

la MATHématique à l' ECOLE

Rédacteur: S. Roller, service de la recherche
pédagogique, 1202 Genève, rue de Lausanne
63 — Tél. (022) 31 71 57 — Abonnement:
Suisse, F 5.—, étranger, F s 6.— — CCP
12 - 16713, Genève — Paraît 5 fois par an.

Janvier 1967 26

MATH-ECOLE

Avec le numéro 26, «Les Nombres en Couleurs», Bulletin Cuisenaire, paraissent sous un titre nouveau. Pourquoi cela? Nous nous en sommes déjà expliqués dans une circulaire jointe au numéro 25 de décembre dernier. En effet, après cinq années de vie, le bulletin désire marquer d'une manière plus nette sa véritable orientation. Cette dernière, nous l'avions précisée dès le numéro 2 de juin 1962, quand nous déclarions que le bulletin, quoique placé sous le signe des Nombres en Couleurs de Georges Cuisenaire, ne voulait s'inféoder à aucune «école», mais qu'il souhaitait essentiellement se mettre au service des enseignants chargés d'initier les jeunes enfants aux mathématiques avec l'aide des méthodes, procédés et matériels les plus valables.

Pendant les cinq années qui viennent de s'écouler beaucoup de choses se sont produites.

Dans le secteur des Nombres en Couleurs eux-mêmes, les publications de Caleb Gattegno et celles, très particulièrement, de Madeleine Goutard nous ont révélé de nouvelles possibilités dans l'emploi des réglettes et nous ont surtout fait prendre conscience des puissances que révèle l'esprit des enfants. Les réglettes se sont alors haussées à un niveau supérieur. De moyen — heureux — d'apprendre aux enfants l'arithmétique des plans d'études, elles devenaient un instrument propre à stimuler l'activité de la pensée mathématique et à intensifier la recherche.

Simultanément — et pour plusieurs d'entre nous en raison même de l'ouverture d'esprit que nous devons à ceux qui surent le mieux mettre en valeur la richesse des réglettes — nous avons approché d'autres maîtres de la mathématique et de son enseignement. Grâce à eux nous avons mieux compris notre but et notre devoir. Notre but: préparer les élèves à opérer au sein de la mathématique moderne; notre devoir: nous ouvrir à toutes les méthodes que nous jugerions bonnes pour

atteindre cet objectif. Et, par voie de conséquence, nous intéresser à tous les matériels propres à susciter l'activité calculatrice des enfants. Car, comme l'a dit l'un de nos maîtres, le concept mathématique ne réside pas dans tel ou tel matériel mais se dégage progressivement de la manipulation de chacun d'eux.

En ce qui concerne l'enseignement de la mathématique au pays romand, des événements importants ont eu lieu. Citons-en quelques-uns:

Mise au point, dans le cadre des travaux «Pour une école romande», d'un programme de mathématique pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire, programme largement inspiré par la mathématique nouvelle.

Création, à Genève, d'une Commission cantonale officielle pour la coordination de l'enseignement de la mathématique de l'école enfantine à la maturité.

Mise à l'essai, à Genève, d'un programme de mathématique nouveau pour la 2^e enfantine (5 ans), la 1^{re} et la 2^e années primaires.

Introduction de la mathématique nouvelle dans les écoles secondaires.

Parution de plusieurs «cours» de «math nouvelle» pour les élèves des écoles secondaires et, dans l'«Educateur» publication, à l'intention des instituteurs, d'un cours d'initiation à la mathématique actuelle sous la direction de M. Théo Bernet de la Tour-de-Peilz.

Le renouveau est amorcé. Il va s'accroissant. Preuve en soient les nombreux cours de recyclage qui se donnent un peu partout chez nous et qui attirent un nombre grandissant de maîtres de tous âges et de toutes formations.

Parmi ces cours, il convient de signaler les cours cantonaux valaisans (Sion, chaque année à fin août), vaudois (Crêt-Bérard en octobre), genevois (pour la formation des maîtresses chargées d'appliquer les nouveaux programmes) et les cours fédéraux. Tous ces cours ont fait une très large place aux réglettes. On a pu néanmoins constater en 1966 notamment, que la palette des professeurs s'élargissait et que les réglettes se voyaient accompagner par d'autres matériels et cela, non pas pour faire du neuf à tout prix, mais pour amener les enfants à mieux saisir les concepts mathématiques dans ce qu'ils ont de fondamentalement abstrait.

Notre bulletin, dès lors, se devait de participer à ce renouveau. Il le fait aujourd'hui et, pour commencer, il change de nom.

L'enquête que nous avons faite en décembre, auprès de nos lecteurs, nous a valu une septantaine de réponses. Aucune note discordante ne s'est fait entendre. Plusieurs de nos correspondants nous ont même dit explicitement leur satisfaction de voir le bulletin s'ouvrir à de plus vastes horizons. Quant au titre lui-même, c'est «La mathématique et les enfants» qui a remporté le plus grand nombre de suffrages. Nous y avons cependant renoncé en raison de la trop grande ressemblance

qu'il offrait avec l'ouvrage de Madeleine Goutard «Les mathématiques et les enfants». Venait ensuite le titre même que nous avons adopté «La mathématique à l'école» et que nous avons condensé en MATH-ECOLE dans le dessein d'imiter un peu Lucienne Félix qui faisait paraître, il y a peu d'années un ouvrage au titre évocateur :

Mathématique
nouvelle



Enseignement
élémentaire

en voulant montrer par là que son propos se trouvait à l'intersection et de la mathématique et de l'enseignement. N'est-ce pas cela aussi que nous aimerions faire et réussir?

Un mot encore à propos du mot «Ecole». L'un de nos correspondants craint que nous ne fassions de ce mot un emploi abusif car, dit-il, l'école s'étend de la maternelle à l'université. Il est vrai que, jusqu'ici, le bulletin ne s'est guère adressé qu'aux enseignants des classes enfantines et primaires. Il est non moins vrai qu'il souhaite établir un contact fructueux avec les maîtres du secondaire eux-mêmes instruits par les universitaires. Si donc la plupart du temps le bulletin ne s'adresse qu'à une partie de l'école, il veut néanmoins prêter une oreille attentive à toute l'école et à ses représentants les plus autorisés. Il est de l'école et dans l'école.

Au moment enfin où, dans ce qui doit être notre ascension commune, nous prenons un nouveau virage, nous réalisons mieux que jamais l'importance de la dette que nous avons contractée auprès de Georges Cuisenaire. Nous désirons ici lui redire notre gratitude et nous voulons aussi préciser une chose: les réglottes en couleurs ne disparaissent pas. Elles sont au contraire promues à une dignité nouvelle. Après plus de dix années d'existence — et chacun sait ce que dix années apportent aujourd'hui de changement — elles demeurent. Elles continueront même à toujours mieux faire, entre les mains d'enseignants avertis, une excellente et indispensable besogne. Les réglottes ont subi maints assauts; aucun d'eux cependant n'a pu en altérer la valeur: l'outil «réglottes» est un bon outil. Le seul? Non, sans doute, mais un instrument cependant qu'on utilisera avec les autres, par complémentarité. L'œuvre de Georges Cuisenaire se trouve ainsi intégrée dans un ouvrage plus vaste que le sien. N'y a-t-il pas, pour un inventeur, satisfaction plus grande que celle-ci?

La «présence» Cuisenaire dans MATH-ECOLE sera d'ailleurs attestée par les articles que nous ne cesserons de faire paraître sur l'emploi des réglottes dans l'enseignement. Elle le sera aussi par le truchement d'un signe: une réglotte colorée dans le corps même du titre. Cette année c'est la réglotte rose, comme chacun aura pu le constater.

En évoquant la belle figure de notre ami Cuisenaire, qu'il nous soit encore permis de rappeler un propos qui lui est cher. Maintes fois, en

effet, au cours de rencontres qui réunissaient des enseignants de tous ordres — des primaires, des secondaires et des universitaires; des laïcs et des religieux; des Belges, des Suisses, des Français, des Canadiens et d'autres encore, Georges Cuisenaire, ému, s'est plu à dire: «Sans mes réglottes, vous ne vous seriez probablement jamais connus.» Cela est vrai. Les réglottes ont contribué à faire se rencontrer une multitude d'enseignants; elles sont un lien pédagogique; elles sont aussi un ciment qui entretient de solides amitiés. Cela nous ne l'oublions pas, nous ne l'oublierons jamais.

Le Bulletin doit enfin exprimer sa reconnaissance à plusieurs personnes.

A Monsieur Marcel Gross, chef du Département de l'instruction publique du canton du Valais qui a tenu le bulletin sur les fonts baptismaux en avril 1962 et qui a permis que notre organe sorte de presse, cinq fois l'an, comme tiré à part de l'«Ecole valaisanne»¹;

A Messieurs Eugène Claret d'abord et Paul Bourban ensuite, les rédacteurs de l'«Ecole valaisanne», comme à Léo Biollaz aussi, qui ont toujours accueilli nos manuscrits avec grande compétence et un parfait dévouement;

A nos imprimeurs Fiorina et Burgener de Sion;

Au Service de la recherche pédagogique de Genève qui assure l'administration du Bulletin;

A tous ceux et toutes celles aussi qui nous ont donné des articles et qui nous ont lu.

Et maintenant? — Redisons d'abord que MATH-ECOLE n'aura le droit d'exister qu'à une condition: aider les enseignants à accomplir, chaque jour de meilleure manière, une tâche qui n'est certes pas aisée, mais cependant exaltante: préparer notre jeunesse à penser juste.

Pour cela, nous aurons à faire trois choses au moins:

1. Avec l'aide des mathématiciens, préciser notre objectif: que convient-il d'enseigner aux enfants dans le secteur de la mathématique?

2. Avec l'aide des psychologues et des pédagogues, mettre au point de bonnes méthodes d'enseignement de la mathématique (de bons procédés aussi, de bons matériels).

3. Avec l'aide des expérimentalistes, établir la valeur — en efficacité réelle, à court et à long terme — des méthodes introduites dans les classes.

Merci, déjà, à tous ceux qui, avec nous, tiendront le mancheron de la charrue.

S. R.

¹ Il convient de remercier aussi le Département de l'instruction publique du canton de Genève qui assume les frais de l'envoi du bulletin au corps enseignant genevois concerné par le nouvel enseignement du calcul.

POUR UNE INAUGURATION

Pour inaugurer la série de MATH-ECOLE, nous avons le bonheur de donner la parole à Mme Nicole Picard qui nous a autorisés à publier le texte de la très belle conférence qu'elle a prononcée à Genève, le mercredi 9 novembre 1966, au terme d'un séminaire qui a groupé, à l'Institut des Sciences de l'Education, une quarantaine d'enseignants romands.

Mme Picard n'est pas une inconnue pour les lecteurs du Bulletin. Nous avons déjà signalé l'important article qu'elle a confié, en mars 1966, au «Courrier de la recherche pédagogique» et dans lequel elle relate les expériences qu'elle conduit auprès de très jeunes élèves dans un lycée parisien (l'Ecole alsacienne) et dans des écoles primaires. Nos lecteurs trouveront, dans le présent numéro, la mention d'un récent ouvrage de Madame Picard — *«Des ensembles à la découverte du nombre»*, — ouvrage qui s'adresse aux institutrices des premières années de l'école primaire.

Madame Picard, en effet, est mathématicienne; elle est aussi une délicieuse mère de famille — elle a six enfants — et une merveilleuse pédagogue. C'est donc en pleine connaissance de cause qu'elle peut s'exprimer comme elle le fait ici. D'une part, elle a toute autorité pour nous avertir, paraphrasant Platon, que nul ne pourra désormais accomplir peu ou prou, sa vocation d'homme s'il n'est pas mathématicien; et d'autre part, elle a pleinement le droit d'affirmer, s'appuyant sur une expérience solidement vécue, que la formation de l'homme à la mathématique peut et doit commencer au jardin d'enfant.

Voilà un message bien propre à stimuler l'ardeur de toutes celles d'entre nous qui se penchent chaque jour sur les têtes de nos plus jeunes bambins.

PLACE DE LA FORMATION MATHÉMATIQUE DANS L'EQUIPEMENT DE L'HOMME D'AUJOURD'HUI

S'il est un problème concernant l'enseignement dont se préoccupent, à l'heure actuelle, les ministres des différents pays, c'est bien celui de l'enseignement des mathématiques. La demande de réformes vient de partout à la fois: historiquement, elle est partie des mathématiciens de l'enseignement

supérieur dont le rôle est de former des chercheurs en mathématique.

L'enseignement secondaire fournissait à l'enseignement supérieur des étudiants absolument inaptes à dominer les matières enseignées: l'esprit dans lequel ils devaient considérer les mathématiques était

tout différent de celui dans lequel ils les étudiaient dans le secondaire.

En effet, si les êtres mathématiques n'ont pas changé (il n'y a pas de mathématique moderne ou de mathématique ancienne mais une mathématique en évolution depuis 2000 ans) le regard que l'on pose sur ces êtres mathématiques n'est plus le même. On s'est aperçu, il y a plus d'un siècle, que les êtres mathématiques vivent en société et l'on s'intéresse aux relations qu'ils entretiennent entre eux. C'est cela qui a conduit les mathématiciens à l'idée si fructueuse de structure, sans laquelle la recherche mathématique était arrivée dans une impasse. C'est cette mathématique réorganisée qui est partout dans le monde enseignée au niveau de l'enseignement supérieur. D'où la nécessité de former, dans le secondaire, des élèves capables de profiter d'un tel enseignement.

Les premières réformes ont, en effet, été, en général, des réformes portant sur les dernières classes de l'enseignement secondaire. Une fois ces réformes effectuées, on s'est vite aperçu que le problème n'était absolument pas résolu et que les difficultés n'étaient pas éliminées mais repoussées. En effet, ce n'est pas seulement un changement de contenu des programmes qui est nécessaire mais aussi un changement de mode de pensée et à 14 ans comme à 17, il faut procéder, avant de faire passer la matière nouvelle, à un déconditionnement.

Rénover complètement l'enseignement secondaire n'est d'ailleurs pas suffisant non plus car la difficulté se retrouve intacte au passage de l'enseignement primaire à l'enseignement secondaire. Si l'on veut faire un enseignement cohérent des mathématiques sans reprise ni déconditionnement, il faut commencer au jardin d'enfants et enseigner les mathématiques dans un même esprit du jardin d'enfants à l'université, dans un même esprit mais pas de la même manière, bien sûr.

C'est dans cet esprit que, peu à peu, sont éclos un grand nombre de projets de programmes: aux USA, chaque grande université a écrit son projet, l'a expérimenté. Des conférences, des colloques ont eu lieu. L'initiative de ces projets venait toujours de l'enseignement supérieur qui pensait y trouver son compte et augmenter le nombre des chercheurs valables.

Les détracteurs de ces projets objecteront que le but des enseignements élémentaires (jusqu'à 14 ou 16 ans) n'est pas de former des chercheurs en mathématique et ils ont raison.

Mais voilà que d'autres aussi et qui n'étaient pas mathématiciens réclamaient autre chose de l'enseignement des mathématiques. En effet, le nombre des utilisateurs des mathématiques augmente sans cesse et dans toutes les disciplines, nous en verrons quelques exemples plus loin.

La mathématique a droit de cité partout. En France, il y a depuis

quelques années déjà un cours de mathématiques dans la Faculté de Droit et de Sciences économiques et depuis cette année dans la Faculté des lettres, cours destinés aux psychologues, aux sociologues, aux philosophes et aux linguistes.

Bien sûr, l'étude sacro-sainte des «cas d'égalité des triangles» ne sert de rien ni aux économistes, ni aux psychologues, ni d'ailleurs à la plupart des utilisateurs. Si cette étude existe dans l'enseignement traditionnel, c'est que l'on pensait que la géométrie était le seul moyen d'apprendre la pratique du raisonnement hypothético-déductif et cela permettait de fabriquer un très grand nombre de problèmes. En fait, on se servait de ce que l'on avait à sa disposition, la géométrie euclidienne, pour faire l'apprentissage du raisonnement. On s'est aperçu, lorsque l'on a entrepris la mise en place des programmes expérimentaux que l'on disposait, pour ce faire, de matériels beaucoup plus adéquats.

Un autre fait: jusqu'à maintenant, les mathématiques enseignées dans les classes du secondaire étaient destinées à de futurs ingénieurs ou physiciens comme si, dès l'âge de 10 ans, on se préparait à entrer à Polytechnique. Elles étaient (et sont encore bien souvent) enseignées comme une technique particulière. Dès le départ, elles étaient un outil de spécialistes. Cela se comprend très bien: les mathématiques se sont, en effet, développées au cours des âges pour mieux comprendre et dominer le

monde physique: les nécessités du dénombrement ont conduit à la notion de nombre, celles de l'arpentage à la géométrie, la dérivée a permis l'étude théorique des mouvements et l'intégrale celle de l'énergie. Nous savons bien, tous, que la mathématique est l'outil de choix, irremplaçable, de l'ingénieur et du physicien mais l'on comprend bien que les esprits littéraires se trouvent tout à fait en dehors de l'affaire. Or, les mathématiques utilisées par les physiciens et les ingénieurs ne sont qu'une petite partie de «la mathématique». De plus, elles ne consistent, bien souvent, qu'en techniques dont certaines n'ont pas leur place dans l'enseignement des mathématiques jusqu'à l'âge de 14 ou 15 ans.

Le résultat le plus visible est que, depuis des générations, tous ceux qui ne sont pas tentés par une carrière d'ingénieur, dès l'âge de 18 ans, c'est-à-dire une fois passés les examens comportant une épreuve de mathématiques, rayent de leur préoccupation tout ce qui est mathématique.

Rayent ou croient rayer car bon nombre d'entre eux vont, tout au long de leur carrière, trouver et utiliser des mathématiques, mais ce ne sont pas celles qu'on leur avait enseignées dans le secondaire. Bon nombre d'entre eux, aussi, ne sachant pas qu'il peut exister d'autres opérations, que celles qui les ont fait pâlir sur les bancs de l'école, opérations portant sur du non numérique, n'aboutiront pas dans

les tâches qu'ils voulaient entreprendre.

Quels sont donc, mis à part les ingénieurs et les physiciens les utilisateurs des mathématiques. Et quelles mathématiques utilisent-ils?

Il n'est pas question de faire ici une étude complète sur ce sujet.

La liste des utilisateurs et celle des modes d'utilisation sont beaucoup trop longues mais nous allons prendre quelques exemples précis:

Voyons d'abord un domaine où la mathématique a fait irruption au cours des récentes années: celui de l'action.

Donnons la parole à des spécialistes:

Comme le signalent Mothes et Rosentiehl dans leur livre «Les mathématiques de l'action»*, la mathématique y a remporté un certain succès. De ce fait, l'ancienne dichotomie établie entre le monde de la pratique et celui de la théorie, entre le monde de la science et celui de l'action s'est trouvée remise en question... Pour une large part, les problèmes de l'action s'énoncent... en termes de votes, de choix, de paris, de compromis, de programmes, de plans.

Ce que doit apprendre le futur responsable c'est donc à classer, à structurer, à comparer, à hiérarchiser, à ordonnancer, à faire des plans... de façon à pouvoir remettre en cause les routines existantes, formuler les problèmes d'une fa-

çon intelligible et communicable, décider, en toute connaissance de cause, de les soumettre, ou non, au calcul.

... La formation de l'homme d'action sera essentiellement logique et méthodologique. Parmi les démarches intellectuelles les plus naturelles de l'homme, il en est une qui consiste à reconnaître dans l'univers qui l'environne des objets, des individus, des événements, en bref des collections d'éléments ou *ensembles*. Les ensembles constituent le matériau brut du statisticien, la première démarche de ce spécialiste consistant à y opérer des classements puis des dénombrements.

Les décisions humaines sont elles-mêmes tributaires de multiples événements. Ceux qui se réalisent appartiennent à l'histoire, ceux qui ne se réalisent pas n'ont appartenu qu'aux possibles. L'art de conjecturer c'est d'abord de dresser un inventaire des possibles, puis de classer les événements ainsi identifiés en vue de séparer le certain de l'incertain, voire d'ordonner les incertitudes.

Citons maintenant une réflexion de M. Faure lors d'une conférence au SICOB sur le thème: «*le dialogue homme-machine à l'âge de l'ordinateur*»: «Nous sommes bien loin de l'époque encore récente où les dirigeants des entreprises et des administrations recouraient principalement à l'intuition et au flair. Cette évolution a sans doute commencé par les bureaux d'études, en raison de la nécessité d'in-

* Dumod, éd., Paris

venter vite et bien, sous la pression de la concurrence internationale, du développement des échanges et de l'avancement prodigieux des techniques. Elle a été servie par l'apparition des premiers moyens de calcul automatique, rendant possible l'exécution des tâches devant lesquelles on avait, jusqu'à présent reculé.»

Il est un fait certain, c'est que l'on calcule (au sens large du terme) de plus en plus. Quelles en sont les raisons? Voici une réponse faite par le R. P. Russo au cours d'une conférence au SICOB:

1^o Du fait du progrès des sciences — plus largement d'une attitude tendant à la rationalisation de l'action qui se traduit notamment par la recherche d'une solution optimale — on fait aujourd'hui des calculs que l'on n'envisageait pas de faire auparavant.

2^o La complexité croissante des entreprises humaines impose aujourd'hui le calcul dans un grand nombre de cas où, dans le passé, l'intuition et le bon sens suffisaient à organiser l'action.

3^o La philosophie de la technique, encore en grande partie implicite, mais qui, tout de même, commence à s'affirmer, d'après laquelle l'action est, pour une grande part, une opération informationnelle, conduit à différencier cette fonction informationnelle et, par là, à l'organiser et à la développer.

Une des applications remarquables de cette différenciation est

constituée par les méthodes de *simulation* qui permettent de substituer à une activité réelle «matérielle» coûteuse une activité «immatérielle» de même structure formelle, beaucoup plus facilement réalisable.

On voit donc que, en ce qui concerne les mathématiques, l'homme d'action doit avoir une formation de base, qui en majeure partie n'est pas donnée dans l'enseignement élémentaire traditionnel. Cette formation s'avérant, d'ailleurs, également utile au futur scientifique.

Abordons maintenant un autre domaine, celui des sciences de l'homme.

Fait caractéristique de notre époque: en juillet dernier, le Centre International de Calcul organisait à Rome des journées d'études sur les méthodes mathématiques dans les sciences de l'homme; 4 sections: anthropologie, archéologie, psychologie, sociologie.

Voici quelques titres parmi les 30 communications:

- analyse automatique qualitative et quantitative des mythes;
- application de la théorie des monoïdes aux structures de parentés;
- à propos des évangiles synoptiques;
- analyse formelle de la géomancie;
- possibilités du scalogramme dans l'étude des bronzes chinois archaïques;

- le traitement automatique de mesures géophysiques sur des sites archéologiques;
- sur une méthode de choix lorsque plusieurs critères de préférence sont en jeu;
- tentative de construction d'un modèle de la mémoire humaine;
- traitement de l'information dans la résolution de problèmes;
- récents progrès en méthodologie non-métrique dans les sciences du comportement;
- sur la structure des coalitions politiques; etc.

Deux faits frappants se sont dégagés au cours de ces journées d'études:

1^o Dans chacune des sections, il y eut au moins un exposé de haute tenue mathématique, l'auteur utilisant des méthodes permettant d'aborder sous un jour nouveau et de manière fructueuse la recherche entreprise dans un domaine à priori totalement étranger à la mathématique (comme celui de l'étude des bronzes chinois);

2^o Le faible niveau de certains exposés était dû à l'emploi d'une méthodologie inadéquate au sujet et aux moyens employés (enregistrement de données sur ordinateur), le traitement des dites données étant fait sans tenir compte des possibilités de traitement non numérique de l'information: il était très sensible que pour les auteurs, la mathématique était indissociablement liée au nombre, l'or-

dinateur n'étant utilisé que pour sa rapidité d'exécution. Quand on sait combien coûte une heure de calcul, on ne peut pas s'empêcher de penser que c'est « beaucoup de bruit pour rien ». Pour que soient rentables les moyens considérables dont nous disposons pour prolonger, en quelque sorte, notre intelligence pour des réalisations que, matériellement, nous sommes incapables de faire, une réflexion préalable est nécessaire.

Encore une fois, cette réflexion n'est possible qu'à ceux qui ont une formation de base adéquate, formation qui ne leur a pas été donnée au cours de leurs études.

Disons un dernier mot d'une utilisation des mathématiques dans un domaine qui paraît lui être peut-être encore plus étranger, celui des arts: non seulement les méthodes mathématiques peuvent permettre l'analyse d'œuvres existantes mais elles ont droit de cité là où le savoir faire et l'intuition régnaient seuls, dans l'acte créateur lui-même.

Des quantités de possibles n'ont pas été exploités. En musique, Schoenberg l'avait découvert empiriquement, d'autres ont, après lui, entrepris une recherche consciente, citons Hiller et Isaacson aux USA, Gills en Angleterre, Zaripoff en Russie, Fuks en Allemagne, Xenakis et Barbaud en France.

En peinture, même des peintres tels que Lanquin en France tentent de traduire par des formes et des couleurs des structures proposées

par le mathématicien. Les éléments de structures mathématiques étant absolument abstraits et sans signification ils peuvent être matérialisés par des sons ou des couleurs ou des formes. Il s'ensuit des harmonies musicales ou picturales souvent inattendues, souvent très belles aussi.

Qu'y a-t-il de commun dans toutes ces activités où l'on utilise les mathématiques?

C'est l'utilisation de *modèles*. Récemment, un mathématicien décrivait sa tâche essentielle comme consistant à examiner une situation physique ou un fragment du «monde réel» et à développer un modèle mathématique pour le représenter. Ce modèle consiste en une série d'équations et de relations et il doit présenter une ressemblance suffisante par rapport à la situation originale pour que, lorsque des questions trouvent une réponse dans les termes du modèle, on trouve les mêmes réponses aux mêmes questions dans le monde réel.

Nous voici donc à une époque où, comme au XVII^e et au XVIII^e siècle, les mathématiques sont la base de la culture de tout honnête homme. Il est impossible de tout savoir sur les mathématiques mais un certain nombre de concepts fondamentaux sont indispensables à quiconque.

Que nous le voulions ou non, que les gouvernements le veuillent ou non, l'enseignement des mathématiques doit être entièrement re-

pensé, repensé comme un tout du jardin d'enfants à l'université, repensé dans son contenu et ses méthodes. Cet enseignement ne doit pas être conçu, comme il l'a été jusqu'à maintenant uniquement par des professionnels de la mathématique mais comme un instrument incomparable, intégrateur de culture. Il doit s'appuyer sur les recherches récentes en psychologie de l'enfant et en psychologie de l'intelligence. Les enfants ne doivent pas apprendre des techniques connues du maître et transmises par voie autoritaire mais réellement *construire* leur mathématique en formant eux-mêmes, peu à peu, les concepts en jeu.

Il faut leur donner la possibilité réelle d'abstraire (au sens étymologique du terme) ces concepts de leur propre expérience. Ce faisant, nous leur permettrons par surcroît, peut-être, de construire leur personnalité, d'intégrer leur personnalité.

Dans nos classes expérimentales, la joie éprouvée lors d'une découverte, la liberté des enfants essayant *une algèbre de leur invention*, comparant des méthodes et donnant des arguments pour appuyer celle qui a leur préférence peut en tout cas nous en donner l'espoir.

NICOLE PICARD

Chargée de Recherches

à l'Institut pédagogique national
PARIS

OUVRAGES RECENTS

PICARD (Nicole) «*Des ensembles à la découverte du nombre*». Paris, s. d. O.C.D.L., 65, rue Claude-Bernard, 17x22, 75 p.

Même ouvrage, mais *Cahier de l'élève*. Fiches de travail pour les enfants de 5 à 6-7 ans initiés à la découverte du nombre à partir des ensembles.

DIENES (Z. P.) «*L'apprentissage de la logique*» Paris, s. d. O.C.D.L., 20x26, 52 p.

Cet ouvrage est accompagné de *Fiches de travail* destinées aux élèves.

Pourquoi initier les enfants à la logique? Parce que, selon Bertrand Russel, «la mathématique est la jeunesse de la logique et la logique la virilité de la mathématique».

Et aussi parce que «les ordinateurs seront dans un très proche avenir aussi répandus que les machines à calculer actuellement, et qu'il faut fournir même aux enfants qui ne dépasseront pas l'enseignement court, les bases logiques permettant d'accéder à ce domaine».

RELATIONS BINAIRES

1. - Soit deux ensembles formés chacun de quatre réglettes prises au hasard,

l'ensemble $E = \{o, j, R, r\}$ et
l'ensemble $H = \{R, v, m, B\}$

Sur une grande feuille de papier java traçons un quadrillage (côtés des carrés 12 cm. environ) et disposons les deux ensembles ainsi:

B				
m				
v				
R				
H/E		j	R	r

Et maintenant jouons le jeu des relations.

2. - Relation «est de la même couleur que». Prenons méthodiquement chaque réglette de l'ensemble E, comparons-la successivement à chacune des réglettes de l'ensemble H et voyons quand la relation sus-mentionnée est satisfaite. Ce sera le cas une seule fois pour R, R. Plaçons alors, à l'intersection de la colonne R et de la ligne R le couple fait des deux réglettes roses.

Dans toutes les autres cases de la grille c'est la relation «n'est pas de la même couleur que» qui se trouverait satisfaite.

On aurait d'ailleurs pu commencer par elle.

3. - Relation «est plus grande que». Nous voyons que cette relation est satisfaite, entre autres pour toutes les comparaisons de la réglette o avec les réglettes R, v, m et B. Dans les cases de la grille on placera tous ces couples. Chaque fois, la réglette o sera placée sur la réglette de l'ensemble H avec laquelle on la compare.

Les cases vides seraient comblées si la relation avait été: «est plus petite ou égale à»

4. - Relation «entre un nombre exact de fois dans». Cette relation n'est satisfaite que pour R, R; R, m; r, R; r, m.

Relation inverse: «n'entre pas un nombre exact de fois dans».

5. - Relation «est plus grande de la valeur d'une réglette blanche».

Couples o, B; j, R; R, v.

La relation «est plus petite de la valeur d'une réglette blanche» ne se réaliserait que pour le couple r, v.

6. - Relation «forment un train égal ou plus petit que la rég. o».

Couples j, R; j, v; R, R; R, v; r, R; r, v; r, m.

Relation inverse «forment un train plus grand que la réglette o».

7. - On peut imaginer un nombre infini de ces relations. Cet exercice entraîne l'enfant à coordonner deux données en fonction de la loi de liaison établie comme règle du jeu. Les réglettes des deux ensembles peuvent être changées autant qu'on voudra et les règles du jeu aussi.

Ces changements seront, autant que possible, proposés par les enfants eux-mêmes.

S. R.

COUPLES DIVISIBLES

1. - Un couple est dit «couple divisible» quand le premier terme entre exactement dans le second. Ex.: couple (a, b); ce couple est divisible si a entre exactement dans b. Avec les réglettes, le couple (r, V) est divisible puisque la réglette r entre, par répétition (par *itération*), exactement dans V.

2. - Formons, avec les réglettes, des couples divisibles. Pour cela prenons, au hasard, deux réglettes, l'une étant placée sous l'autre. Par convention, la réglette placée dessous (celle qui est la réglette diviseur) est la première que l'on note quand on écrit le couple. Ex.: couple (v, V), la réglette v est placée sous la réglette V.

Quatre cas s'offrent à nous:

2. 1. - Les deux réglettes sont de même longueur: (v, v) (B, B), etc.

2. 2 - La rég. de dessous entre plusieurs fois, et un nombre exact de fois, dans la réglette de dessus: (b, v), (r, m), (j, o).

2. 3 - La réglette de dessous n'entre pas un nombre exact de fois dans celle de dessus: (r, v), (R, B).

2. 4 - La réglette de dessous est plus grande que la réglette de dessus: (v, b), (j, r).

Remarque: Seuls les cas 2. 1 et 2. 2 donnent des couples divisibles.

C'est de ceux-ci que nous nous occupons ici.

3. - Construisons, méthodiquement, tous les couples divisibles en mettant, chaque fois, en relation deux réglettes. Prenons les dix réglettes, de la blanche à l'orangée, et voyons ce qu'il advient quand on place, sous elles, les autres réglettes.

— Couples divisibles avec la réglette b :

(b, b) (b, r) (b, v) (b, R) (b, j)
(b, V) (b, n) (b, m) (b, B) (b, o).

— Couples divisibles avec la réglette r :

(r, r) (r, R) (r, V) (r, m) (r, o)

— Avec la réglette v :

(v, v) (v, V) (v, B).

— Avec la réglette R :

(R, R) (R, m)

— Avec la réglette j :

(j, j) (j, o)

— Avec les autres réglettes on ne forme plus qu'un seul couple divisible :

(V, V) (n, n) (m, m) (B, B) (o, o)

Observons maintenant cet ensemble.

4. - L'ensemble des couples divisibles est un ensemble de divisions¹. La réglette de dessus est le *dividende*, celle de dessous est le *diviseur*. Dès lors les couples peuvent être notés sous forme de division :

(r, V) sera noté $V:r$.

S'il y a dividende et diviseur, il y a aussi *quotient*. Construisons les quotients. Pour cela plaçons les réglettes diviseurs itérées (po-

sées bout à bout sous les réglettes dividendes) côte à côte, sous les réglettes dividendes.

Ex. : Couple (r, V) ou $V:r$; on place les réglettes r — il y en a trois — côte à côte, sous la réglette V. Pour le couple (r, o) ou $o:r$ on aura, sous la réglette o, un rectangle rouge constitué par cinq réglettes rouges placées côte à côte, l'une sous l'autre. Pour le couple (b, n) ou $n:b$ on aura, sous la réglette n, un long rectangle fait de sept réglettes blanches. Etc.

Plaçons maintenant contre les rectangles formés par les réglettes diviseurs mises en rectangles, et perpendiculairement à elles, une réglette qui tienne toute la hauteur de chacun de ces rectangles.

Cette réglette est le *quotient*.

Ex. : Couple $V:r$. Le rectangle rouge est fait de trois réglettes r mises côte à côte, l'une sous l'autre. Perpendiculairement à elles nous pouvons poser une réglette v qui mesure la hauteur du rectangle rouge. Cette réglette v est le quotient de la division $V:r$.

Les quotients des vingt-sept couples divisibles sont :

¹ Les couples divisibles peuvent aussi — et peut-être même surtout — être considérés comme des fractions, ou, quand il s'agit de réglettes, comme leur illustration. Dès lors une autre notation peut être envisagée, celle qui fait usage de la barre de fraction (r, V) sera noté V/r .

$b:b = b$	$V:b = V$
$r:b = r$	$n:b = n$
$v:b = v$	$m:b = m$
$R:b = R$	$B:b = B$
$j:b = j$	$o:b = o$
$r:r = b$	$v:v = b$
$R:r = r$	$V:v = r$
$V:r = v$	$B:v = v$
$m:r = R$	
$o:r = j$	
$R:R = b$	$j:j = b$
$m:R = r$	$o:j = r$
$V:V = b$	$B:B = b$
$n:n = b$	$o:o = b$
$m:m = b$	

Allégeons enfin la construction. Pour cela conservons, pour chaque division, trois réglettes seulement: le dividende, le diviseur et le quotient. La réglette dividende et la réglette diviseur sont placées l'une sous l'autre (r sous V pour la division $V:r$); la réglette quotient pourra être placée perpendiculairement aux deux premières, à leur droite. On notera le tout $V:r \Rightarrow v$, ce qui veut dire que la réglette r entre exactement dans la v et que le rectangle formé par les réglettes r a la hauteur d'une réglette v .

Ce travail de construction achevé procédons à la formation de sous-ensembles.

5. 1 - Les sous-ensembles formés par les couples qui ont le même diviseur. C'est ce qu'on a fait en tout premier lieu (ci-dessus, 3.).

On observe, entre autre, que, lorsque le diviseur est la réglette b , le quotient est le même que le

dividende; — que, lorsque le diviseur est le même que le dividende, le quotient est la réglette b . La réglette b fait figure, ici, d'élément neutre.

5. 2 Les sous-ensembles formés

5. 2 - Les sous-ensembles formés dividende b :

dividende $b:b$

»	$r:$	$r:b, r:r$
»	$v:$	$v:b, v:v$
»	$R:$	$R:b, R:r, R:R$
»	$j:$	$j:b, j:j$
»	$V:$	$V:b, V:r, V:v, V:V$
»	$n:$	$n:b, n:n$
»	$m:$	$m:b, m:r, m:R, m:m$
»	$B:$	$B:b, B:v, B:B$
»	$o:$	$o:b, o:r, o:j, o:o$

On observe que certains dividendes sont riches en diviseurs: R, V, m, B, o ; et que d'autres sont pauvres: b, r, v, j, n . A propos de ces derniers (qui n'ont que deux diviseurs: la réglette b ou eux-mêmes) on voit que, lorsque le diviseur est la réglette b , le quotient est le même que le dividende; et que, lorsque le diviseur est le même que le dividende, le quotient est la réglette b .

On observe aussi que les rectangles formés par les diviseurs pour bases et les quotients pour hauteurs sont, pour chaque dividende, toujours égaux entre eux et, a fortiori, égaux au dividende.

Ex.: dividende V : les rectangles $b \times V, r \times v, v \times r$ et $V \times b$ sont égaux.

5. 3 - Les sous-ensembles formés par les couples qui ont le même quotient:

quotients

b: b:b, r:r, v:v, R:R, j:j, V:V,
n:n, m:m, B:B, o:o.

r: r:b, R:r, m:R, V:v, o:j

v: v:b, V:r, B:v.

R: R:b, m:r.

j: j:b, o:r.

V: V:b

n: n:b

m: m:b

B: B:b

o: o:b

Ces dix sous-ensembles de quotients égaux forment dix classes d'équivalence (chaque classe contient des couples équivalents par rapport à leurs quotients). Cette équivalence peut se construire de la manière suivante, ex.: classe du quotient v, couples (r, V) et (v, B); formons les deux rectangles rxB et Vxv puis traduisons-les en deux trains; on verra que les deux trains sont de même longueur. Même opération en prenant les couples (b, v) et r, V): $b \times v = v \times r$, ou $b \times B = v \times v$.

Observons encore que chacune de ces classes d'équivalence est un nombre rationnel.

6. - Exercices. Chaque division comporte trois termes. Si deux de ces termes sont donnés, on peut retrouver le troisième.

6. 1 - Trouver le quotient. Ex.: V:r,... quotient v; m:r,... quotient R.

6. 2 - Trouver le diviseur. Ex.: V:?, quotient v, - réponse r; m:?, quotient R, - réponse r.

6. 3 - Trouver le dividende. Ex.: ?:r, quotient v, réponse V; ?:r,

quotient R, - réponse m.

7. - Toute cette étude sur les couples divisibles a été conduite sur le plan purement *qualitatif*. Ce sont des rapports qui ont été mis en lumière et c'est la structure de la division qui a fait l'objet de constructions.

Si maintenant on évalue numériquement les réglettes, la structure ne change pas.

Ex.: 7. 1 - Les réglettes sont évaluées au moyen de la réglette b.

Division:

V:r = v

6:2 = 3

m:R = ?

8:4 = ... 2

o:? = r

10:? = 2; réponse 5

?:v = v

?:3 = 3; réponse 9

Ex. 7. 2 - Les réglettes sont évaluées au moyen de la réglette r:

V:r = ?

3:1 = ?; réponse 3

m:R = ?

4:2 = ?; réponse 2

o:? = r

5:? = 1; réponse 5

?:v = V

?:1 1/2 = 3; réponse 4 1/2.

S. R.

L'éducateur,
sa tâche

«Nous sommes condamnés à chercher toujours l'art ou la manière de rendre notre action à la fois moins apparente, moins contraignante et pourtant plus profonde.»

G. Walusinski «Le courrier de la recherche pédagogique, 27, 3.66, p. 11.