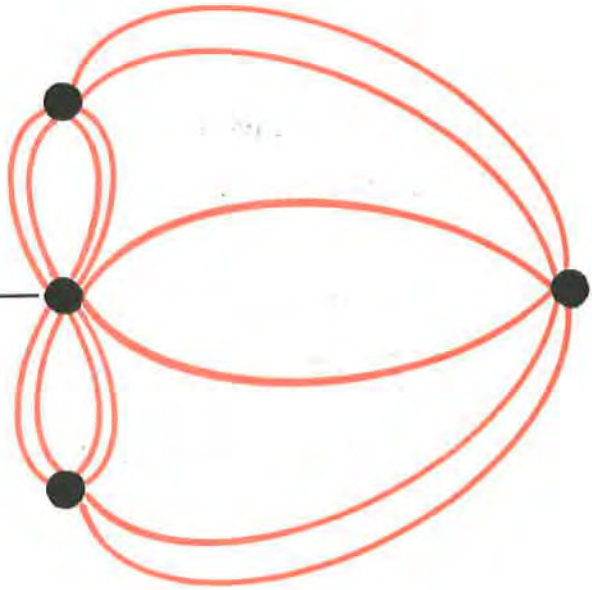
53



MATH ECOLE

MAI 1972
11e ANNÉE

Un choix exceptionnel de matériel didactique

Blocs d'attributs (Blocs logiques) en différentes exécutions.

Blocs multibases
Edition Dienes et édition en couleurs (se rapportant aux réglettes Cuisenaire).

Réglettes Cuisenaire

Balance algébrique

Matériel pour exercices ensemblistes:
gommettes, animaux miniatures en bois, jetons en carton, etc.

Logimath
Boîte à fiches perforées pour l'apprentissage de l'usage des fiches d'ordinateurs.

Matériel en papier velouté
pour l'emploi au tableau molleton.

Demandez nos prospectus spéciaux

Franz Schubiger, 8400 Winterthour
Mattenbachstrasse 2

MATH ECOLE MAI 1972 11e ANNÉE 53

La structure de groupe

par Ch. Burdet

Introduction

En 1831, à l'âge de 21 ans, le génial mathématicien français, Evariste Galois trouve la solution d'un problème qui tourmente les mathématiciens depuis plusieurs siècles. Il s'agit de la résolution des équations par radicaux.

Pour situer le problème, signalons que, lorsque Evariste Galois se penche sur la question, on sait résoudre depuis fort longtemps une équation comme celle-ci:

$$4x - 12 = 0$$

On constate que l'égalité est satisfaite si x est remplacé par le nombre 3. Cette équation est du premier degré parce que l'inconnue, la lettre x, est à la puissance un.

On sait également résoudre une équation du deuxième degré, c'est-à-dire une équation dans laquelle l'inconnue, la lettre x, apparaît à la puissance deux.

Par exemple, l'équation:

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

a deux racines:

$$x = 1 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

Cela signifie que si l'on remplace l'inconnue par le nombre 1, ou si on la remplace par le nombre $-\frac{3}{2}$, on constate que l'égalité est vérifiée. Une formule permet d'ailleurs de trouver rapidement les nombres qui conviennent. On sait encore reconnaître les équations du second degré dans lesquelles aucun nombre réel ne peut remplacer x. C'est le cas, par exemple, pour l'équation:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Au début du XVIe siècle, un italien, Scipion del Ferro, trouve, par un procédé de calcul assez compliqué, le moyen de résoudre l'équation générale

du troisième degré, équation dans laquelle l'inconnue apparaît à la puissance trois. Peu de temps après, un autre Italien, Ferrari, arrive à la résolution de l'équation générale du quatrième degré.

En ce qui concerne les équations de degré supérieur à quatre, les équations dans lesquelles l'inconnue apparaît à une puissance plus grande que quatre, aucun procédé ne permet de les résoudre. Malgré les recherches nombreuses et laborieuses des mathématiciens des XVIIe et XVIIIe siècles, on ne connaît pas le moyen de trouver les racines de telles équations.

En fait, on ne possède pas de règle générale pouvant s'appliquer à une équation quelconque.

Le problème de la résolution des équations par radicaux est un des plus importants de l'algèbre puisque, jusqu'au début du XIXe siècle, les mathématiciens considèrent cette science comme celle qui a pour objet l'analyse des équations.

Il appartient donc à Evariste Galois de trouver la vraie solution à ce problème en donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation soit résoluble par radicaux.

Dès lors, une équation étant donnée, il est possible, avant d'effectuer le moindre calcul, de dire si l'on peut trouver ses racines en utilisant les seuls signes de l'algèbre.

Les résultats de Galois sont remarquables. Ils donnent la réponse aux questions que se sont posées des générations de mathématiciens.

Mais ce qui est plus remarquable encore, c'est la méthode utilisée. Comme il le dit lui-même, «il substitue les idées aux calculs». Cette méthode est si différente de celles employées par les algébristes des siècles précédents que certains déclarent:

«Il y a les mathématiques qui ont existé avant Galois et les mathématiques qui existent depuis Galois.»

Qu'est-ce qui permet à Evariste Galois de réussir si brillamment dans un domaine où tant de mathématiciens ont échoué?

Quelle est donc l'idée centrale qui guide ce génie dans ses travaux?

La clef du problème est une notion élémentaire, c'est la **notion de groupe.**

Galois n'est pas le premier à expliciter cette notion. D'autres mathématiciens, Cauchy en particulier, sont amenés à la considérer, sous l'aspect des groupes de permutations, dès le début du XIXe siècle. C'est en l'approfondissant et en la développant que Galois obtient ses résultats décisifs en algèbre. Pour cette raison, il est en fait le créateur de la théorie des groupes.

Cette théorie est si féconde qu'elle connaît dès le dernier quart du XIXe siècle une fortune extraordinaire. Au début du XXe siècle, elle apparaît aux yeux des mathématiciens comme le joyau des mathématiques. Nous pourrions reprendre de nombreux exemples comme celui de la «résolution des équations par radicaux» pour montrer que l'idée de groupe, sous ses formes diverses donne la réponse à des problèmes fondamentaux que l'on se pose dans des domaines aussi variés que:

— l'analyse,
— la géométrie,
— la mécanique,
— la physique théorique.

En 1910, dans son fameux «programme d'Erlangen» le mathématicien Félix Klein montre qu'en mettant à la base de la géométrie élémentaire la notion de groupe de transformations on rend l'exposé plus cohérent et plus riche. Il est amené à faire de cette branche des mathématiques un simple chapitre de la théorie des groupes.

Evariste Dupont, dans son ouvrage «Apprentissage mathématique» déclare: «Pendant la première moitié du XXe siècle, il n'y a pas eu de grand mathématicien créateur qui n'ait à un moment quelconque exploité ou enrichi la théorie des groupes.

Ce devrait être l'œuvre de la deuxième moitié de ce siècle de féconder l'enseignement élémentaire du fruit de ces travaux.»

Quelle est donc cette notion de groupe ou plutôt, pour être plus précis, la structure de groupe qu'aucun enseignant de notre temps ne devrait ignorer?

La notion de structure

Précisons d'abord la notion de structure. Pour cela, nous prendrons deux exemples.

Dans la classe, nous formons l'ensemble E, un ensemble fini, qui comprend cinq élèves:

$$E = \{\text{André; Bernard; Claude; Daniel; Emile}\}$$

Supposons que nous avons pris l'ensemble des élèves de la première colonne. Si l'on ne dit rien de plus des éléments de E, l'ensemble est dit «amorphe». Nous pouvons définir dans cet ensemble une relation, par exemple:

$\mathscr{R}$: «... est plus âgé que...»

Cette relation donne à E une certaine forme, l'ensemble n'est plus «amorphe». On dit qu'il est muni d'une structure.

Choisissons maintenant un ensemble infini, l'ensemble **Z** des entiers positifs ou négatifs.

Nous notons:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots ; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$$

Pour que cet ensemble ne soit pas «amorphe», nous pouvons définir dans **Z** une relation. Par exemple:

$\mathscr{S}$: «... est supérieur à...»

L'ensemble est muni d'une structure.

La relation permet de mettre en correspondance les éléments de **Z**. On peut noter:

6 est supérieur à 4;
0 est supérieur à —3; etc.

ou plus simplement:

$$6 \mathrel{\mathscr{S}} 4;$$
$$0 \mathrel{\mathscr{S}} -3; \text{ etc.}$$

Dans l'ensemble **Z**, on peut aussi définir une opération, l'addition par exemple. **Z** est alors muni d'une seconde structure.

L'addition permet de faire correspondre à des couples, dont les composantes appartiennent à **Z**, des éléments de **Z**.
On peut noter:

à 4 et 2, l'addition fait correspondre 6;
à 3 et —1, elle fait correspondre 2; etc.

ou plus simplement:

$$4 + 2 = 6;$$
$$3 + (-1) = 2; \text{ etc.}$$

L'ensemble **Z** peut encore être muni d'autres structures.
D'une manière générale, nous disons:

> Un ensemble est muni d'une structure, si l'on définit dans cet ensemble une ou plusieurs relations ou opérations.

Lorsque nous sommes en présence d'une structure de groupe, nous nous intéressons à un ensemble muni d'une opération qui possède un certain nombre de propriétés.

Indiquons brièvement les principales propriétés que peut posséder une opération. Ces propriétés sont aussi les plus intéressantes et sont justement celles que l'on rencontre dans le groupe.

Nous partirons d'un cas particulier en revenant à l'ensemble **Z** des entiers relatifs.

Propriétés que peut posséder une opération

1. L'addition dans **Z** est une opération **interne**.

Cela signifie que l'élément qui correspond à tout couple dont les composantes appartiennent à **Z** est un élément de **Z**.

En d'autres termes, si l'on additionne deux entiers relatifs, on obtient encore un entier relatif.

De même, si nous définissons dans **Z** la multiplication, nous observons que cette opération est interne dans cet ensemble.

En revanche, la division dite exacte n'est pas une opération interne dans **Z**. On a bien: à 15 et 3, la division fait correspondre 5 qui est un élément de **Z**, mais: à 15 et 6, la division ne fait correspondre aucun élément de **Z**; le résultat de la division «15 : 6» n'est pas un élément de **Z**.

2. L'addition dans **Z** est une opération **associative**.

Cela signifie que si l'on doit additionner trois entiers relatifs quelconques, on peut le faire en associant les éléments d'une manière ou d'une autre sans que pour autant le résultat soit différent.

Par exemple, dans l'addition «6 + 12 + 8», nous pouvons calculer d'abord «6 + 12», puis additionner le résultat partiel obtenu (18) au nombre 8. Nous indiquons cette manière de faire en utilisant des parenthèses qui nous renseignent sur l'ordre des calculs:

$$«(6 + 12) + 8»$$

Il est évidemment possible d'additionner d'abord 12 et 8 puis d'ajouter à 6 le résultat partiel obtenu (20). Nous le notons:

$$«6 + (12 + 8)»$$

Dans les deux cas, la somme finale est la même. Nous pouvons donc écrire:

$$(6 + 12) + 8 = 6 + (12 + 8)$$

On vérifie aisément que ce qui est vrai pour les nombres 6, 12 et 8, est vrai quels que soient les entiers relatifs qui peuvent être choisis.

La propriété associative de l'addition dans **Z**, se note:

Quels que soient x, y, z, éléments de **Z**:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Un raisonnement semblable peut être fait pour la multiplication. Cette opération est associative dans **Z**.

En revanche, l'opération qui fait correspondre à deux entiers relatifs leur demi-somme n'est pas une opération associative. Nous la désignerons par le signe $\star$. Il serait possible de l'appeler «moyenne arithmétique de deux nombres». Nous constatons par exemple que:

$$(2 \star 6) \star 10 \neq 2 \star (6 \star 10)$$

En effet: $2 \star 6 = 4$, parce que la «moyenne arithmétique» de 2 et de 6 est 4, et $4 \star 10 = 7$; 7 est le résultat du membre de gauche dans l'inégalité; alors que $6 \star 10 = 8$ et $2 \star 8 = 5$; 5 est le résultat du membre de droite dans l'inégalité. Notons au passage que cette opération, notée par le signe $\star$, n'est pas une opération interne dans **Z**.

3. L'ensemble **Z** possède un élément particulier pour l'addition, c'est le nombre 0. On l'appelle **élément neutre pour l'addition.**

Cette particularité est notée de la manière suivante:

Quel que soit x, x élément de **Z**:

$$x + 0 = x \text{ et } 0 + x = x.$$

Quelques exemples permettent de vérifier cette propriété:

$$2 + 0 = 2 \text{ et } 0 + 2 = 2$$
$$(-6) + 0 = (-6) \text{ et } 0 + (-6) = (-6)$$

La multiplication définie dans **Z** a aussi un élément neutre, c'est le nombre 1. Nous savons que:

Quel que soit x, x élément de **Z**:

$$x \cdot 1 = x \text{ et } 1 \cdot x = x$$

Il n'est pas possible de trouver un élément neutre pour la division dans **Z**, ni pour l'opération ★ que nous avons appelée «moyenne arithmétique de deux nombres».

4. Dans **Z** muni de l'addition, nous pouvons trouver pour chaque élément son **symétrique**.

Cela signifie qu'à un élément quelconque de **Z** correspond un second nombre, pas nécessairement distinct du premier, tel que la somme de ces deux éléments donne l'élément neutre, c'est-à-dire zéro.

Plus simplement, nous pourrions dire que chaque entier relatif peut être «annulé», en effectuant l'addition, par un second nombre.

Le symétrique de 2 est —2.

En effet, à 2 et —2, l'addition fait correspondre le nombre 0.

Le symétrique de —5 est 5 car $(-5) + 5 = 0$.

Le symétrique de 0 est lui-même puisque $0 + 0 = 0$.

Dans **Z**, à part le nombre 1, aucun élément n'a de symétrique pour la multiplication. On ne peut pas faire correspondre à un entier relatif, un second entier relatif tel que le produit de ces deux nombres donne l'élément neutre pour la multiplication, c'est-à-dire le nombre 1.

Dans **Z** muni de l'opération ★ (moyenne arithmétique de deux nombres), il n'est pas possible de trouver le symétrique d'un élément parce que cette opération ne possède pas d'élément neutre.

D'une manière générale, la notion d'élément symétrique d'un élément est toujours subordonnée à celle d'élément neutre.

5. Nous mettons encore en évidence une propriété de l'addition dans **Z**, propriété qui n'est pas essentielle mais qui est fort utile. Il s'agit de la **commutativité.** L'addition est commutative; cela signifie que l'ordre d'écriture des éléments n'influence en rien le résultat.

Nous le notons:

Quels que soient x et y, x et y éléments de **Z**:

$$x + y = y + x$$

En effet, nous remarquons dans quelques exemples:

$$2 + 4 = 4 + 2$$
$$6 + (-3) = (-3) + 6$$
$$(-4) + (-7) = (-7) + (-4)$$

On vérifie aisément que la multiplication et l'opération ★ sont aussi des opérations commutatives.

En revanche, l'exponentiation, l'opération que nous appelons parfois «élévation à une puissance», n'est pas une opération commutative. Cela signifie que l'on peut trouver des entiers relatifs x et y tels que:

$$x^y \neq y^x$$

On le constate dans le cas suivant:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ et } 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

donc

$$2^3 \neq 3^2$$

Les propriétés qui viennent d'être observées pour l'addition dans l'ensemble des entiers relatifs ne sont pas propres à cette opération et à cet ensemble. L'une ou l'autre d'entre elles se rencontrent fréquemment dans bien d'autres situations. Elles apparaissent non seulement dans d'autres ensembles numériques (ensemble **N** des entiers naturels, ensemble **Q** des nombres rationnels, ensemble **R** des nombres réels) qui possèdent un nombre infini d'éléments, mais aussi dans des ensembles bien plus simples comprenant un petit nombre d'éléments et munis d'opérations diverses.

Pour définir la structure de groupe, nous ne choisirons donc pas un ensemble particulier, ni une opération particulière. Nous parlerons d'un ensemble E, qui peut désigner l'ensemble **Z** que nous avons vu dans les exemples, mais qui peut aussi désigner tout autre ensemble. De même, nous parlerons d'une opération $\perp$ qui peut tout aussi bien désigner l'addition que toute autre opération susceptible de vérifier les propriétés qui apparaissent dans le groupe.

Définition du groupe

On définit:

Un ensemble E dans lequel est définie une opération que nous désignerons par le signe $\perp$ est muni de la structure de groupe si:

1. l'opération $\perp$ est interne dans E,
2. l'opération $\perp$ est associative,
3. l'opération $\perp$ possède un élément neutre dans E,
4. chaque élément de E possède un symétrique pour l'opération $\perp$.

De plus, si:

5. l'opération $\perp$ est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien (de Niels Abel, mathématicien norvégien).

Nous disons que l'on est en présence d'un groupe si, d'une part on a un ensemble et d'autre part une opération qui possède dans l'ensemble considéré les propriétés que nous venons d'énumérer.

Par exemple, l'ensemble **Z** des entiers relatifs et l'addition forment un groupe. Nous pourrions vérifier que l'ensemble $\mathbf{Q}^*$, des nombres rationnels non nuls et la multiplication forment également un groupe. Nous verrons d'autres exemples de groupe dans lesquels l'ensemble E est fini.

Revenons à la définition du groupe.

Les axiomes 3 et 4 peuvent être remplacés par un seul, à savoir:

> Les équations $a \perp x = b$ et $y \perp a = b$ ont une et une seule solution, quels que soient les éléments a et b de l'ensemble E.

La structure de groupe nous donne en substance la possibilité d'agir. Elle rend les «calculs» possibles dans tous les cas. Nous le constatons dans les deux exemples numériques que nous venons de citer.

Or, si nous limitons l'addition à l'ensemble **N** des entiers naturels, nous n'avons pas un groupe. Cette structure est malcommode. Par exemple, on ne trouve pas d'entier naturel qui peut remplacer x et qui vérifie:

$$4 + x = 1.$$

La définition du groupe, telle qu'elle est donnée, peut paraître, parce qu'elle est abstraite, éloignée de la réalité.

Et pourtant, elle ne fait que dégager des idées générales et extrêmement simples qui se concrétisent dans toutes les activités de l'homme.

Dans l'ouvrage «L'enseignement des mathématiques», Jean Piaget déclare: «D'une manière générale, le groupe est la traduction symbolique de certains des caractères fondamenaux de l'acte d'intelligence:

— la possibilité d'une coordination des actions,
— la possibilité des détours,
— la possibilité des retours.»

Ailleurs, dans «Logique et connaissance scientifique», il affirme: «A propos de la découverte des groupes de transformations par Galois, on peut être tenté de dire que la structure comme telle préexistait, et non pas seulement ses éléments, puisque la notion de groupe était implicitement contenue en toute démonstration algébrique et géométrique et surtout puisqu'elle est déjà à l'œuvre dans l'intelligence spontanée du sujet: nous en trouvons les formes élémentaires dans les opérations utilisées par l'enfant et jusqu'au niveau sensori-moteur pour ce qui est du groupe des déplacements.»

Plus bas, il poursuit:

«Le groupe des transformations formulé par Galois n'est pas identique aux transformations utilisées par l'enfant et dont le psychologue seul, découvre en les rapprochant et en les comparant entre elles, qu'elles présentent une structure de groupe, tandis que l'enfant n'en a aucune conscience.»

Si l'on considère les déplacements d'un lieu à l'autre d'un pays, on remarque qu'ils contiennent la notion de groupe.

L'ensemble E est concrétisé par l'ensemble des déplacements et l'opération $\perp$ correspond à la composition de deux déplacements.

— Aller de Genève à Lausanne, puis de Lausanne à Berne revient à aller directement de Genève à Berne. Deux déplacements peuvent être remplacés par un seul. Ici l'on retrouve l'idée d'opération interne.
— Les déplacements de Genève à Lausanne, de Lausanne à Berne et de Berne à Zurich vérifient l'associativité.

— L'élément neutre se retrouve dans le fait que l'on peut aussi ne pas se déplacer du tout.
— A chaque trajet aller correspond le trajet du retour; ceci donne l'idée du symétrique de chaque élément.

La notion de groupe apparaît d'une manière implicite dans toutes les civilisations. Chez les Grecs, par exemple, le fondement de la géométrie d'Euclide est l'invariance des figures par rapport aux déplacements. Or ces déplacements que l'on peut composer forment un groupe. Le sommet de cette géométrie a été atteint lors de la découverte des cinq polyèdres réguliers: le tétraèdre régulier, l'hexaèdre régulier, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier. Construire ces solides revient finalement à déterminer les groupes finis de déplacements dans l'espace à trois dimensions.

Les mathématiciens des XIXe et XXe siècles ont donc explicité des idées simples qui se trouvaient dans les différents domaines des mathématiques. Ils ont acquis du même coup une puissance de raisonnement qui leur permet de résoudre facilement des problèmes dont la solution ne pouvait, pour le moins, que difficilement être trouvée par leurs prédécesseurs. En même temps ces idées jouent un rôle unificateur puisqu'elles permettent de reconnaître des analogies dans des situations mathématiques d'aspects fort différents. De ce fait la notion de groupe se présente comme une économie de pensée en ce sens qu'elle favorise le transfert d'une situation à l'autre de résultats déjà obtenus. Chaque sujet n'est pas traité pour lui-même, mais il est comparé à d'autres. Il est particulièrement utile de reconnaître les groupes qui ont la même forme; nous disons qu'ils sont isomorphes. Les calculs dans l'un des groupes sont alors les mêmes que dans les autres.

Deux groupes sont isomorphes lorsque l'on peut établir, entre les éléments de l'un et ceux de l'autre groupe, des correspondances un à un telles que l'image du composé de deux éléments du premier groupe est le composé des images de ces deux éléments dans le deuxième groupe.
Avec plus de précision, nous notons:

L'ensemble E muni de l'opération $\perp$ et l'ensemble F muni de l'opération $\top$ sont isomorphes, s'il existe une bijection φ de E dans F, telle que, quels que soient les éléments x et y de E, on a:

$$\varphi(x \perp y) = \varphi(x) \top \varphi(y)$$

Dans l'enseignement élémentaire, il n'est évidemment pas question d'introduire une terminologie compliquée, encore moins une série d'axiomes. Il est essentiel toutefois de proposer aux élèves de ce niveau un certain nombre de situations variées qui peuvent être jouées et qui font apparaître les propriétés les plus importantes des opérations. De cette manière, les enfants sont familiarisés avec la notion de groupe bien avant de la dégager dans toute sa généralité.

L'élève qui sort de l'école primaire possède ainsi une somme d'expériences qui va lui permettre, peu à peu, de prendre conscience des lois générales qu'il

retrouvera au cours de sa vie. En particulier, il saisira parfaitement le pourquoi des mécanismes appliqués aussi bien en arithmétique qu'en algèbre.

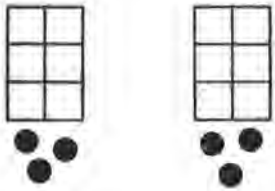
Signalons encore que la structure de groupe n'est pas la seule structure algébrique qui existe. L'élève qui poursuit ses études dans l'enseignement secondaire supérieur prendra certainement connaissance des structures d'anneau, de corps et d'espace vectoriel.

La structure de groupe reste toutefois la plus importante parce qu'elle entre dans la définition des autres structures et parce qu'elle est une des plus simples et une des plus générales.

Pour illustration, nous choisissons une situation qui a été proposée à des élèves de 11 ans environ. Il ne s'agit donc pas du jeu le plus simple qui se rapporte à la structure de groupe.

1. Matériel

Les élèves prennent deux cartons de 2 carrés sur 3 dans le sens de la hauteur et 3 jetons par carton.



Un des cartons sert de témoin.

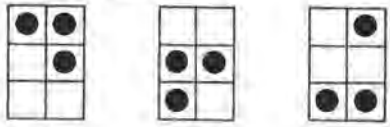
2. Première règle

Elle concerne les «états», c'est-à-dire la situation des jetons sur chaque carton. «Un seul jeton par ligne».

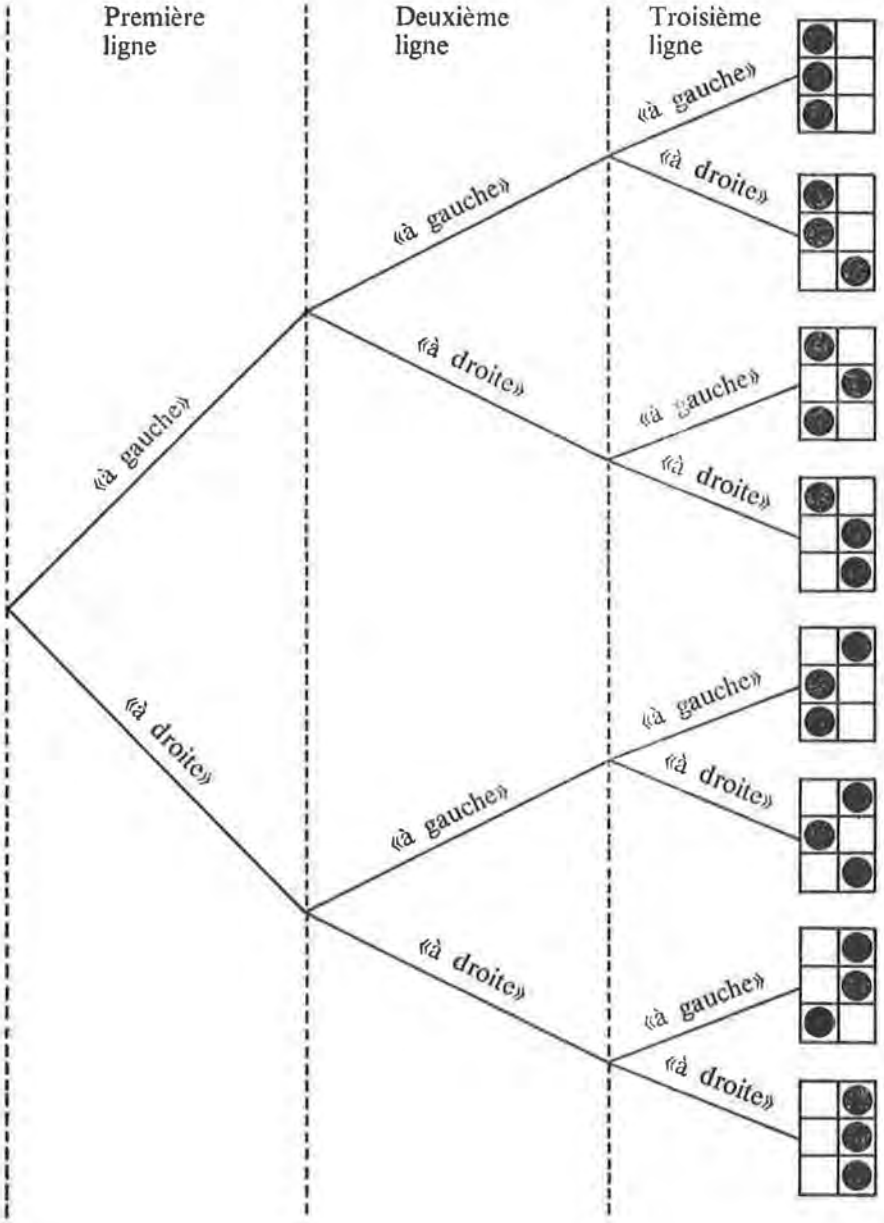
Exemples:

Contre-exemples:

Les situations suivantes ne sont pas admises.



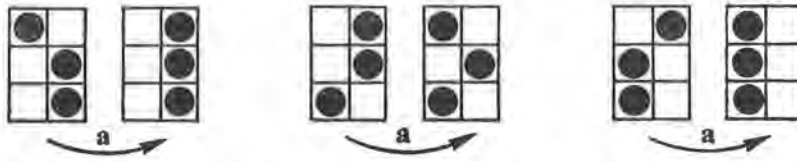
3. Un **«arbre»** permet de trouver les huit manières d'arranger les jetons.



4. Les huit «états» qui ont été trouvés permettent de définir les huit transformations que nous appellerons **«machines».**

— On désigne par **a** la «machine» qui change de place le jeton de la première ligne.

Plusieurs exemples mettent en évidence l'intérêt porté sur les «machines» et non sur les «états» eux-mêmes:

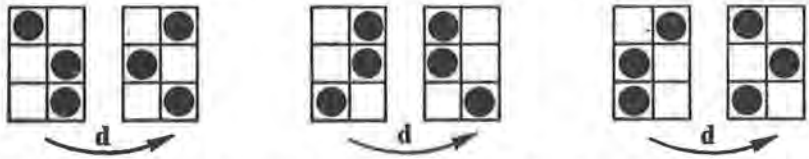


— On désigne par **b** la «machine» qui change de place le jeton de la deuxième ligne.

— On désigne par **c** la «machine» qui change de place le jeton de la troisième ligne.

— On désigne par **d** la «machine» qui change de place les jetons des deux premières lignes.

Comme c'est le cas pour chaque définition, des exemples s'imposent:



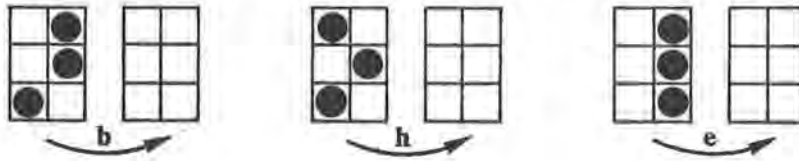
— On désigne par **e** la «machine» qui change de place les jetons des deux dernières lignes.

— On désigne par **f** la «machine» qui change de place les jetons des première et troisième lignes.

— On désigne par **g** la «machine» qui change de place les jetons de toutes les lignes.

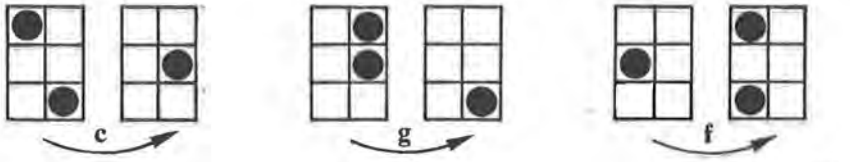
— On est amené enfin à découvrir une «machine» **h** qui ne change aucun jeton de place.

5. Les «machines» doivent fonctionner. On indique les transformations qu'elles provoquent. La consigne est: **«place les jetons qui manquent».**



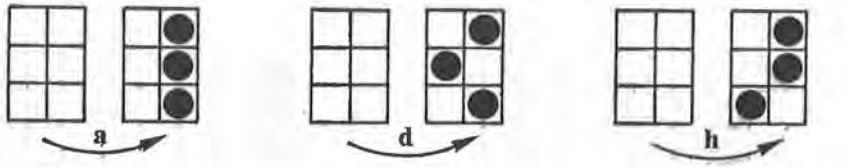
etc.

puis:



etc.

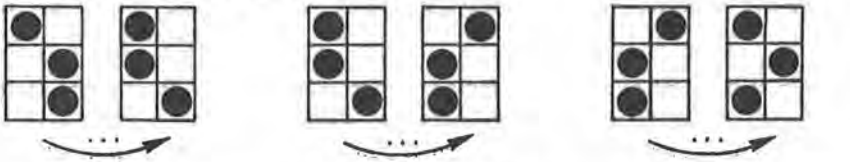
ou encore:



etc.

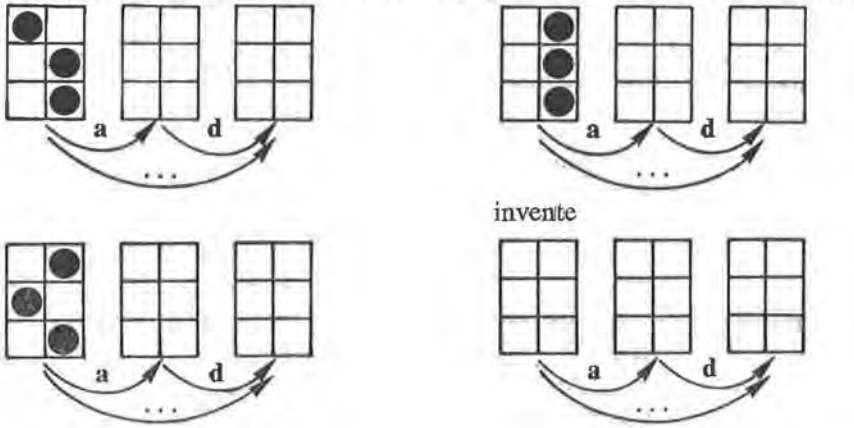
6. Il est aussi nécessaire de reconnaître les «machines».

La consigne est: **«trouve les machines».**



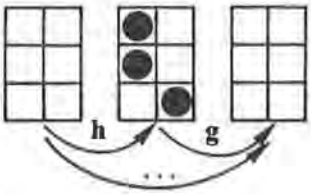
7. Deux «machines» peuvent être remplacées par une seule. Il s'agit d'abord de constater que les «états» de départ n'influencent pas le «fonctionnement» des «machines». L'attention est portée sur les «machines» elles-mêmes.

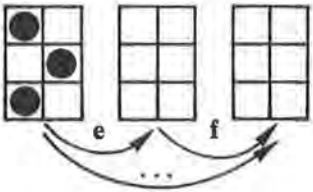
La consigne est: **«place les jetons qui manquent puis trouve la machine».**



etc.

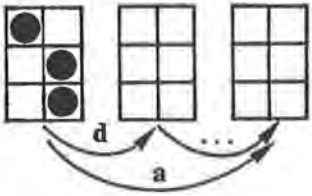
puis:

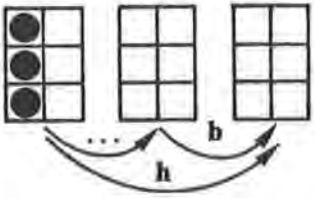




etc.

et encore:





etc.

Dans ces exercices apparaissent d'une part le rôle de la «machine» **h**; et d'autre part le fait que la «machine» **a** suivie de la «machine» **a** peuvent être remplacées par la «machine» **h**, que la «machine» **b** suivie de la «machine» **b** peuvent aussi être remplacées par la «machine» **h**, et ainsi de suite.

8. Il est possible d'abandonner peu à peu les cartons, quitte à y revenir en cas de nécessité, ou même pour de simples vérifications, de manière à porter toute l'attention sur les «machines» qui forment l'ensemble E lorsque:

$$E = \{\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}; \mathbf{d}; \mathbf{e}; \mathbf{f}; \mathbf{g}; \mathbf{h}\}$$

Nous avons remarqué que deux «machines» peuvent toujours être remplacées par une seule. L'opération qui fait correspondre à deux «machines» une «machine» est notée par le signe $\perp$.

Ainsi la «machine» **b** suivie de la «machine» **e** peuvent être remplacées par la «machine» **c**; nous le notons:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{e} = \mathbf{c}$$

Quelques calculs sont proposés:

$\mathbf{a} \perp \mathbf{a} = \ldots$ $\quad$ $\mathbf{a} \perp \mathbf{e} = \ldots$
$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} = \ldots$ $\quad$ $\mathbf{a} \perp \mathbf{f} = \ldots$
$\mathbf{a} \perp \mathbf{c} = \ldots$ $\quad$ $\mathbf{a} \perp \mathbf{g} = \ldots$
$\mathbf{a} \perp \mathbf{d} = \ldots$ $\quad$ $\mathbf{a} \perp \mathbf{h} = \ldots$

l'**élément neutre h** apparaît facilement:

$\mathbf{b} \perp \mathbf{h} = \ldots$ $\quad$ $\mathbf{d} \perp \mathbf{h} = \ldots$
$\mathbf{h} \perp \mathbf{h} = \ldots$ $\quad$ $\mathbf{h} \perp \mathbf{d} = \ldots$
$\mathbf{c} \perp \mathbf{h} = \ldots$ $\quad$ $\mathbf{g} \perp \mathbf{h} = \ldots$
$\mathbf{h} \perp \mathbf{c} = \ldots$ $\quad$ $\mathbf{h} \perp \mathbf{g} = \ldots$

le **symétrique** de chaque élément également:

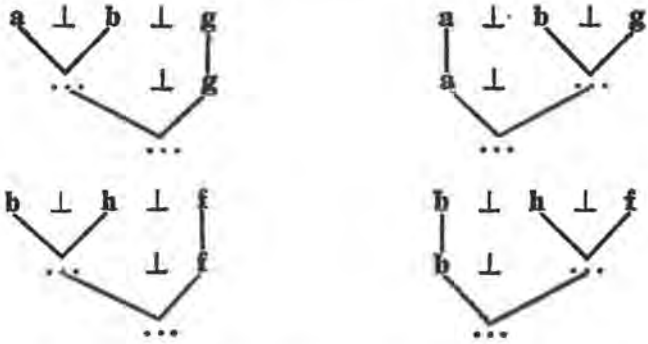
a ⊥ **a** = ...	**e** ⊥ **e** = ...
b ⊥ **b** = ...	**f** ⊥ **f** = ...
c ⊥ **c** = ...	**g** ⊥ **g** = ...
d ⊥ **d** = ...	**h** ⊥ **h** = ...

ainsi que la propriété **commutative** de l'opération ⊥:

a ⊥ **b** = ...	**f** ⊥ **g** = ...
b ⊥ **a** = ...	**g** ⊥ **f** = ...
c ⊥ **f** = ...	**b** ⊥ **g** = ...
f ⊥ **c** = ...	**g** ⊥ **b** = ...

9. La propriété **associative** de l'opération ⊥ apparaît sous des présentations variées.

Par exemple:



ou bien:

(**c** ⊥ **f**) ⊥ **g** = ... ⊥ **g** = ...
c ⊥ (**f** ⊥ **g**) = **c** ⊥ ... = ...

(**f** ⊥ **a**) ⊥ **c** = ... ⊥ **c** = ...
f ⊥ (**a** ⊥ **c**) = **f** ⊥ ... = ...

10. Il est possible de résoudre des **équations**:

a ⊥ ... = **c**	... ⊥ **d** = **e**
a ⊥ ... = **h**	... ⊥ **f** = **g**
b ⊥ ... = **g**	... ⊥ **c** = **c**
e ⊥ ... = **e**	... ⊥ **h** = **b**

et de trouver facilement le résultat de longues séries de «calculs»:

a ⊥ **b** ⊥ **a** ⊥ **h** ⊥ **g** ⊥ **a** = ...
b ⊥ **f** ⊥ **b** ⊥ **b** ⊥ **g** ⊥ **a** = ...
c ⊥ **e** ⊥ **a** ⊥ **c** ⊥ **h** ⊥ **c** = ...
g ⊥ **h** ⊥ **d** ⊥ **h** ⊥ **g** ⊥ **h** = ...

11. La **table de composition** «résume» les résultats obtenus:

$\perp$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	h	d	f	b	g	c	e	a
b	d	h	e	a	c	g	f	b
c	f	e	h	g	b	a	d	c
d	b	a	g	h	f	e	c	d
e	g	c	b	f	h	d	a	e
f	c	g	a	e	d	h	b	f
g	e	f	d	c	a	b	h	g
h	a	b	c	d	e	f	g	h

Remarquons que l'ensemble E munie de l'opération $\perp$ forme un **groupe abélien**. En effet:

1. l'opération $\perp$ est interne dans E,
2. l'opération $\perp$ est associative,
3. h est l'élément neutre,
4. chaque élément est son propre symétrique;

de plus:

5. l'opération $\perp$ est commutative.

L'ensemble E comprend huit éléments.

Nous le précisons en disant que E et l'opération $\perp$ forment un groupe abélien d'ordre huit.

Il est possible de prendre des sous-ensembles de E qui comprennent quatre éléments et qui, munis de l'opération $\perp$ sont des groupes. Il s'agit de sous-groupes de E munis de $\perp$.

$E_1 = \{\mathbf{h}; \mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{d}\}$ et $\perp$ forment un groupe;

De même:

$$E_2 = \{\mathbf{h}; \mathbf{b}; \mathbf{c}; \mathbf{e}\} \text{ et } \perp,$$
$$E_3 = \{\mathbf{h}; \mathbf{a}; \mathbf{c}; \mathbf{f}\} \text{ et } \perp,$$
$$E_4 = \{\mathbf{h}; \mathbf{a}; \mathbf{e}; \mathbf{g}\} \text{ et } \perp,$$
$$E_5 = \{\mathbf{h}; \mathbf{b}; \mathbf{f}; \mathbf{g}\} \text{ et } \perp,$$
$$E_6 = \{\mathbf{h}; \mathbf{c}; \mathbf{d}; \mathbf{g}\} \text{ et } \perp.$$

Les tables de composition nous permettent de remarquer que les deux premiers groupes se présentent sous la même forme:

E_1

$\perp$	h	a	b	d
h	h	a	b	d
a	a	h	d	b
b	b	d	h	a
d	d	b	a	h

E_2

$\perp$	h	b	c	e
h	h	b	c	e
b	b	h	e	c
c	c	e	h	b
e	e	c	b	h

Ces deux groupes sont isomorphes. C'est-à-dire qu'il existe une bijection φ de E_1 dans E_2 telle que l'image du composé de deux éléments quelconques de E_1 est égal au composé des images. φ est définie par:

$$\varphi : \mathbf{h} \longmapsto \mathbf{h}$$
$$\varphi : \mathbf{a} \longmapsto \mathbf{b}$$
$$\varphi : \mathbf{b} \longmapsto \mathbf{c}$$
$$\varphi : \mathbf{d} \longmapsto \mathbf{e}$$

et l'on a bien:

$\varphi(\mathbf{a} \perp \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{d}) = \mathbf{e}$; $\quad \varphi(\mathbf{a}) \perp \varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \perp \mathbf{c} = \mathbf{e}$

d'où: $\varphi(\mathbf{a} \perp \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) \perp \varphi(\mathbf{b})$;

$\varphi(\mathbf{b} \perp \mathbf{d}) = \varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$; $\quad \varphi(\mathbf{b}) \perp \varphi(\mathbf{d}) = \mathbf{c} \perp \mathbf{e} = \mathbf{b}$

d'où $\varphi(\mathbf{b} \perp \mathbf{d}) = \varphi(\mathbf{b}) \perp \varphi(\mathbf{d})$;

etc.

Notons que nous sommes ici dans le cas particulier ou E_1 et E_2 sont munis de la même opération.

Par un raisonnement analogue, nous prouvons que les quatre autres groupes sont tous isomorphes aux deux premiers.

E_3

$\perp$	h	a	c	f
h	h	a	c	f
a	a	h	f	c
c	c	f	h	a
f	f	c	a	h

E_4

$\perp$	h	a	e	g
h	h	a	e	g
a	a	h	g	e
e	e	g	h	a
g	g	e	a	h

E_5

↙⊥	h	b	f	g
h	h	b	f	g
b	b	h	g	f
f	f	g	h	b
g	g	f	b	h

E_6

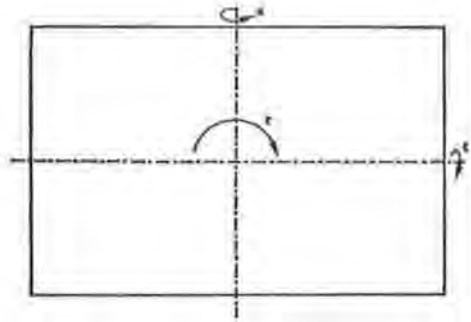
↙⊥	h	c	d	g
h	h	c	d	g
c	c	h	g	d
d	d	g	h	c
g	g	d	c	h

Ces six groupes sont encore isomorphes au **groupe du rectangle.** Dans ce dernier on considère les applications du rectangle dans lui-même.

Il s'agit:

1. de l'application identique: le rectangle ne subit aucun déplacement; nous désignons cette application par **u**;
2. de la rotation d'un demi-tour autour du centre de symétrie; nous la désignons par **r**;
3. de la symétrie **s** autour de l'axe de symétrie parallèle au petit côté du rectangle;
4. de la symétrie **t** autour de l'axe de symétrie parallèle au grand côté du rectangle.

Ces applications peuvent être indiquées dans la figure suivante:



La composition de deux applications est notée par le signe $\circ$.
$\mathbf{s} \circ \mathbf{t} = \mathbf{r}$ indique que l'application **s** suivie de l'application **t** peuvent être remplacées par l'application **r**.

Le tableau nous indique toutes les compositions.

$\circ$	u	r	s	t
u	u	r	s	t
r	r	u	t	s
s	s	t	u	r
t	t	s	r	u

Ce groupe est isomorphe à E_1 muni de $\perp$; φ peut être définie ici par:

$$\varphi : \mathbf{h} \longmapsto \mathbf{u}$$
$$\varphi : \mathbf{a} \longmapsto \mathbf{r}$$
$$\varphi : \mathbf{b} \longmapsto \mathbf{s}$$
$$\varphi : \mathbf{d} \longmapsto \mathbf{t}$$

et l'on constate:

$\varphi(\mathbf{a} \perp \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{d}) = \mathbf{t}$; $\quad \varphi(\mathbf{a}) \circ \varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{r} \circ \mathbf{s} = \mathbf{t}$;
d'où: $\varphi(\mathbf{a} \perp \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) \circ \varphi(\mathbf{b})$

$\varphi(\mathbf{h}) \perp \mathbf{d}) = \varphi(\mathbf{d}) = \mathbf{t}$; $\quad \varphi(\mathbf{h}) \circ \varphi(\mathbf{d}) = \mathbf{u} \circ \mathbf{t} = \mathbf{t}$;
d'où: $\varphi(\mathbf{h} \perp \mathbf{d}) = \varphi(\mathbf{h}) \circ \varphi(\mathbf{d})$.

$\varphi(\mathbf{b} \perp \mathbf{d}) = \varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{r}$; $\quad \varphi(\mathbf{b}) \circ \varphi(\mathbf{d}) = \mathbf{s} \circ \mathbf{t} = \mathbf{r}$;
d'où $\varphi(\mathbf{b} \perp \mathbf{d}) = \varphi(\mathbf{b}) \circ \varphi(\mathbf{d})$.

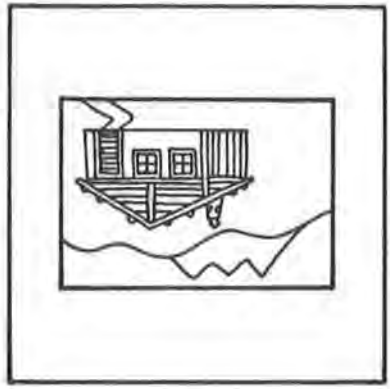
Tous les groupes isomorphes à ces groupes d'ordre 4 sont appelés **groupes de Klein.**

Ces groupes sont caractérisés par deux propriétés supplémentaires:
— un élément composé avec lui-même donne l'élément neutre;
— dans l'ensemble des trois éléments non neutres, le composé de deux éléments différents est le troisième de ces éléments, différent des deux premiers.

Le groupe de Klein, comme les autres groupes, se présente souvent dans le réel de tous les jours.

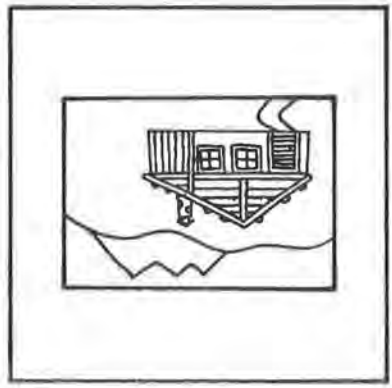
Par exemple, tout photographe amateur qui a dû une fois placer des diapositives dans un appareil de projection sait qu'il est parfaitement inutile de «retourner dans tous les sens» les photographies pour qu'elles soient dans la position correcte.
En fait, quatre cas doivent être envisagés:

1. La diapositive est dans la bonne position; ce n'est hélas pas le cas le plus fréquent!



Il faut tenir compte du fait que les lentilles ont pour effet de placer la gauche à droite et le haut en bas.
Dans ce cas, rien n'est à changer.

2. Seule la partie gauche est à la place de la partie droite.



Une symétrie d'axe vertical permet de remettre la photographie dans la position correcte; à moins que l'on préfère effectuer une rotation d'un demi-tour puis une symétrie d'axe horizontal ou inversément.

3. Seul le haut de la diapositive est en bas, ou le bas en haut.

Une symétrie d'axe horizontal permet de placer la photographie dans la position attendue. Ici, il est également possible de remplacer cette transformation unique par deux autres: une rotation d'un demi-tour puis une symétrie d'axe vertical ou inversément.

4. Tout est «à l'envers». La gauche est à la place de la droite, le haut est à la place du bas.

Il est possible d'effectuer une symétrie d'axe vertical puis une symétrie d'axe horizontal pour retrouver la position correcte; si l'on commence par la symétrie d'axe horizontal on obtient également la bonne position. Toutefois, une seule transformation peut être envisagée: il s'agit simplement d'une rotation d'un demi-tour.

Le groupe de Klein n'est pas le seul groupe d'ordre quatre. Il existe un deuxième type de groupe qui comprend quatre éléments. C'est le **groupe cyclique** d'ordre quatre.

Ce dernier apparaît sur une montre.

Occupons-nous seulement de la grande aiguille et ne considérons que les quarts d'heure.

On peut faire avancer la grande aiguille:

I) d'un quart d'heure,

II) de deux quarts d'heure ou d'une demi-heure,

III) de trois quarts d'heure,

IV) de quatre quarts d'heure, ce qui revient à laisser la grande aiguille à sa place puisque nous faisons abstraction de l'aiguille des heures.

Si nous faisons avancer la grande aiguille d'un quart d'heure puis de deux quarts d'heure, nous remarquons que ces deux mouvements de l'aiguille peuvent être remplacés par l'avance de trois quarts d'heure.

Nous noterons cette composition de deux mouvements de la manière suivante:

$$I \oplus II = III$$

De même, si nous faisons avancer l'aiguille de trois quarts d'heure puis encore de trois quarts d'heure, nous pouvons remplacer ces deux mouvements par celui de deux quarts d'heure.

Nous le noterons:

$$III \oplus III = II$$

En raisonnant de la même façon, nous constatons encore que:

$$III \oplus II = I$$
$$III \oplus IV = III$$
$$III \oplus I = IV$$

etc.

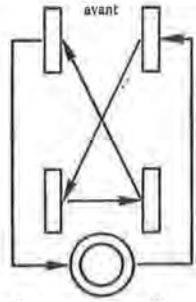
Toutes les compositions de mouvements de la grande aiguille peuvent être indiquées dans un tableau:

⊕	I	II	III	IV
I	II	III	IV	I
II	III	IV	I	II
III	IV	I	II	III
IV	I	II	III	IV

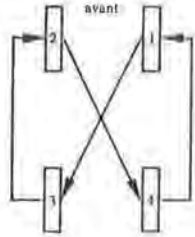
Le lecteur vérifiera que l'ensemble des quatre mouvements muni de l'opération ⊕ (composition de mouvements) forment un groupe. Ce groupe n'est pas isomorphe au groupe de Klein. Il est dit cyclique d'ordre quatre. De nombreux autres groupes cycliques se rencontrent dans la vie de l'homme.

Nous citerons encore un exemple:

Tout automobiliste sait que l'usure des pneus de sa voiture n'est pas la même suivant que les pneus sont situés à l'avant ou à l'arrière, à gauche ou à droite de la voiture. C'est la raison pour laquelle chaque garagiste connaît différents schémas de changements de place des pneus, qui devraient généralement être effectués tous les 5000 km, de sorte que, après un certain nombre de kilomètres tous les pneus sont usés de la même manière. Le schéma le plus connu est celui-ci:



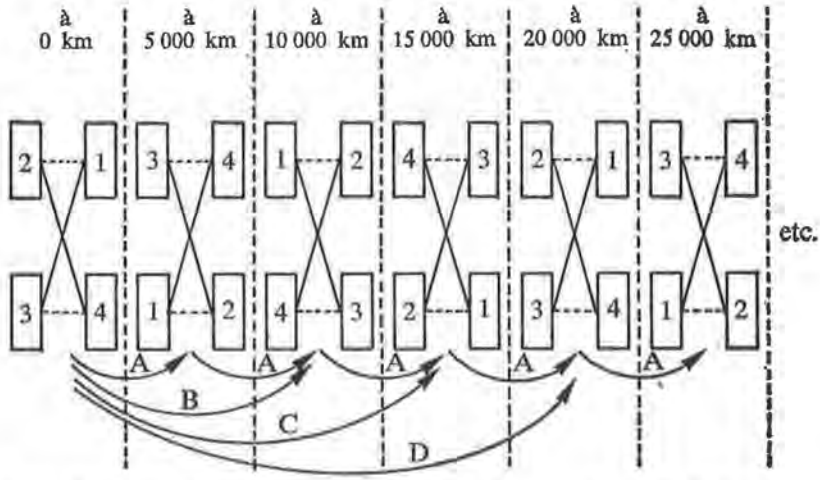
Pour simplifier et pour faciliter les comparaisons avec les exemples précédents, considérons une voiture qui n'aurait pas de roue de secours et étudions le schéma suivant:



Ce schéma indique qu'après 5000 km le pneu arrière droit (4) doit être mis à la place du pneu avant droit (1), le pneu avant droit (1) doit remplacer le pneu arrière gauche (3), etc. Après 10 000 km puis après 15 000 km de nouveaux changements doivent être effectués et ainsi de suite.

On remarque qu'au kilomètre 20 000 tous les pneus occupent la place qu'ils avaient au kilomètre zéro et que chaque pneu a occupé toutes les places possibles. Il y a en quelque sorte un cycle parcouru par chaque pneu.

On l'observe dans l'illustration suivante:



Chaque changement de roues que doit faire le garagiste est désigné par la lettre A. Deux de ces changements successifs ont pour effet de placer le pneu arrière droit (4) à la place du pneu arrière gauche (3), le pneu avant droit (1) à la place du pneu avant gauche (2), etc. Ce changement qui résulte de deux déplacements A est appelé B.

Nous écrirons:

$$A \circ A = B$$

Nous désignerons par C le changement que l'on obtient après avoir effectué 3 changements A ou après avoir effectué un changement B et un changement A ou inversément, ce qui revient au même.
Nous écrirons:

$$A \circ B = C \text{ et } B \circ A = C$$

Le changement D est le changement qui apparaît après 4 changements A ou encore après un changement C et un changement A ou inversément.
Nous écrivons:

$$A \circ C = D \text{ et } C \circ A = D$$

Ces observations peuvent être portées dans un tableau:

↙°	A	B	C	D
A	B	C	D	A
B	C	D	A	B
C	D	A	B	C
D	A	B	C	D

On constatera que l'ensemble des quatre changements de roues {A, B, C, D}, muni de l'opération ° (composition de changements) est un groupe. Ce groupe se présente sous la même forme que celui de l'horloge, que nous venons d'observer. Il lui est isomorphe.

Ici s'impose encore une remarque générale: dans tous les tableaux de groupes qui ont été observés, chaque élément de l'ensemble considéré figure une et une seule fois dans chaque ligne, une et une seule fois dans chaque colonne. Il est possible de démontrer que cette propriété apparaît chaque fois que le tableau correspond à une structure de groupe. Ces tableaux carrés sont appelés «carrés latins».

De tels carrés, dont l'étude systématique a été rendue possible grâce à la théorie des groupes, trouvent un champ d'application remarquable en statistique. Ils constituent des modèles de plans d'expérience. Tout en conservant à ces plans le plus de précision possible, ils donnent la solution optimale permettant de limiter le nombre d'expériences nécessaires pour effectuer les analyses.

Les carrés latins ont souvent été utilisés en agriculture. Lorsque l'on désire étudier les variétés d'une céréale, par exemple, la décomposition du champ en un certain nombre de parcelles qui utilise un arrangement en carré latin enlève généralement les risques d'avoir un traitement préférentiel pour une des variétés.

Conclusion

La structure de groupe est sous-jacente à de nombreuses activités de la vie courante. En particulier, certaines de ses propriétés apparaissent lorsqu'on étudie les opérations arithmétiques dans les ensembles numériques qui comprennent un nombre infini d'éléments.

En proposant des jeux et des situations variées aux élèves, ceux-ci découvrent à l'aide de manipulations les propriétés qui résultent des règles données.

Ainsi, peu à peu, l'élève arrive à prendre du recul et à dégager d'une manière explicite un certain nombre des concepts fondamentaux de la mathématique.

Bibliographie

E. T. Bell, *Les grands mathématiciens*, Payot-Paris 1961.

S. Berman et R. Bezard, *Mathématiques pour papa*, Chiron 1968.

N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann 1960.

E. Dupont, *Apprentissage mathématique I*, Sudel 1969.

G. van Hout, *Mathématique moderne, langage du futur*, Gamma 1969.

A. Kaufmann et G. Cullmann, *Mathématiques nouvelles pour le recyclage des parents*, Dunod 1968.

J. Piaget et autres, *L'enseignement des mathématiques I*, Delachaux & Niestlé, 1965.

J. Piaget et autres, *Logique et connaissance scientifique*, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard 1967.

N. Picard, *Mathématique et jeux d'enfants*, Castermann 1970.

M. Queysanne et A. Delachet, *L'algèbre moderne*, Presses universitaires de France 1961.

A. Revuz, *Mathématique moderne, mathématique vivante*, OCDL 1965.

R. Taton et autres, *Histoire de la science*, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard 1963.

A. Warusfel, *Les mathématiques modernes*, Seuil 1969.

Dans l'article qui suit, Ernest Gäumann, instituteur écrit (p. 29): «... on peut mathématiser les situations les plus variées: en géographie, histoire, grammaire, sciences, orthographe, situations sociales, etc.»

Math-Ecole a déjà donné des exemples: Léo Biollaz pour la géographie (les cols du Valais), Gaston Guélat pour le civisme. Qui prendra le relai?

Un enseignement de la mathématique moderne ou bien un enseignement moderne de la mathématique ?

par Ernest Gäumann, instituteur, Neuchâtel

Une alternative ainsi posée pourrait nous inciter à penser que ces deux points de vue s'excluent mutuellement, nous essayerons de montrer qu'en fait tel n'est pas le cas.

En parlant d'un *enseignement de la mathématique moderne* on songe plutôt aux contenus, aux programmes, en faisant abstraction des moyens et méthodes d'enseignement. Concernant ces programmes, il devient urgent de constater et d'admettre à l'évidence que les contenus traditionnels ne répondent plus à eux seuls aux exigences de la vie actuelle.

Bon nombre d'actions, d'opérations et de notions utilisées sporadiquement par la pensée spontanée des enfants et adultes depuis fort longtemps, mais ignorées des pédagogues, ont fait leur apparition sur le plan de l'action pédagogique consciente, ceci avec raison (pour avoir des exemples de ces contenus, voir notamment Math-Ecole No 41).

Nous acceptons pleinement la validité de cet élargissement d'horizon considérable au niveau des contenus, en un mot nous acceptons et reconnaissons le sens qu'il y a d'enseigner la mathématique moderne.

Nous arrivons au second point de l'alternative du début: *Un enseignement moderne de la mathématique!* Il est question ici des moyens, de la méthodologie. Qu'entend-on par moderne?

Pour définir ce point il est indispensable de chercher quelle est la fonction de la mathématique dans l'acte de connaissance (voir article de A. Delessert, Math-Ecole No 46).

Essayons d'y voir clair en analysant un exemple vécu en classe avec les élèves: nous projetions pour l'après-midi de faire un tournoi de football ou de basket. Il était convenu que nous nous diviserions en quatre équipes. Chaque équipe devrait jouer contre chacune des autres. Nous disposions de 2 heures pour faire ce tournoi.

La question qui se posait pour l'organisation était celle de connaître le nombre de matches et la durée qu'il fallait fixer pour chacun d'eux.

Nous nous sommes donc mis au travail individuellement, en équipes, puis collectivement.

Le but de la recherche était de voir clair dans cette situation sociale de tournoi, et *la fonction du travail mathématique était d'élaborer un schéma qui nous indique comment cela se passerait sur le terrain.*

Un premier pas a consisté à représenter chaque équipe par une lettre ou un jeton de couleur. Par des manipulations concrètes il fallait chercher combien on peut construire de couples différents parmi quatre jetons, avec tous les tâtonnements que cela suppose.

Soient les 4 équipes: A, B, C, D.

Un certain nombre d'élèves ont abouti à la découverte de la plupart des couples, mais en en oubliant quelques-uns, faute d'avoir découvert une méthode systématique de recherche.

D'autres ont trouvé tous les couples avec le sentiment d'avoir donné toutes les possibilités, ceci en s'appuyant sur une méthode systématique (qu'ils ont trouvée eux-mêmes).

Enfin les plus passionnés se sont encore demandé ce qu'il adviendrait s'il y avait 5 équipes, 6 équipes, etc.

Le modèle mathématique construit et achevé fut donc celui-ci:

A, B, C, D (4 équipes)

On trouve les arrangements de 2 éléments parmi 4:

AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.

On trouve 12 possibilités. Les cas AA, BB, CC, DD ont été d'emblée exclus, une équipe ne pouvant pas jouer contre elle-même!

De plus, nous avons constaté que dans ces 12 possibilités 6 se ressemblent 2 à 2:

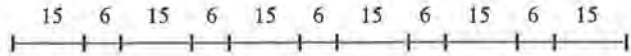
AB et BA
AC et CA
AD et DA
BC et CB
BD et DB
CD et DC

La seconde colonne représente le match retour pour chaque cas.

Donc au total nous avons 12 matches en 2 h. Il fallait en plus prévoir du temps pour les changements de camps et de terrains (pour chaque match, sauf pour le premier et le dernier).

Un rapide calcul nous décida à ne pas jouer de match retour.

Nous avons représenté les 6 matches et les 5 pauses intermédiaires par les segments suivants:



(Les grands segments sont les matches et les petits les pauses)

5 fois 6 min de pause = 30 min

il reste 90 min à partager en 6

90 min : 6 = 15 min

Chaque match durera 15 min, avec 6 min de pause entre 2 matches.

En résumé, 3 aspects mathématiques sont apparus dans cette recherche:

1. de la logique combinatoire (recherche de toutes les possibilités dans le cas des arrangements et combinaisons de 2 éléments parmi 4);
2. le problème classique des «espaces et piquets», dans le cas des matches et pauses;
3. le problème numérique du partage des heures.

De cet exemple concret il ressort que *la fonction de la mathématique* dans l'apprentissage de l'organisation d'un tel tournoi, fut de chercher et de construire un schéma, un outil, un modèle permettant d'augmenter le pouvoir des élèves pour parvenir au but qu'ils se sont fixé. Il s'agit de voir une telle recherche comme une mathématisation active de situation vécue.

Ce sont les élèves qui ont fait leur mathématique. Il aurait été faux de leur donner un modèle tout fait, c'est eux qui doivent le créer, le découvrir, l'inventer, ou du moins le redécouvrir ou le réinventer.

C'est là le sens que nous aimerions donner aux mots enseignement *moderne* de la mathématique, le sens d'une mathématisation active de situations.

Dans ce sens-là il est exclu que la mathématique soit enseignée pour elle-même, en vase clos. Au contraire, on peut mathématiser les situations les plus variées: en géographie, histoire, grammaire, sciences, orthographe, situations sociales, etc.

La mathématique devient alors l'instrument interdisciplinaire qui permet aux connaissances de retrouver leur unité, en simplifiant combien de choses!

Il faut cependant reconnaître que maints obstacles s'opposent à la modernisation de l'enseignement de la mathématique, en particulier:

1. Les programmes traditionnels en vigueur, parce qu'ils sont encore et toujours surchargés, trop étroits et rigides dans leurs contenus.

   La mathématique moderne prend plus de temps car elle ne cherche pas à revêtir l'esprit d'un verni, mais vise à la formation en profondeur de la pensée.
2. Les examens, en particulier les examens dits d'orientation pour l'entrée au cycle secondaire. Il est bien connu que ce type même d'examens (par leur contenu et leurs exigences) pousse la plupart des maîtres à faire du «drill». Or le «drill» est en opposition flagrante avec l'enseignement moderne de la mathématique.
3. La formation des maîtres:

— afin d'augmenter sa sensibilité aux situations mathématisables, le maître doit poursuivre en permanence sa culture mathématique, s'ouvir toujours davantage aux modèles mathématiques les plus variés (théorie des ensembles, des graphes, combinatoire, probabilités et hasard, etc.);

— il faut qu'il soit conscient que son rôle n'est pas de donner une mathématique toute faite aux élèves, mais qu'il est un ferment, un catalyseur, un

animateur indispensable aux élèves dans leur acquisition du savoir et la formation de leur pensée.

4. Le manque d'outils pédagogiques.

Le seul matériel qu'on ait abondamment à notre disposition, c'est la salive! Un des plus mauvais pour l'acquisition de la mathématique (voir Math-Ecole No 50).

Avant de conclure, il est un point qui nous tient encore à cœur:

Si l'on veut ne pas dégoûter les enfants de la mathématique, il faut que cette dernière réponde à *leurs* intérêts. Il faut autant que possible que les problèmes qu'ils cherchent à résoudre soient *leurs* problèmes, tirés de situations qui les intéressent et donc qu'ils comprennent d'autant mieux. C'est là un aspect fondamental de l'enseignement moderne de la mathématique, que nous ne saurions négliger.

Ainsi donc, si l'introduction des notions de mathématique moderne est une bonne chose, nous croyons qu'elle ne sera vraiment bonne que si elle est doublée d'un enseignement moderne de la mathématique.

Nouveautés

- **Mathématique de notre temps à l'usage du corps enseignant**
  1. Ensembles, relations et quelques notions de logique. Par Ch. Burdet. Lausanne, Payot 1972.

L'auteur, collaborateur apprécié de Math-Ecole, est, comme on le sait, professeur de mathématique au Collège de Genève et assistant pédagogique pour l'enseignement de la mathématique dans les écoles primaires genevoises. Licencié en mathématiques, il fut d'abord instituteur. Cela le qualifie très heureusement pour écrire un ouvrage sur la mathématique d'aujourd'hui à l'intention de ses collègues.

Dans son introduction, Ch. Burdet souligne au moins quatre choses. Premièrement, la mathématique est une science qui, dans le temps, s'est construite et qui se construit encore. Il faut donc participer à cette élaboration et la comprendre. Deuxièmement, la mathématique d'aujourd'hui se présente comme un mode de pensée. Elle rend puissant celui qui s'y adonne. Troisièmement, la nouvelle mathématique unit ce qui, jadis, se présentait en ordre dispersé. Elle simplifie la démarche intellectuelle. Quatrièmement, la mathématique nouvelle se développe en harmonie avec l'esprit lui-même. Il y a relation presque biunivoque entre les «groupes» mathématiques et les «groupements» piagétiens. Tout cela pour nous convaincre. On ne peut plus se passer du nouvel outil. Il est, et sera, la clé donnant accès à la compréhension intime du réel et à sa maîtrise. Encore faut-il, pour savoir manier cet outil, avoir un bon mentor. Ch. Burdet en est un. S. R.

● **L'école maternelle et la mathématique vivante**
Recherches pédagogiques No 45.
Institut national de recherche et de documentation pédagogiques.
Paris 1971.

Ce fascicule est consacré pour l'essentiel à une expérimentation menée par une équipe animée par Madame Delchet. La lecture de ce document sera une aide précieuse pour tous les membres du corps enseignant engagés dans des expériences pédagogiques en mathématique. La forme même de la présentation mérite de retenir l'attention:

— une brève introduction, dû à A. Revuz, apporte la caution du mathématicien, par ailleurs directeur de l'IREM de Paris (Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques);
– des préliminaires rappellent la manière d'aborder la mathématique au niveau le plus élémentaire. Sur le plan pratique, le programme est présenté sous forme d'une trame accompagnée de transparents;
— des commentaires forment la partie la plus riche. Ils comprennent des notes mathématiques liées à la méthodologie. Ces notes sont inspirées directement de l'expérience scolaire. Sur le plan génétique, on trouve un résumé des théories de Piaget très largement évoquées. Vient ensuite la mise en œuvre au plan de la pédagogie pratique;
— des fiches de jeux complètent le document avec une recension des réactions d'élèves.

L'importance laissée à ces divers points de vue paraît judicieusement répartie et pourrait servir de modèle pour des travaux analogues chez nous. A. C.

● **Mathématiques en 4e (lycées français, 13 ans)**
Présentation de quelques thèmes étudiés dans les classes expérimentales.
Recherches pédagogiques, No 48
INRDP, Paris, 29, r. d'Ulm.

Au sommaire: des modèles concrets des principales structures algébriques: groupes, anneaux, corps, modules, espaces vectoriels; les réels en classe de quatrième; etc.

● **«NICO», la revue de Papy, No 10, 1971**

Au sommaire: Les actes de la première rencontre du Groupe International de Recherche en Pédagogie des mathématiques. Et parmi les communications: Un enseignement de la mathématique moderne pour des enfants handicapés; Enseignement de la mathématique à deux groupes d'enfants caractériels.

● **«NICO» No 11, 1972, avril**

Au sommaire: *Foncticolor* par Papy (présentations de certaines notions fondamentales du premier enseignement de manière intuitive, intelligible et rigou-

reuse); *une méthode de soustraction en première année* par R. Dieschbourg; *un enseignement moderne de la mathématique en cinquième année primaire* par C. Randour; etc.

● **D. Ginet «Vers une approche clinique de l'échec en mathématique»**
Bull. de la Société A. Binet et Th. Simon — Numéro 523, VI, 1971.

On constate que de grands pas ont été faits dans l'analyse de certains échecs scolaires. Cependant, les psychologues cliniciens semblent priviligier l'étude et la compréhension des difficultés relatives au langage. «Par contre, dit D. Ginet, si elles sont bien l'objet d'une multiplicité d'analyses qui portent sur les processus cognitifs, les difficultés scolaires dans le domaine de l'apprentissage des mathématiques, dont la notion de dyscalculie n'exprim que l'une des facettes, apparaissent très délaissées par l'approche clinique. Aussi, est-ce à leur élucidation que nous voudrions nous attacher».

Le grand apport de l'auteur tient à l'analyse qu'il fait de la limitation que se sont jusqu'alors imposée les rééducateurs et les psychologues, en réduisant les troubles du langage et de la mathématique aux troubles de l'organisation de l'espace et du temps. Cette limitation est accentuée par le fait que ces troubles, rapportés à une origine commune, sont explicités en termes de défaut de l'équipement génétique. «Certes il ne s'agit pas de nier que certains connaissent des perturbations qui appartiennent bien au registre de l'équipement génétique...

Il convient toutefois de mettre en évidence l'insuffisance d'une conception qui prétendrait se limiter à attribuer les dyscalculies à des déficits du registre instrumental...»

Que les perturbations de la temporalité et de la spatialité puissent, par exemple, avoir une signification ainsi qu'une origine d'ordre affectif, cela n'est généralement pas soupçonné. Et l'auteur souligne:

«Or, l'intégration des structures spatio-temporelles est, en réalité, coextensive des modalités de développement de la personnalité qui la déterminent et l'orientent; ces modalités s'exercent sous l'influence de facteurs d'ordre affectif et relationnel».

Ainsi est surmontée la trop fameuse dichotomie intelligence/affectivité, qui est à la base de beaucoup d'analyses insuffisantes.

En conclusion, D. Ginet fait l'hypothèse extrapolée principalement des travaux de Mélanie Klein, *d'une certaine portée psycho-thérapique des mathématiques modernes.*

«Leur logique serait proche de la logique du fantasme et leur pratique (à condition de commencer très tôt) pourrait servir de modèle, pour la mise en ordre des fantasmes de l'enfant».

Une telle hypothèse ouvre des voies très intéressantes à la recherche et mérite d'être davantage exploitée.

J. Brun, assistant au SRP, Genève

Blocs d'attributs et «Blocs logiques»

Le laboratoire de mathématique de Z. P. Dienes

No	Désignation	Nombre d'éléments	Grandeur	Matière	Présentation	Prix fr.
21000	Blocs logiques originaux de Z. P. Dienes	48	grande	plastique, vide	en boîte avec ravier	44.—
	»	48	grande	plastique, vide	en boîte sans ravier	38.—
21000/a	»	48	moyenne	bois	en boîte avec ravier	19.25
21000/b	»	48	petite	plastique, pleine	en boîte avec ravier	8.40
21005	Blocs d'attributs «Invicta»	60 (48 + 12 hexagones)	grande	plastique, pleine	en boîte avec ravier	44.—
21006	»	60 (48 + 12 hexagones)	moyenne	plastique, pleine	en boîte avec ravier	14.80
21006/a	»	60 (48 + 12 hexagones)	moyenne	plastique, pleine	en sachet	12.—
21007	»	60 (48 + 12 hexagones)	petite	plastique, pleine	en boîte avec ravier	8.40
21007/a	»	60 (48 + 12 hexagones)	petite	plastique, pleine	en sachet	4.60

Franz Schubiger, 8400 Winterthour
Mattenbachstrasse 2

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

Mademoiselle
Madeleine Bräutigam
Ecole normale

1000 Lausanne

Comité de rédaction:

Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame, D. Froidcœur, G. Guélat, R. Hutin, F. Oberson, L. Pauli, S. Roller, rédacteur.

Abonnements:

Suisse F 7.—, Etranger F 8.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43 fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel (038 / 24 41 91).