94

MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1980
19e ANNEE

MATH-ECOLE PRATIQUE

Pour répondre à de nombreuses demandes provenant d'abonnés récents, la rédaction a édité son premier MATH-ECOLE PRATIQUE qui, en 148 pages, reprend 14 articles, directement utilisables dans les classes, parus dans les numéros 52 à 75 (1972-1976).

TABLE DES MATIERES

1. Etude de la construction de la suite des premiers nombres
2. Enseignement renouvelé de la mathématique et pédagogie Freinet
3. A propos de la mesure d'aire
4. Les approches de la soustraction: sources de problèmes ?
5. A propos de «machines»
6. Du produit cartésien à la table de multiplication
7. La division
8. De l'idée d'échange à la notion de division
9. Deux bonnes douzaines de problèmes de mathématique
10. Autour d'un échiquier
11. Planches à trous et planches à clous
12. Planchettes à clous et géométrie spontanée d'enfants de 9 à 11 ans
13. Quelques noisettes pour se faire les dents
14. A propos de la proportionnalité

MATH ECOLE 94

19e ANNEE Paraît cinq fois par an SEPTEMBRE 1980

Editorial

Des chiffres ...!

J'ai déjà dit dans les colonnes de MATH-ECOLE combien certains outils mathématiques (schémas, diagrammes, graphes, ...) étaient les bienvenus, dans l'enseignement du civisme, notamment.
Encore que ce jugement ne convainc finalement que celui qui apprécie «l'alphabet grâce auquel Dieu a écrit l'univers [1] ». J'ai un excellent ami qui, vis-à-vis du «monde chiffré», comme il l'appelle, a de tout temps adopté une attitude qui n'est pas sans me rappeler étrangement celle du Général de Gaulle à l'égard de certains politiciens: «Sans aller jusqu'à suspecter leur vertu, on s'interroge sur leur sincérité !»
Certes, on peut ne pas aimer les chiffres. «J'ai horreur des chiffres. Dans le domaine des chiffres, je n'ai de mémoire que pour les dates. Je sais trop aussi, pour avoir vécu près des grands états-majors politiques, comme l'on peut être habile à les manier. La trituration des statistiques ou des sondages est l'art de jongler avec les pourcentages comparés. Les statisticiens soviétiques sont universellement connus comme des virtuoses dans cet exercice si peu marxiste de camoufler le vide d'un résultat économique sous des montagnes spectaculaires de chiffres; ils ne sont pas les seuls au monde [2] ».
Certes, on peut ne pas croire davantage « aux témoignages des technocrates super-spécialisés. Ils passent le plus souvent pour les moins discutables des modèles de rigueur. Je ne les tiens personnellement pas pour moins subjectifs ou partisans que les autres: les technocrates sont tous loin d'être aussi froids que leurs chiffres. De plus, consultez de hauts spécialistes de tel ou tel problème complexe: il y en a toujours deux pour vous présenter deux thèses absolument contradictoires. Je tiens à cet égard à présenter ma propre expérience quand j'eus à charge le ministère de l'Industrie ou la radio-télévision. Je consultais plusieurs spécialistes. Ils me présentaient des propositions totalement opposées et me laissaient à moi, ignare en la matière, la totale responsabilité du choix définitif. Les as de la spécialité se retrouvaient l'un au Pôle, l'autre à l'Equateur: j'avais l'impression de jouer à pile et à face la thèse de l'esquimau et celle du pygmée. Je me suis donc gardé de m'enfoncer dans les neiges ou les jungles des grands ouvrages spécialisés [3] ».
Il n'en demeure pas moins que les chiffres parlent, ô combien parfois, informent rapidement le citoyen, l'incitent à la réflexion:
— *SUISSE. — Les couples suisses ne font plus que 1,5 enfant en moyenne. En l'an 2000, la Suisse sera peuplée de vieux.*
— *URSS. — 75 000 visiteurs étrangers aux Jeux olympiques, au lieu des 300 000 attendus à Moscou.*
— *OCDE. — 23 000 000 de chômeurs en juin 1981.*
— *SUISSE. — Le conseiller fédéral Willy Ritschard réclame 1 000 000 000 d'impôts pour équilibrer le budget de la Confédération.*
Quand bien même les chiffres seraient au service de Son Excellence l'Humour:
— *SUISSE. — Dans une réunion de citoyens-soldats, on discute des dépenses de l'armée suisse. L'un des orateurs déclare:*
— *Vous parlez des millions consacrés à l'armement... Savez-vous que les femmes du pays dépensent autant pour leurs soins de beauté?*
— *Oui, répond un auditeur, c'est possible; mais elles, elles font des conquêtes!*

Viennent des heures sombres. Aussitôt, les chiffres se font pressants, se complaisent dans les nouvelles alarmistes, voire sinistres. Ils secouent l'opinion publique, la tirent de sa torpeur, agissent comme de véritables sonnettes d'alarme :

— *URSS. — « Le SS-20 est un missile mobile et par conséquent virtuellement invulnérable. Au début de 1980, les Soviétiques en avaient déjà déployé environ 200 et ils en ajoutent à la cadence d'un par semaine. Chaque SS-20 porte 3 ogives MIRV extrêmement précises et sa portée de 5 000 à 6 500 km lui permet de toucher n'importe quel objectif d'Europe, de la Norvège à Gibraltar en passant par l'Angleterre.* [4]
— *AFGHANISTAN. — Des milliers de rebelles convergent vers Kaboul.*
— *LIBAN. — Les derniers accrochages auraient fait 100 morts.*
— *IRAN. — 7 hommes ont été fusillés dans la rue. Toujours sans nouvelles des 52 otages américains.*
— *FRANCE. — 7 terroristes italiens arrêtés.*
— *CAMBODGE. — Bilan du régime Pol Pot: 1 000 000 à 3 000 000 de victimes et ruine complète du pays.*

« Les chiffres qui font peur » titrait un quotidien romand en mars dernier. J'enchaîne : «Sainte frayeur des chiffres, salut des démocraties tremblantes ».

Gaston Guélat

[1] *Galilée.*
[2] *Arthur Conte, « Vers quel avenir ?» (§ XII, «Notre enseignement scolaire n'est pas à l'heure de l'avenir»), Plon, 1980, p. 226.*
[3] *Arthur Conte, op. cit.*
[4] *Richard Nixon, « La vraie guerre », Albin Michel, 1980, p. 208.*

Pour une fois, la parole et le dessin à un élève...

Initiation au jeu des échecs

par Patrick Charrière

1. Les échecs ne sont pas qu'un jeu

« Pour moi, les échecs ne sont pas un jeu, mais un art. Chaque joueur d'échecs de valeur, chaque débutant talentueux n'a pas seulement le droit, mais aussi le devoir de se considérer comme un artiste. »
Cette réflexion célèbre de l'ancien champion du monde Alexandre Alekhine (1892-1946) montre bien que les échecs ont quelque chose de plus que la majorité des autres jeux.
A travers ce premier article je vais essayer d'approfondir les qualités, nombreuses, développées par la pratique du jeu d'échecs.

Ce sont :

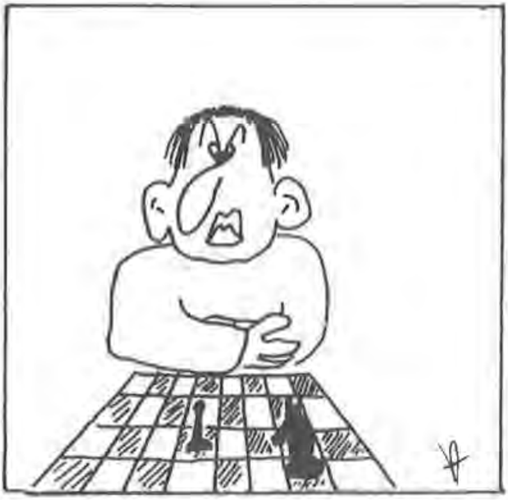
1. La concentration, l'attention.
2. Le jugement, le plan.
3. La méthode dans la réflexion.
4. L'imagination.
5. La mémoire.
6. La combativité.
7. La créativité.
8. L'estime de son adversaire.
9. L'étude, la préparation, le goût des langues étrangères
10. La pratique de l'auto-critique.
11. La maîtrise de soi.

Rappelons, avant de commencer l'étude de ces qualités, que la partie d'échecs est un combat entre deux armées, symbolisées par des pièces. Plusieurs pièces obéissent à des règles différentes. Elles se déplacent sur un terrain réduit, l'échiquier. Le but du jeu est de tuer le roi adverse, c'est-à-dire de le mettre : MAT.

1. La concentration, l'attention.

Avant de jouer un coup sur l'échiquier, il est nécessaire d'analyser ses propres possibilités puis, lorsque nous en avons choisi une, nous devons étudier les diverses réponses possibles adverses, et ainsi de suite. Pour chaque coup, nous obtenons un lot de variantes. Ainsi chaque déplacement exige un temps de réflexion plus ou moins long, dans lequel nous devons montrer une concentration et une attention intenses. La moindre riposte adverse négligée est souvent synonyme de la perte d'un avantage, voire de la perte de la partie !

2. Le jugement et le plan.



A certains moments d'une partie d'échecs, il est recommandé de juger la position. Ce jugement s'obtient en appliquant à la position une dizaine de critères, bien définis et universellement reconnus. Dans ce sens, nous décomposons mentalement notre position et celle de l'adversaire et nous comparons les résultats ainsi obtenus. Pour chaque comparaison, nous émettons un jugement objectif. Puis nous synthétisons le tout, ce qui nous donne un jugement général de la position.
Lors de ce travail fondamental, il est très important, je le répète, de donner un jugement objectif. Sur-estimer sa position ou celle de l'adversaire est une

grave erreur, qui peut compromettre l'évolution future de la partie. Le jugement correct de la position nous indique ainsi qui a l'avantage, quel joueur a la meilleure position, où sont les diverses faiblesses et points forts, de part et d'autre. Sur quoi, avec ces très importants renseignements, nous pouvons construire un plan, une marche à suivre, une série de coups qui s'applique correctement à la position.
Le joueur novice ne tardera pas à se rendre compte de l'importance de ces deux étapes et, peut-être, lorsqu'il devra émettre une opinion sur un sujet quelconque de la vie (politique, littérature, ...) sera-t-il plus objectif et analysera-t-il plus à fond le problème, ... avant de dire n'importe quoi.

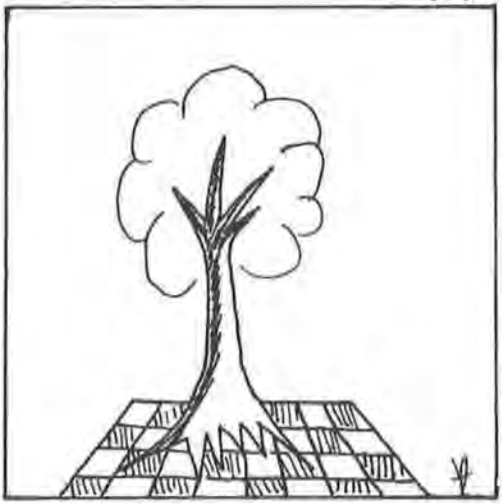
3. La méthode dans la réflexion

Dans les tournois, le temps de réflexion de chaque joueur est limité (par exemple, 2 h. 30 pour jouer 40 coups). Il est donc primordial de calculer vite. Ce n'est que par une méthode de calcul stricte et bien stucturée que l'on peut arriver à de bons résultats. (Dans une partie, un Grand Maître international [1] calcule à certains moments sur une dizaine de coups, parfois plus.)
J'exposerai en détails une méthode de réflexion dans un prochain article, mais sachez déjà qu'elle va utiliser un arbre combinatoire, ce qui renforce l'idée que les échecs sont apparentés aux mathématiques !

4. L'imagination

Pour prévoir le développement ultérieur de la partie, le joueur d'échecs doit sans cesse imaginer de nouveaux plans, de nouvelles combinaisons, ...
Par exemple, dans les finales de partie [2], le meilleur moyen est de procéder par schémas, c'est-à-dire que nous transformons mentalement la position de chacune de nos pièces, de manière à ce que la position résultante nous satisfasse. Ensuite seulement nous calculons les coups et les variantes pour y parvenir. Il faut une certaine imagination pour créer ces schémas.

DESSIN II



[1] Le plus haut titre aux échecs, après celui de Champion du Monde. Le titre est décerné à vie et s'acquiert après d'excellentes performances dans des tournois.
[2] Stade de la partie où il ne reste que très peu de pièces en jeu.

5. La mémoire.

En début de partie, les pièces de chaque joueur sont rangées de part et d'autre de l'échiquier. Il est nécessaire de les développer, c'est-à-dire de les sortir de leur « refuge », de manière à les activer, à leur donner plus de place pour leurs opérations.
Cette première phase d'une partie porte le nom d'ouverture. Il existe de nombreux schémas de développement, variantes, etc. Des joueurs ont écrit de très nombreux articles, livres et encyclopédies traitant des ouvertures, créant ainsi une véritable « théorie des ouvertures ». Le joueur est appelé à mémoriser certaines variantes, à son libre choix, pour gagner du temps lors de la partie. Il doit également avoir en tête certaines combinaisons typiques, des schémas classiques, etc... La mémorisation joue toutefois un petit rôle, à notre avis, par rapport à l'imagination.

6. La combativité.

Les trois résultats possibles d'une partie sont : gain, nul ou perte.
Tout joueur joue pour gagner. Sur l'échiquier, tous les moyens (dans la limite des règles) sont bons pour « mater » le roi adverse ! C'est une véritable petite guerre qui confronte les deux joueurs et chacun va jusqu'au bout de ses possibilités. Souvent, au cours des cinq heures de jeu, attaques, défenses et contre-attaques se sont succédé. Le jeu d'échecs offre ainsi un terrain idéal à l'être humain pour manifester sa combativité, son ... agressivité.
Toutefois, son humeur du moment ne doit nullement influencer les coups joués sur l'échiquier ; sur ce terrain, « on joue d'après la position !» comme le faisait remarquer l'ancien champion du monde José-Raoul Capablanca (1888-1942).

7. La créativité.

Comme nous l'avons déjà écrit, chaque joueur d'échecs qui participe à des tournois possède un « répertoire d'ouvertures », qu'il connaît plus ou moins bien . Cela lui permet d'économiser du temps de réflexion, et d'éviter de commettre des fautes dans les dix premiers coups déjà. Ce répertoire se base souvent sur des variantes indiquées dans des revues, dans des encyclopédies, etc. Pour anéantir la minutieuse préparation de l'adversaire dans ce domaine, il faut sans cesse chercher de nouveaux coups, des améliorations qui le surprendront.
Avant les matches de championnat du monde, chaque joueur recherche, avec des théoriciens des nouveautés qui lui permettront, peut-être, de surclasser son adversaire dans cette « bataille des ouvertures » qui est une des phases primordiales des échecs.
Un bon joueur doit faire preuve de créativité et s'il n'est pas créatif au départ, il peut le devenir rapidement. La créativité joue donc un rôle essentiel aux échecs.

8. L'estime de son adversaire.

L'amateur apprendra vite en jouant aux échecs qu'il faut estimer correctement son adversaire. Beaucoup de joueurs, je n'exclus pas les maîtres, ont tendance à sous-estimer un adversaire plus faible qu'eux et à surestimer un adversaire plus fort. Le joueur qui sous-estime son adversaire aura tendance à jouer beaucoup plus décontracté, il n'analysera pas toutes les variantes jusqu'au bout, il tendra des pièges qui affaibliront sa position, pièges dans lesquels l'adversaire ne tombera pas toujours ! En surestimant notre adversaire, nous nous exposons à jouer passivement, à ne choisir que des variantes solides. En n'estimant pas correctement un adversaire, nous ne jouons plus d'après la position, mais d'après une idée erronée que nous nous sommes faite d'une personne. C'est là une grande erreur !
Le joueur novice doit dès ses premiers pas aux échecs éviter cette erreur. Il doit se dire que l'adversaire contre lequel il joue, s'il le connaît, est un adversaire comme les autres, un « Monsieur X » contre lequel on déploiera la même concentration que celle que nous utilisons contre un joueur que l'on ne connaît pas. Cette restriction n'empêche pas le joueur de préparer sa partie (voir 9. Préparation).

9. L'étude, la préparation, le goût des langues étrangères.

Pour progresser aux échecs, l'étude est le moyen le plus sûr ! J'ai moi-même fait une expérience qui peut le démontrer.
Comme chaque joueur qui prend les échecs au sérieux, j'étudie tous les jours une à deux heures, parfois plus. J'analyse les parties des maîtres, je lis des livres, je consulte des revues et des encyclopédies. J'ai commencé il y a deux ans et demi. Après une année je battais régulièrement des joueurs qui n'étudiaient pas, mais qui jouaient chaque semaine depuis dix ou vingt ans. N'importe quel joueur, à condition d'étudier, peut progresser rapidement et atteindre un excellent niveau, supérieur aux « joueurs de club » (j'entends par là des joueurs qui ne s'entraînent pas).

DESSIN III

La préparation d'une partie d'échecs est très importante. On se procurera des parties de l'adversaire (plus le joueur est connu, plus c'est facile !), on essayera de cerner son répertoire d'ouvertures, son style (positionnel, joueur d'attaque, ...), ses points forts, ses points faibles, ses finales de parties préférées (avec tours, avec fous, ...) et également ses attitudes lors d'une partie. Ainsi l'on se confectionnera son « portrait robot », et il nous sera beaucoup plus facile de l'affronter. Le travail de préparation est personnel ; on recherche tout soi-même, sans se référer aux « on-dit » qui nous amèneraient à sous-estimer ou surestimer notre adversaire. Le joueur développe ainsi ses facultés de recherche, et n'oublions pas qu'aux échecs il n'y a pas de place pour le joueur paresseux.
Au cours de cette préparation ou dans l'apprentissage des échecs, le joueur doit consulter de nombreuses revues. Les plus intéressantes sont souvent en langues étrangères (anglais, allemand, russe, ...) et il se voit obliger de déchiffrer les commentaires, d'où un certain goût pour l'étude de ces langues.

10. La pratique de l'auto-critique.

Souvent, dans les tournois, les deux joueurs, à la fin de leur partie, analysent ensemble celle-ci, cherchent les meilleurs coups, indiquent les variantes auxquelles ils ont pensé. Une fois « à la maison », un bon joueur analyse sa partie et essaie, souvent par curiosité, de chercher les motifs essentiels qui ont provoqué le résultat obtenu. Il se renseigne sur l'ouverture jouée en consultant plusieurs livres. Parfois même il écrit l'analyse.
Les maîtres publient dans diverses revues leurs parties, avec de nombreux commentaires. Le sens de l'auto-critique est ainsi une des qualités que développe la pratique des échecs. En effet il est évident que pour s'améliorer, il faut connaître ses faiblesses (il est inutile de n'améliorer que des points forts !) et pour connaître ses faiblesses il faut être capable de pratiquer (même inconsciemment) l'auto-critique.

11. La maîtrise de soi.

Les parties de tournois durent environ cinq heures, parfois plus. Dans ces parties se succèdent de nombreuses émotions. Certaines parties importantes provoquent de fortes tensions nerveuses de la part des deux joueurs. A la fin d'une de ces parties, les joueurs peuvent parfois être pratiquement épuisés. Par exemple : lors de son match (plus de 30 parties) contre Boris Spasskij, le champion du monde de l'époque, Tigran Petrossian, perdit 7 kilos. Dans ces compétitions de haut niveau, le joueur doit être maître de lui. La moindre défaillance des nerfs, et la partie, si ce n'est le match, est perdu ! L'exemple suivant est frappant : lors des quarts de finale des prétendants au titre mondial (1971) entre Petrossian et Hübner, après six parties nulles très éprouvantes, Hübner perdit la 7e partie et abandonna le match, à bout de nerfs.

DESSIN V

J'espère que par cet article, je vous ai ouvert, humbles lecteurs (!), certains côtés cachés, mais non moins attrayants des échecs, et que les autorités se décideront peut-être un jour à généraliser, en Suisse romande, l'expérience du Valais.

Bière, le 8.2.1980

(à suivre)

LA MULTIPLICATION (tiré à part)

Pour répondre à plusieurs demandes, la rédaction a réédité, sous forme de tiré à part, l'article de Nadia Guillet consacré à la multiplication qui a paru dans les numéros 82 et 83 de 1978.

Ce document de 23 pages peut être obtenu au prix de Fr. 3.80 (Fr. 3.30 par commande groupée de 10 exemplaires et plus), en versant le montant correspondant au CCP MATH-ECOLE GENEVE 12 - 4983.

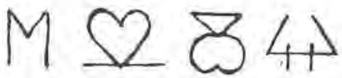
Calcul mental - Revision - Recherche

Tout ce que l'on peut faire avec les chiffres 1, 2, 3 et 4

par Françoise Waridel

Programme : *4e année*
5e et 6e années, même activité, puis y ajouter une virgule.

Le thème de l'activité peut être présenté par la recherche de la signification des signes :



Les élèves sont invités à chercher tout ce que l'on peut faire avec 1 , 2 , 3 et 4. Ils peuvent travailler individuellement ou par équipes de deux, selon leur caractère.
Il est bon que le premier moment de recherche soit réservé à une recherche « sauvage ». C'est de ce moment que dépendront la richesse et la variété des activités futures.
Afin que certains élèves ne se maintiennent dans les mêmes inventions, il est recommandé, après un temps de recherche, de faire une synthèse collective des découvertes. Celles-ci sont présentées succintement par les enfants eux-mêmes à l'ensemble de la classe. Elles peuvent être classées en activités de calcul, en activités de classement ou en activités non mathématiques.
Cette mise en commun, conduite par l'enseignant, stimule les élèves et provoque chez la plupart le désir de poursuivre la recherche.

Voici les activités présentées par les élèves (de 4e, 5e et 6e).

Activités de calcul

Additions :

$1 + 2 + 3 + 4 + 1 + 2 + 3 + 4 + 1$ ...
$12 + 23 + 34 + 41$ ...
$123 + 4$ ou $234 + 1$ ou $321 + 4$ ...
$1234 + 4321$ ...
...

Soustractions :

$34 - 12$ $321 - 4$ $4321 - 1234$
$1234 - 1 - 2 - 3 - 4$ ...
$123 - 4$ $234 - 1$ $431 - 2$ ...
...

Multiplications : $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ ...
2×134 2×341 2×431 ...
12×34 12×43 21×34 ...
...

Divisions : $134 : 2$ $312 : 4$
$1234 : 2$ $2134 : 2$ $4312 : 2$ ...

— Calculs en chaînes : exemple $(12 + 34 - 43) \times 21$.
— Combinaisons d'opérations : à l'aide de 1, 2, 3, 4, trouver 1, 2, 3 , 4; avec une opération, exemples: $4 - 1$; $1 + 3$ ...
avec deux opérations : $4 - 2 + 1$; $4 - (3 \times 1)$ ...
— Quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir à l'aide des quatre opérations et des quatre nombres utilisés une fois et une seule fois ?
Exemples : $(1 + 4) \times 2 \times 3 = 30$; $(1 + 3) \times 2 \times 4 = 32$; $(1 + 2) \times 3 \times 4 = 36$.

Même démarche, mais le plus petit nombre (rester dans **IN**). Exemples : $(4 - 3) - 1 \times 2 = 0$; $(4 + 1) - 2 : 3 = 1$.
— Tableaux : ne remplir que les cases dont le résultat des opérations est égal à 1, 2, 3, 4.

+	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

−	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

×	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

:	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

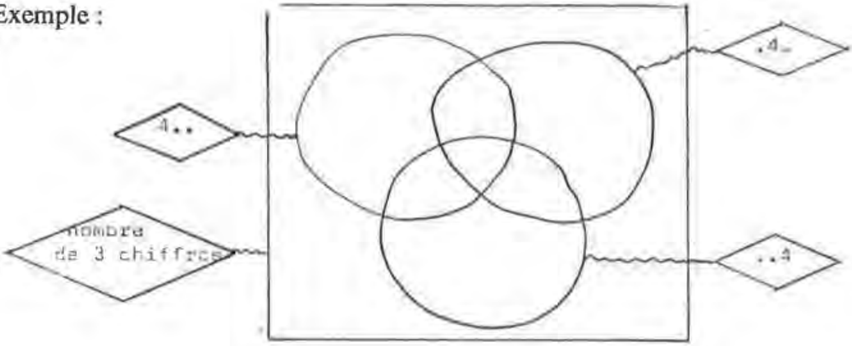
Activités de classement

— Recherche de tous les nombres de deux chiffres que l'on peut créer avec ces quatre chiffres.
... tous les nombres de trois chiffres ...
... tous les nombres de quatre chiffres ...

— Classement de ces nombres :
— par ordre croissant ;
— par ordre décroissant.

— Classement de ces nombres :
. à l'aide d'un schéma en arbre ;
. dans un diagramme de Carroll ;
. dans un diagramme de Venn.

Exemple :



— Relations d'ordre. Exemple : « ... est plus petit que ... »

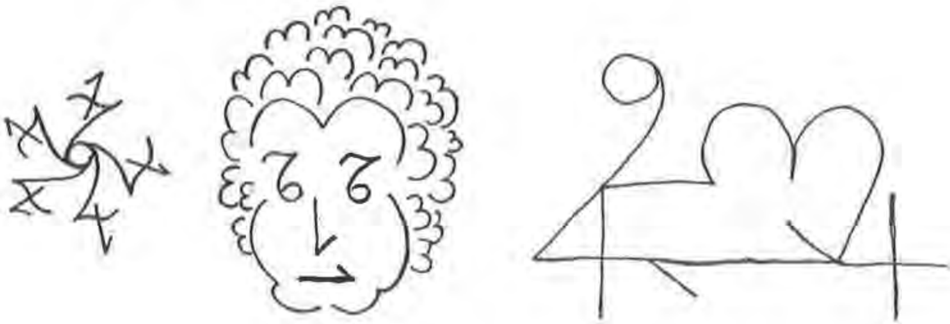
234 243
324 342
423 432

— Relation d'équivalence.
Exemple : « ... a le même nombre de dizaines que ... »

123	421	431	234	412
224	322	132	444	313

Activités non mathématiques

— Recherche de proverbes ou expressions utilisant ces chiffres. Exemples : « deux c'est assez, trois c'est trop »; « jamais deux sans trois »; monter les escaliers 4 à 4.
— Création de dessin. Exemples :



Prolongements pour la 5e et 6e années

Mêmes activités, avec une virgule.

- Additions , soustractions, multiplications, divisions, à l'aide de nombres à virgule. Exemples : 12,3 $\times$ 4 ; 12,34 $\times$ 43,21 ; 12,4 : 4 ; ...
- Recherche de tous les nombres à deux chiffres possibles ; place de la virgule. Puis classement par ordre croissant. Exemple : 1,2 1,3 1,4 2,1 2,3 ...
- Idem, tous les nombres à trois chiffres ; place de la virgule : 1,23 12,3 1,24 12,4 1,34 13,4 ... et classements divers.

En 5e et 6e, un autre prolongement peut être réalisé par la création de fractions. Cf. Activités mathématiques 7 de Paling/Banwell/Saunders, Editions Agence internationale, Pully, manuel officiel pour la 7e année primaire du canton de Vaud.

A discuter

$$\boxed{1,\ 2,\ 3,\ 4}$$

Voici quelques fractions formées avec les nombres 1, 2, 3 et 4.

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{2}$$

Invente d'autres fractions avec ces nombres et note-les.
Est-ce que certaines de ces fractions ont la même valeur ?
Quelle est la fraction qui a la plus petite valeur ?
Quelle sont les fractions supérieures à 1 ?
Quelle est la fraction qui a la plus grande valeur ?
Ecris ces fractions dans l'ordre croissant.

Après le temps de recherche et de découverte, chacune de ces activités peut être reprise

- pour pratiquer du calcul oral,
- pour revoir et affiner des notions déjà travaillées,
- pour entraîner l'enfant à manipuler les chiffres, les nombres et les signes opératoires,
- pour sensibiliser les élèves à l'exploitation d'un thème en mathématique,
- pour développer la continuité dans l'effort.

Enfin, de telles activités, issues de l'imagination des camarades de la classe, sont éminemment plus motivantes que celles que peut proposer le maître. Les élèves se prennent au jeu et, souvent, vont plus loin que ce que le maître n'osait souhaiter.

Problème de la vie courante – une suggestion
par Frédéric Oberson

Les problèmes dits de la vie courante doivent généralement être tirés de la vie des élèves et apportés par eux. Le maître propose, à certaines occasions, l'étude de situations pouvant être mathématisées. Celles-ci dépendent des conditions locales, de l'actualité, de l'intérêt des élèves. Les problèmes donnés à titre d'exemple dans la méthodologie et dans les documents des élèves doivent en susciter d'autres.

Mathématique Cinquième année,
Méthodologie-Commentaires, Introduction page 11

Nul ne contestera, les auteurs sans doute moins que quiconque, qu'un certain hiatus existe entre ce paragraphe de l'introduction des notes méthodologiques et les problèmes de la vie courante proposés à la fin de NR-2 (Cinquième année) ou dans le manuel (NR no 31, par exemple).
Ces problèmes, tout comme les problèmes de l'enseignement traditionnel d'autrefois, relèvent en effet plus de la vie courante des adultes que de celle des enfants de cinquième année primaire. Et si, en soi, tout enseignant est capable de puiser dans le contexte de la vie enfantine pour présenter, en accord avec la remarque de l'introduction, une situation-problème motivante pour la classe, il n'en demeure pas moins que l'ampleur du programme de cinquième le dissuade bien souvent de s'engager dans cette voie quelque peu hasardeuse.
Il se peut donc que l'activité décrite ci-dessous constitue une suggestion intéressante, susceptible d'aider le maître de cinquième parvenant au terme de l'activité NR-2.

Les circuits LEGO

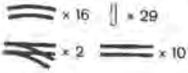
Première étape :

Demander à un élève possédant un train LEGO d'amener en classe le matériel LEGO nécessaire à la réalisation de quelques portions de circuits comprenant :
— des rails droits
— des rails courbes
— des croisements
— des aiguillages.

Il s'agit de permettre aux élèves ne connaissant pas ce matériel de se familiariser avec celui-ci. Des constations importantes pour la suite seront peut-être déjà faites :
— deux types d'aiguillage (droit - gauche) ;
— les traverses des aiguillages ne sont pas amovibles ;
— etc.

Deuxième étape :

Distribuer à chaque élève la fiche CIRCUIT LEGO (voir pages 16)
— Signification de



— Contrôle pour l'un ou l'autre des circuits présentés.
On s'apercevra, par exemple, qu'il n'est pas fait de distinction entre aiguillage droit et aiguillage gauche, que les traverses fixes des aiguillages ne sont pas comptées etc.
— Contenu et prix des boîtes nos 154, 156, 157 et 159. Pas de vente au détail. Etc.

Troisième étape :

Problème No 1
Combien vais-je payer, au minimum, si je dois acheter tout le matériel nécessaire à la construction du circuit C ?
Idem pour les circuits E, F, J.
Indiquer simplement aux élèves qu'il pourrait être intéressant d'utiliser un tableau à double entrée pour la résolution du problème.
A titre d'exemple, voici la résolution présentée par une élève pour le circuit C.

UNITES : Prix en franc

	154	1	156	4	157	3	Total
Traverses Blanches	/	/	9	36	9	27	63
Barres de rails droits	/	/	8	32	/	/	32
Barres de rails courbes	/	/	/	/	8	24	24
Aiguillages	2	2	/	/	/	/	2
Prix	7 80		29 20		22 50		59 50

MA REPONSE : En achetant le materiel nécessaire à la construction du circuit C j'ai payé au minimum 59.50

Problème No 2
J'ai obtenu de mes parents la permission de m'acheter tout le matériel LEGO nécessaire à la construction du circuit J. Aurai-je assez avec les deux cents francs que j'ai retirés de mon carnet d'épargne ?

UNITES : Prix en francs

	154	4	156	7	157	7	159	3	Total
traverses blanches	/	/	9	63	9	63	8	24	150
Aiguillages	2	8	/	/	/	/	/	/	8
Croisements	/	/	/	/	/	/	1	3	3
Paires de rails droits	/	/	8	56	/	/	8	24	80
Paires de rails courbes	/	/	/	/	8	56	/	/	56
Prix	3120		51.10		52.50		27.90		162,70

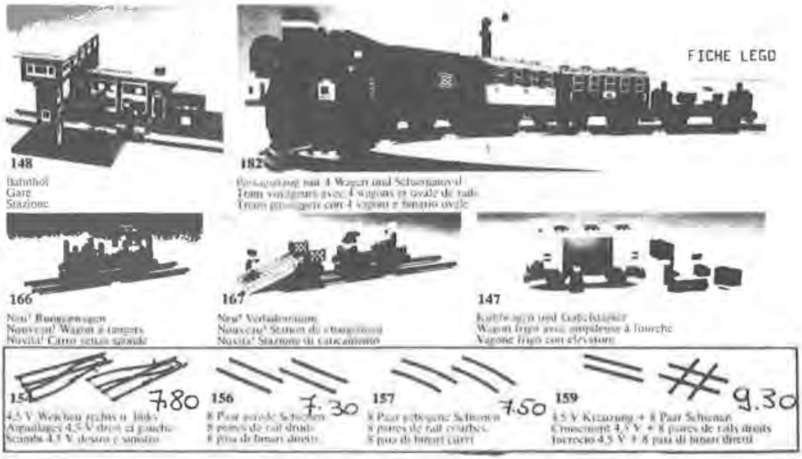
MA REPONSE : Avec les 200 francs que je possède je peux acheter le circuit J

Il est naturellement aisé d'inventer d'autres problèmes.

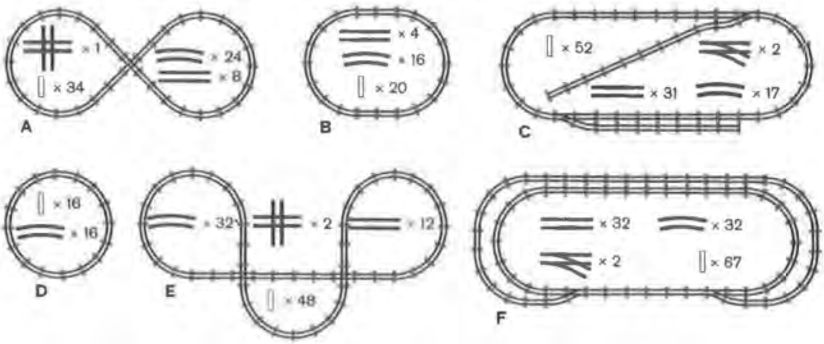
Problème No 3
J'ai reçu, à Noël, une boîte d'aiguillage, trois boîtes de rails droits et trois boîtes de rails courbes. Quels sont les circuits de la fiche LEGO que je peux construire ? Combien devrais-je dépenser au minimum pour pouvoir construire le circuit J ?
Etc.

Cette activité a été réalisée dans quelques classes de Fribourg et environs, à la satisfaction tant du maître que des élèves. Il est certain que, dans la Romandie, plusieurs maîtres s'essaient de temps à autre à des réalisations personnelles du type de celle présentée ci-dessus. Math-Ecole se ferait un plaisir d'en prendre connaissance et de les proposer à ses lecteurs.

FICHE LEGO



Pour chacune des boîtes d'éléments de circuit (nos 154, 156, 157, 159), la vendeuse a indiqué le prix de la boîte.



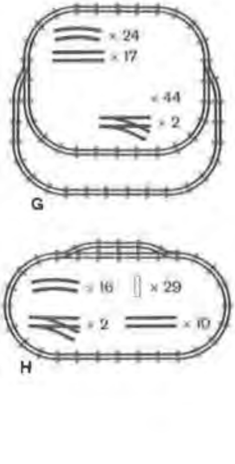
Précisions sur le contenu des boîtes :

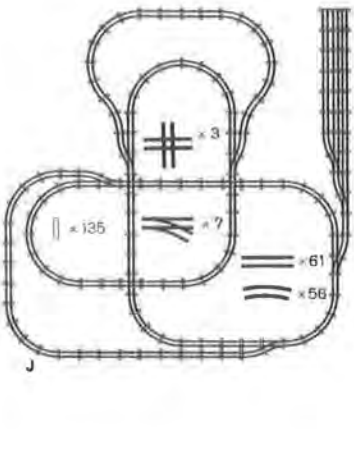
no 154 2 traverses blanches sont déjà fixées à chacun des aiguillages

no 156 9 traverses blanches

no 157 9 traverses blanches

no 159 8 traverses blanches



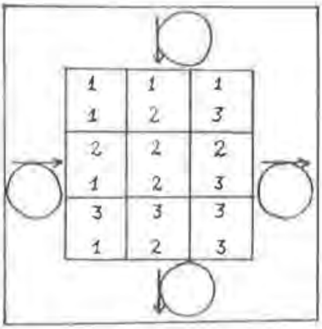


La géométrie où on ne l'attendait pas

par René Dénervaud

Aujourd'hui, les élèves sont amenés à construire la géométrie affine plane. Pour tendre vers un tel but, l'enseignant doit être lui-même dans un état constant de chercheur. L'article qui suit propose au lecteur de construire un modèle de géométrie affine plane inhabituel, au travers des activités réalisables dans les classes primaires, bien que le but visé soit surtout une approche de la notion de plan affine à l'usage du maître. Aussi se contentera-t-on de construire un tel modèle, sans exploiter les possibilités de la géométrie affine.

1. Matériel de base.



— Un damier de neuf cases que nous coderons pour des raisons pratiques ;
— un pion représentant un cheval se déplaçant sur les cases du damier ;
— des jetons qui indiqueront les déplacements à effectuer (« machines »).

Le codage des cases a été choisi de façon que le chiffre du haut nous indique sur quelle ligne on se trouve, et le chiffre du bas sur quelle colonne.

2. Déplacements.

Pour le moment, on distinguera deux types de déplacements :

a) Les déplacements horizontaux :
Ils se font de la gauche vers la droite, en comptant les cases, et en « collant » les dernières cases aux premières. Par exemple, si le pion est sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}$, et qu'on veuille le déplacer horizontalement de deux cases, il se trouvera sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}}$ après être passé sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}$.

b) Les déplacements verticaux :
Ils se font du haut vers le bas, en comptant les cases, et en « collant » les dernières cases aux premières. Par exemple, si le pion est sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}}$, et qu'on veuille le déplacer verticalement de deux cases, il se trouvera sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}}$ après être passé sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}$.

3. Codage des déplacements.

Soit la machine dont l'effet est de faire avancer horizontalement de deux cases. Si le pion est sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}}$, il ira donc sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}}$. On constate aisément que, peu importe la position du pion au départ, le chiffre placé en haut dans le code de la case ne subira pas de modification : en se déplaçant horizontalement, on ne change pas de ligne, donc on aura toujours le même numéro de ligne. Pour cette raison, le code que nous proposons pour cette machine sera :

0 ← Ne change pas de ligne (= déplacement horizontal)

2 ← Avance de deux cases.

De manière analogue, nous proposons :

1 ← Avance d'une case

0 ← Ne change pas de colonne (= déplacement vertical)

Ces machines peuvent être dessinées sur des jetons qu'on cachera dans un sac, et le jeu peut commencer. On peut, par exemple, se fixer comme objectif d'atteindre une case donnée en tirant le moins de jetons possible, ou de passer sur toutes les cases du damier, ou autre au gré de l'imagination des joueurs.

Quelles machines suffisent ?

Si, par exemple, on ne considère que les déplacements horizontaux, on observe que seules trois machines sont vraiment nécessaires :

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ = déplacement (horizontal) d'une case

$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ = déplacement (horizontal) de deux cases

$\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ = déplacement (horizontal) de trois cases

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ = pas de déplacement

En effet, la machine $\binom{0}{5}$ est équivalente à la machine $\binom{0}{2}$ dans notre situation, et on a des résultats analogues à ceux mis en évidence par le jeu OP-8 de troisième primaire, ou par l'activité EF-1 de cinquième, à condition de remplacer l'étoile à cinq branches qui y est proposée par une étoile à trois branches.
On pourra donc composer ces machines entre elles : «Si j'ai tiré d'abord $\binom{0}{2}$ et ensuite $\binom{0}{1}$, c'est comme si j'avais tiré $\binom{0}{0}$.» Nous pouvons coder cette situation de la manière suivante :

$$\binom{0}{1} \circ \binom{0}{2} = \binom{0}{0}$$

Deuxième tirage   Premier tirage

et établir la liste de toutes les possibilités au moyen d'une table :

$\circ$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$
$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$
$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{0}$
$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$

Sur la table, nous pouvons constater que :

a) La composition de ces machines est commutative, c'est-à-dire qu'en prenant d'abord une première machine, puis une deuxième, tout se passe de la même façon que si on avait pris d'abord la deuxième, puis la première.

b) On a un élément neutre (machine à «rien changer») : $\binom{0}{0}$

c) Chaque machine a une machine inverse (si une machine fait passer d'une case A à une case B, sa machine inverse fait passer de la case B à la case A) :

— la machine inverse de $\binom{0}{1}$ est $\binom{0}{2}$

— la machine inverse de $\binom{0}{2}$ est $\binom{0}{1}$

— la machine inverse de $\binom{0}{0}$ est $\binom{0}{0}$

Par ailleurs, la composition des machines est associative, ce que nous illustrons au moyen de l'exemple ci-dessous. L'examen de tous les cas possibles serait nécessaire pour avoir une démonstration de cette propriété, et nous laissons cet exercice aux lecteurs.

Illustration pour l'associativité :

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

égalité

$$\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

On résume ces quatre propriétés en disant que $H = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$ muni de la composition des machines a une structure de groupe commutatif [1]. De manière tout à fait analogue, en travaillant dans l'ensemble des machines à déplacements verticaux, on arrive à la conclusion que $V = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$ muni de la composition des machines, a une structure de groupe commutatif.

5. Si on n'a pas assez de machines.

Dans le sac, nous avons donc un jeton par machine, ce que nous pouvons représenter par :

$$H \cup V = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

En tirant deux machines de même type (type «horizontal» ou type «vertical»), on a vu qu'on pouvait remplacer la chaîne par une seule machine équivalente (et du même type). On ne peut éviter le rapprochement avec les machines numériques :

— une chaîne de deux machines multiplicatives est équivalente à une machine multiplicative ;

— une chaîne de deux machines divisives est équivalente à une machine divisive.

Au même titre qu'une chaîne « mixte » du type $(\times 2)\ (:3)$ sera l'occasion d'introduire les codes fractionnaires, sous la forme $(\times 2)\ (:3) = \left(\times \frac{2}{3}\right)$.

---

[1] Rappel : Un ensemble E, muni d'une loi de composition interne *, a une structure de groupe si, et seulement si :

a) * est associative ;

b) * admet un élément neutre dans E ;

c) chaque élément de E a, dans E, un élément symétrique pour *.

Si, de plus, * est commutative, on parle alors de groupe commutatif.

la chaîne $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ sera l'occasion d'introduire de nouvelles machines :

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

On va donc compléter notre sac de jetons avec toutes les possibilités qui nous sont offertes, et on peut représenter la situation ainsi :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right\}$$

Nous laissons le lecteur se convaincre que S, muni de la composition des machines, a une structure de groupe commutatif.
Le jeu peut donc se faire avec ces neuf machines.

6. Essayons un autre jeu.

On tire un jeton du sac (correspondant aux neuf machines de S). On déplace plusieurs fois le pion en respectant la consigne obtenue lors du tirage. Est-il possible de passer sur toutes les cases du damier (en gardant le même jeton) ?

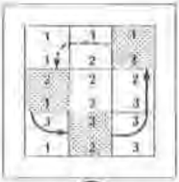
Par exemple, supposons que le pion soit sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}}$ et que le jeton tiré corresponde à la machine $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Le pion ira d'abord sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}}$, puis sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}$, puis sur la case $\boxed{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}}$, c'est-à-dire qu'il sera revenu sur la case de départ. Par suite, l'itinéraire possible dans ce cas peut être représenté par l'ensemble suivant (sans tenir compte de l'ordre de passage) :

$$D = \left\{ \boxed{\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}} ; \boxed{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} ; \boxed{\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}} \right\}$$

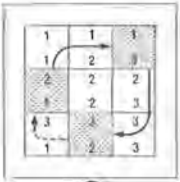
On peut encore faire quelques observations sur cet exemple :

a) Avec la même machine $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, on obtient également D si la case de départ est $\boxed{\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}}$ ou $\boxed{\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}$ au lieu de $\boxed{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}}$, c'est-à-dire que les cases de D peuvent toutes être prises comme départ.

b) En partant de n'importe quelle case de D, et en considérant la machine $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, l'itinéraire est de nouveau D.



$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

Les mêmes cases sont «visitées»: les deux machines sont inverses l'une de l'autre.

Il n'est donc pas possible de couvrir tout le damier en partant d'une case de D et en se déplaçant selon une des deux machines $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. De même, il est évident que la machine $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ne permettra pas de couvrir le damier, puisqu'on restera sur la même case, aussi nous ne la considérerons plus dans la suite.

Pour savoir s'il existe un itinéraire qui passe par toutes les cases du damier, il faut dresser la liste de tous les itinéraires et les examiner. Comme notre système de « fabrication » d'itinéraires nécessite toujours une machine (parmi huit) et une case (parmi neuf) supposée être la position initiale du pion, on peut dresser la table suivante, en ne tenant compte que des cases visitées, sans regarder ni la case de départ, ni le sens du déplacement :

machine → / case de départ ↓	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$	
	machines inverses		machines inverses		machines inverses		machines inverses	

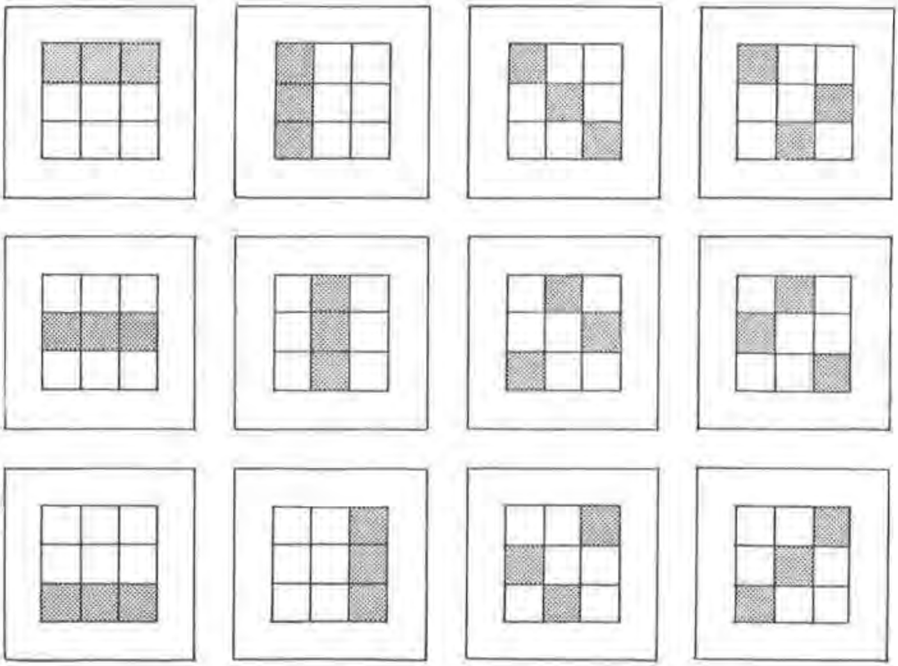
Dénombrement des itinéraires.

En partant d'une même case, deux machines inverses visitent les mêmes cases (mais dans l'ordre inverse), ce qui fait qu'il n'est pas nécessaire de remplir toutes les cases du tableau précédent. De même, les flèches qui sont reliées entre elles nous montrent où sont des itinéraires identiques (pour un même itinéraire, peu importe la case de départ !).

On a donc deux résultats :

a) chaque itinéraire visite exactement trois cases du damier : il n'est donc pas possible de couvrir tout le damier avec un seul jeton ;

b) on a exactement douze itinéraires distincts qu'on peut également représenter chaque fois sur un damier :



Avec cette disposition, on voit que deux itinéraires d'une même colonne n'ont aucune case commune, et nous parlerons alors d'itinéraires « parallèles ». On voit également que chaque case est exactement sur quatre itinéraires différents.

7. Trois questions à propos des itinéraires.

Le lecteur est invité à répondre à ces questions (en s'aidant des représentations d'itinéraires) avant de consulter les réponses.

a) Si on prend au hasard deux cases différentes sur le damier, combien d'itinéraires distincts les recouvrent ?

b) Etant donnés un itinéraire I et une case C qui n'est pas sur cet itinéraire, combien peut-on trouver d'itinéraires «parallèles» à I et passant par la case C ?

c) Est-il possible de trouver trois cases distinctes sans qu'elles soient sur un même itinéraire ?

Réponses :

a) On aura toujours un itinéraire, et un seul.

b) On aura toujours un itinéraire, et un seul.

c) Oui, par exemple les cases $\boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}$ et $\boxed{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}}$

8. Et la géométrie affine plane ?

La géométrie affine plane s'intéresse surtout aux propriétés et transformations d'un plan affine dont nous donnons la définition mathématique :

On appelle plan affine un ensemble dont les éléments sont appelés points, dont certains sous-ensembles sont appelés droites, et vérifiant les propriétés suivantes :

a) Deux points distincts appartiennent toujours à une droite, et une seule.

b) Quelle que soit une droite D et quel que soit un point P pris hors de la droite D, il existe toujours une droite D', et une seule, telle que P soit sur D' et D' n'a aucun point commun avec D.

c) Il existe au moins trois points non alignés (c'est-à-dire qui ne sont pas sur une même droite.

En revenant au damier, on s'aperçoit qu'on a donc construit un plan affine, les points étant les cases et les droites étant les itinéraires. Le plan affine qu'on a ainsi construit est aussi appelé plan à neuf points. On peut également construire un plan affine à quatre points, à vingt-cinq points, à quarante-neuf points, ..., en partant chaque fois d'un damier carré, pourvu que le nombre de cases d'un côté soit un nombre premier !

J. A. 1211 GENEVE 6

TABLE DES MATIERES

Des chiffres...!, *G. Guélat* 1
Initiation au jeu des échecs, *P. Charrière* 2
Tout ce que l'on peut faire avec les chiffres 1, 2, 3 et 4, *F. Waridel* . . 9
Problème de la vie courante — une suggestion, *F. Oberson* 13
La géométrie où on ne l'attendait pas, *R. Dénervaud* 17

Abonnements:

Suisse: F 12.—, Etranger F 14.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, CH-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie typo-offset Fiorina & Burgener, 1950 Sion