoutent aux transformations précédentes dans 51 copies (35 %), (Copies 2a, 2b et 2c). Les triangles sont construits un à un, semble-t-il. Là aussi la qualité des dessins varie sensiblement, la Copie 2a est à la limite de l'erreur !



Copie 2a



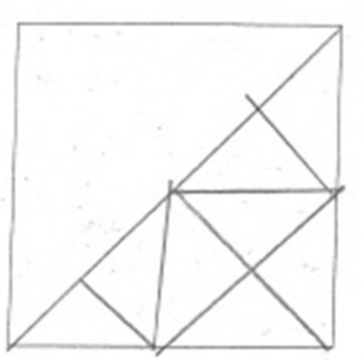
Copie 2b



Copie 2c

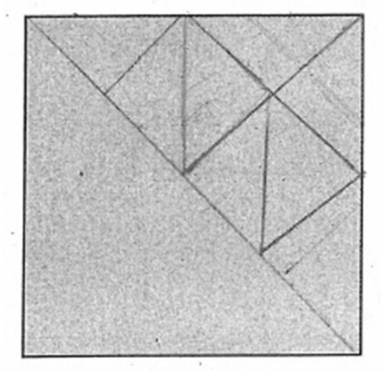
Procédure III. Des rotations de 45 degrés s'ajoutent aux transformations précédentes dans 20 copies (14%) (Copies 3a, 3b, 3c). Dans ces cas, la réponse des élèves est « quatre triangles se sont envolés » contrairement aux « cinq triangles » des cas précédents.

Il faut se « frotter les yeux » pour comprendre d'où vient cette réponse, car les dessins sont très précis (Copies 3b et 3c par exemple) et on trouve même des découpages et collages correspondants.

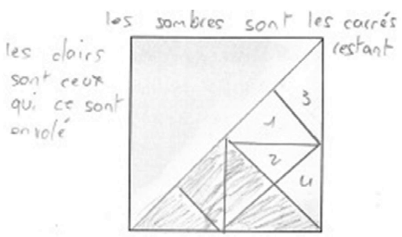


Copie 3a

Un petit calcul permet de lever l'interrogation : la mesure de l'hypoténuse d'un petit triangle ($\sqrt{2} \approx 1{,}41$) est proche de celle d'un demi-côté du carré, de 1,5. L'écart n'est visible que pour un œil exercé.



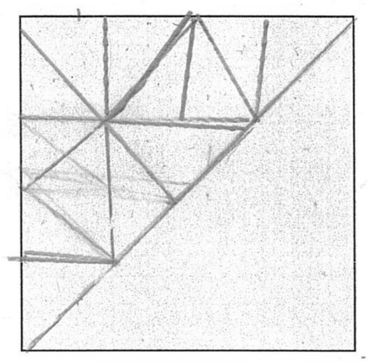
Copie 3b



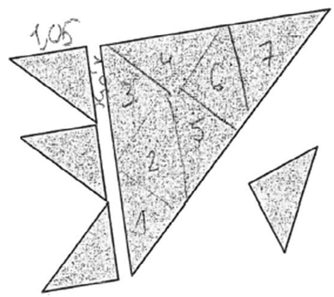
Copie 3c

Personne n'avait prévu cette réponse lors de l'analyse a priori. Une partie non négligeable de la tâche de l'élève n'avait donc pas été envisagée : celle de respecter le parallélisme et/ou la perpendicularité entre les côtés des angles droits des petits triangles et les côtés des angles droits du grand.

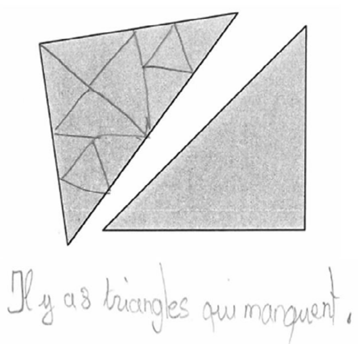
Procédure IV. D'autres transformations, déformations, agrandissements, réductions apparaissent dans 23 copies (16%), où l'on constate souvent un report cumulatif des imprécisions pouvant entraîner des décomptes erronés.



Copie 4a



Copie 4b



Copie 4c

Sur les 145 copies examinées, on ne relève aucune trace explicite de réflexion sur l'aire des triangles, ni sur le rapport 3, ni sur la relation multiplicative 3 × 3 = 9.

Finalement, comme pour tout problème du RMT, il y a des copies blanches ou non reçues, 26 sur 145 (18%) dans le cas des Triangles envolés. Il faut rappeler à ce propos que les élèves ont l'entière responsabilité de l'organisation du travail : répartition en groupes, partage des problèmes et résolution. Le maître seul peut connaître les raisons d'une copie blanche ou de son absence, en en parlant avec ses élèves après l'épreuve.

Les réflexions d'ordre didactique à propos des observations précédentes seront traitées avec celles du second problème, après sa présentation.

Deuxième problème : La tarte de Mamie Lucie

de problèmes antérieurs, regroupés dans une « famille de tâches » caractérisée par le conflit entre aire et périmètre. Dans ces problèmes, le partage se faisait sur une trame, quadrillée, triangulaire ou en « briques ». Ici, la tâche d'imaginer ou de déterminer une unité d'aire est dévolue aux élèves et, s'ils décident de prendre des mesures sur le dessin, c'est aussi à eux de les choisir puis de les combiner (additionner ou multiplier).

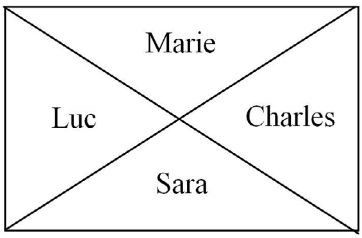
Données statistiques

La tarte de Mamie Lucie, résolue par 2125 classes de catégories 4, 5, 6 (6è, 7è, 8è HarmoS) a obtenu des moyennes respectives de 1,2 ; 1,6 et 1,6 points. Les critères d'attribution donnaient 2 ; 3 ou 4 points à la réponse correcte, selon la qualité des explications. On peut en conclure que l'équivalence des quatre parties d'un rectangle partagé par ses diagonales est loin d'être évidente pour les élèves de 9 à 12 ans.

La tarte de mamie Lucie (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Les choix du contexte et de l'énoncé

Le contexte du partage de tartes pour aborder les comparaisons d'aires est familier. L'énoncé a été facile à rédiger, par rapport à celui du problème précédent.

La tâche de l'élève

D'un point de vue mathématique, la tâche est évidente : il s'agit de montrer qu'un rectangle partagé par ses deux diagonales donne quatre parties de même aire.

Du point de vue de l'élève, ce n'est pas si simple. Nous l'avions déjà constaté lors de l'analyse des copies d'une bonne quinzaine

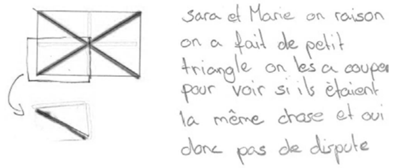
Observation des copies

Les 124[4] copies de Suisse romande se répartissent en cinq types de procédures caractéristiques :

Procédure I. « Pavage » du rectangle par les deux médiatrices des côtés, en huit triangles rectangles, permettant une comparaison

4 Le problème n'a pas été proposé en catégorie 3 (5è HarmoS), comme le précédent, il y a donc moins de copies.

directe dans 38 copies (31%). (voir Copie 5a et Copie 5b[5])



Copie 5a

Sara et Marie ont raison, chaque personne ont reçu la même part. *Explications : Comme vous pouvez le constater j'ai coupé les tranches en deux (les deux médiatrices sont tracées) et ça fait des triangles rectangles et chaque tranche ont les mêmes triangles rectangles sauf qu'ils sont pas de la même manière alors chaque enfant ont la même quantité de tarte.*

Copie 5b

Procédure II. Explication par « compensation » qualitative 6 copies (5%).

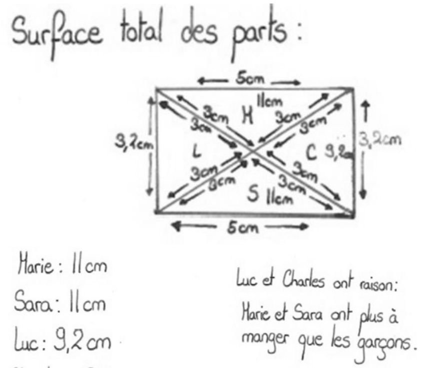
Exemple 1. Les filles ont raison.

> *Sara et Marie ont une petite part mais élargie. Charles et Luc ont une grosse part, mais rétrécie.*

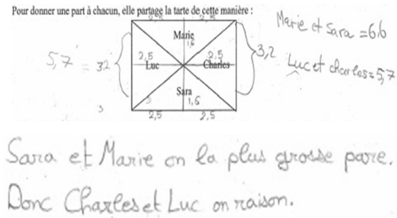
Exemple 2. (sous le dessin complété par les deux médiatrices).

> *Il y a celles de Marie et Sara sont plus larges et celles de Luc et Charles sont plus longues donc ils ont la même part. C'est Sara et Marie qui ont raison.*

Procédure III. Par calcul du périmètre (Copie 6a) ou autres additions de longueurs (Copie 6b) : 33 copies (27%).

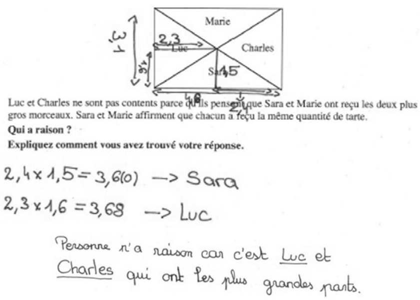


Copie 6a

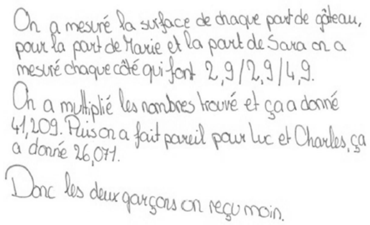


Copie 6b

Procédure IV. Procédure par produit de mesures de longueur (de catégorie 6, 8è HarmoS, en majorité) dont la conclusion dépend de la précision des mesures (Copie 7a) et évidemment de la formule choisie (Copie 7b), 15 copies (12%).



Copie 7a



Copie 7b

Procédure V. On trouve encore quelques procédures par découpages, tentatives de pliages et recouvrements ou recherches d'autres unités, qui en général ne concluent pas à l'égalité des parts : 11 copies (9%).

Il y a 21 copies (17 %) blanches ou non rendues.

Les exploitations didactiques

L'élaboration du problème, sa passation, l'attribution des points, l'analyse des copies a posteriori, aboutissent à un gigantesque recueil d'observations. Ces données se rapportent à la manière dont les élèves s'y sont pris pour résoudre le problème, aux obstacles qu'ils ont rencontrés, à leurs erreurs

5 *Les textes des élèves sont « recopiés », sans altérer la langue et l'orthographe d'origine.*

ou réussites.

Que peut-on bien en faire ? A qui peuvent-elles être utiles ?

Du côté de la recherche, elles ouvrent la voie à de nouvelles investigations ou explications.

Du côté de l'enseignement, elles interrogent le maître sur leur prise en compte pour la conduite de sa classe.

Nous nous contentons ici de deux exemples de ces prises en compte, parmi les très nombreuses possibilités[6] :

1. Si un maître propose à ses élèves de résoudre, par groupes autonomes, Triangles envolés, il peut s'attendre à ce qu'apparaissent les deux types de partition, en 9 triangles (Copies 1a, 1b et 2a, 2b, 2c) et en 8 triangles (Copies 3a, 3b, 3c). Après la résolution il peut dire aux uns qu'ils ont trouvé la réponse exacte et aux autres qu'ils se sont trompés, en leur expliquant pourquoi. Il peut aussi organiser un débat entre les uns et les autres et « pousser » la confrontation jusqu'à ce que la classe soit convaincue que les 9 triangles sont chacun « un peu plus petits » que les 8 triangles et qu'il faut donc tenir compte de la disposition des côtés de l'angle droit pour un recouvrement correct.

2. Si un maître veut savoir si ses élèves distinguent bien le périmètre de l'aire d'une figure, il peut choisir de les faire travailler sur La tarte de Mamie Lucie. Il verra alors certainement apparaître des procédures de types III (Copies 6a, 6b) et IV mais aussi les liens ou contradictions entre les pavages et les calculs d'aires, comme dans la Copie 7a où le petit rectangle dessiné « pave » la moitié de la tarte en 4 triangles rectangles, qui ne sont pourtant pas reconnus comme équivalents suite aux imprécisions des mesures.

Conclusions

Les deux problèmes examinés ici à propos de triangles montrent combien cette notion évolue dans la longue chaîne de transposition descendante qui va des mathématiciens aux enseignants en passant par les programmes[7] et les manuels pour aboutir aux élèves. Lorsqu'on remonte à partir du terrain de ces derniers, on est souvent effaré de constater l'ampleur du fossé entre ce qui a été défini par les adultes et ce qui subsiste chez l'élève.

Certains considéreront cet écart comme négatif et chercheront à y remédier par de « meilleures » propositions ou directives d'enseignement. D'autres, au contraire, n'y verront que le fruit d'une observation rigoureuse : une réalité à prendre en compte en permanence afin de placer les élèves dans les conditions optimales pour construire leurs connaissances.

Chaque copie examinée révèle des niveaux distincts de maîtrise des multiples concepts qui gravitent autour de celui de triangle. Leur regroupement par types de procédures ou d'obstacles peut aider à dégager les points problématiques : là où il faudrait agir pour poursuivre la construction. Le RMT et ses analyses a posteriori de copies ne vont pas au-delà.

C'est cependant un pas important qui, nous l'espérons, permettra à l'enseignant de prendre le relais, en fonction des besoins de ses élèves, du parcours didactique de sa classe et de sa personnalité.

Références

Rouche, N. (2005). De l'élève aux mathématiques, le chemin s'allonge, *L'apprentissage des sciences en question, La pensée et les hommes*, Espace de liberté, 29-49.

Math-Ecole 155-217 (65 articles, 1992 - 2006)

Actes des journées d'études sur le RMT 1-8 (1999 - 2008).

Gazette de Transalpie 0-4 (2010 - 2014)[8].

Toutes les références se situent dans les nombreuses publications du RMT qu'on trouve sur son site www.armtint.org en particulier : Présentation du Rallye pour l'organisation et les conceptions didactiques.

6 D'autres seront développées et proposées lors des études en cours sur ces deux problèmes. On les trouvera dans les prochaines publications du RMT et en particulier dans sa « Banque de problèmes » en préparation, dont l'accès sera ouvert prochainement.

7 Par exemple, in PER, MSN 21 Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace : Reconnaissance, description et dénomination de figures planes (triangle, carré, rectangle…) selon leurs propriétés (symétrie-s interne-s, parallélisme, isométrie,…).

8 Les analyses et réflexions développées au sein du RMT sont progressives et collectives.