106

MATH ECOLE

JANVIER 1983
22e ANNÉE

MATH-ECOLE 106

22e ANNÉE Paraît cinq fois par an JANVIER 1983

Editorial

Des connaissances... ou un savoir?

Dans ce petit matin de novembre, gris et morose comme la coordination romande, où je me rends à la réunion annuelle du comité de rédaction de notre revue, les conditions de routes difficiles entraînent sans peine mes pensées vers l'avenir de notre école. La circulation intense sous une pluie torrentielle transforme l'autoroute en un tunnel de lavage qui ne laverait plus et me rappelle, au sens propre du mot, la forte parole de McLuhan: «L'humanité fonce dans le brouillard les yeux rivés sur le rétroviseur».

La visibilité est réduite à quelques mètres mais les lignes blanches du conformisme et les barrières de sécurité des idées reçues me maintiennent sur la route aussi fortement que les ornières des chemins de terre du Moyen Age. Qu'y a-t-il au bout de la route? Un temps meilleur ou le carambolage gigantesque?

J'ai lu hier, dans l'un de nos quotidiens, qu'une commission du Grand Conseil préconisait que l'on accorde **priorité aux connaissances.** *Quelques heures plus tard, dans une commission très officielle, alors que l'on discutait de la compréhension de la multiplication, quelqu'un déclarait avec force que tout ceci était futilité et que seule la capacité d'effectuer des multiplications lors de l'examen de sélection pour le secondaire avait une réelle importance.*

Je ne connais pas suffisamment cette question pour me prononcer mais je ne puis m'empêcher de me demander si notre horlogerie en difficulté manque de bons comptables ou de bons exécutants – ce qui m'étonnerait depuis le temps qu'on vante la qualité du travail suisse – ou si elle n'a pas plutôt grand besoins de gens créatifs, audacieux, prêts à assumer des changements de cap. Qu'a-t-elle à faire de jeunes travailleurs qui calculeront toujours moins vite que des machines ou qui usineront moins bien que des robots? Triste réalité mais qui, hélas, ne peut être ignorée.

C'est pourquoi je me permettrai de faire respectueusement remarquer à nos politiciens que leur pluriel m'inquiète et je me référerai pour cela au bel article que Denis de Rougemont fit paraître naguère sous le titre «Information n'est pas savoir». Le philosophe s'appuie sur l'anglais pour distinguer «data», les données, «news», les informations et «knoledge», le savoir, la connaissance.*

Donner priorité à l'acquisition **des** *connaissances, c'est-à-dire des données et des informations, c'est fabriquer des hommes à l'image des ordinateurs. Mais donner priorité à* **la** *connaissance, au savoir, c'est promouvoir une éducation qui rende l'homme capable de dominer l'afflux des informations, de faire des synthèses, d'établir des relations hardies auxquelles jamais la machine ne pensera, de maîtriser un avenir aussi incertain qu'imprévisible.*

Raymon Hutin

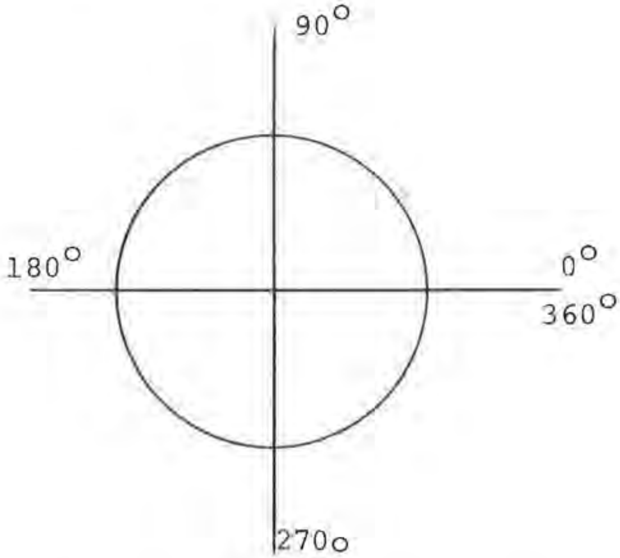
**in Diogène No 116 – Oct.-Déc. 1981 - Gallimard.*

Tout ce que l'on peut faire avec les chiffres 1, 2, 3 et 4

par Roger Délez (suite de l'article paru dans Math-Ecole No 99)

1. Démarche des élèves de ma classe de 5e-6e années à Puplinge (GE) durant l'année scolaire 1980-81

En partant des 4 quadrants du cercle



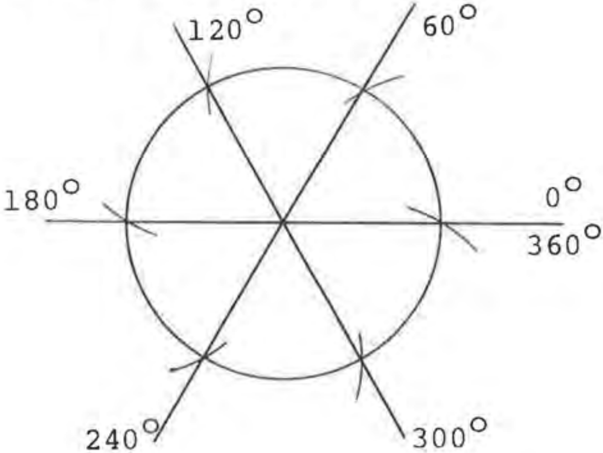
Nous obtenons: 0° 90° 180° 270° 360°

à ce stade, nous pouvons travailler un peu de nomenclature concernant les angles:

0°			angle nul
1°	→	89°	angle aigu*
90°			angle droit, angle d'un quart de tour
91°	→	179°	angle obtus*
180°			angle plat, angle d'un demi-tour
181°	→	359°	angle rentrant* (270° = angle de trois quarts de tour)
360°			angle d'un tour

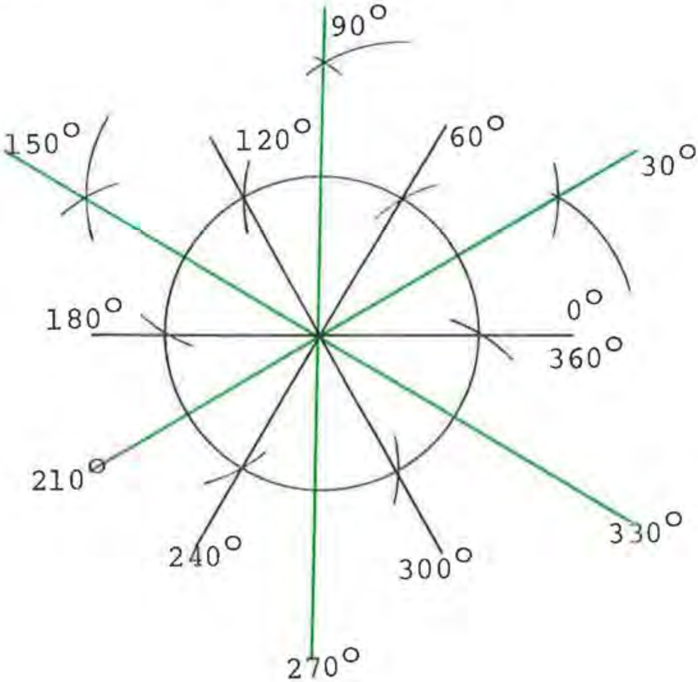
* si on s'en tient uniquement aux angles entiers.

En partant du cercle et de l'ouverture de compas



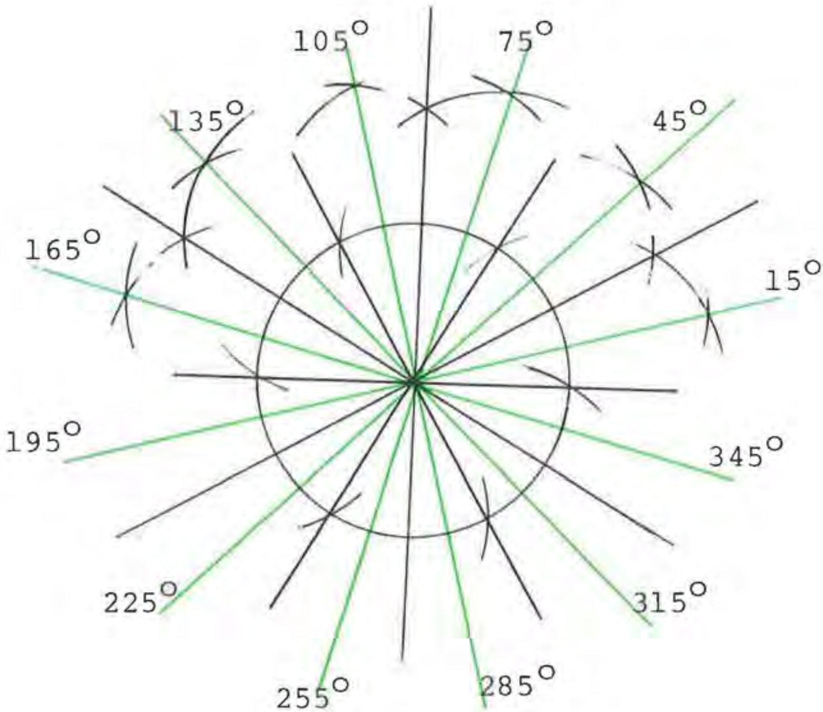
Nous obtenons: 0° 60° 120° 180° 240° 300° 360°

Gardant la même ouverture de compas, traçons les bissectrices.



Nous obtenons:	30° 90° 150° 210° 270° 330°

Traçons à nouveau les bissectrices:

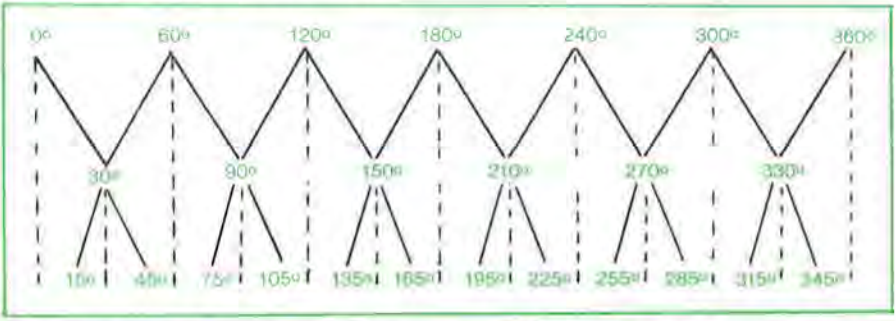


Nous obtenons:	15° 45° 75° 105° 135° 165° 195° 225° 255° 285° 315° 345°

A ce stade de décomposition des angles, les enfants remarquent une première difficulté: «on peut encore tracer des bissectrices mais tous les nouveaux angles sont impairs ce qui signifie qu'on n'aura plus des angles entiers.»

Cette difficulté sera reprise plus tard. En attendant, que peut-on faire avec tous les nombres trouvés? Comment les regrouper?

Après plusieurs propositions, qui toutes peuvent être travaillées, nous nous arrêtons sur cette représentation:



A partir de ce tableau, les enfants ont étudié les relations existant entre ces nombres et ont travaillé pendant plusieurs leçons les *4 opérations.*

Voici un aperçu de quelques opérations:

60 c'est(30 + 90) : 2 mais 30 + 90 = 120
30 c'est (15 + 45) : 2 mais 15 + 45 = 60
30 + 90 = 120
10 × 15 = 150
210 – 150 = 60 ou 210 – 90 = 120
comme 270 – 210 = 60 comme 270 – 150 = 120

Ce qui est intéressant, c'est de voir le cheminement de chacune de ces opérations.

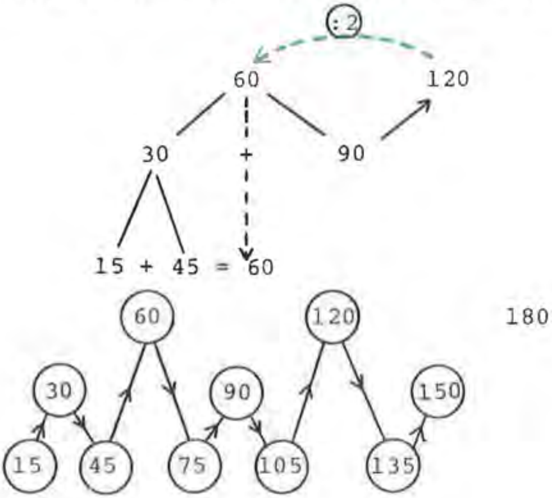
60 = (30 + 90) : 2

30 = (15 + 45) : 2

30 + 90 = 120

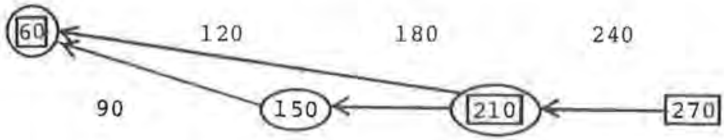
15 + 45 = 60

10 × 15 = 150

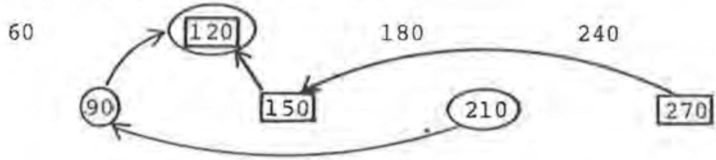


il obtient ainsi 1 × 15 2 × 15 3 × 15 4 × 15 ... 10 × 15

210 - 150 = 60   comme 270 - 210 = 60



210 - 90 = 120   comme 270 - 150 = 120



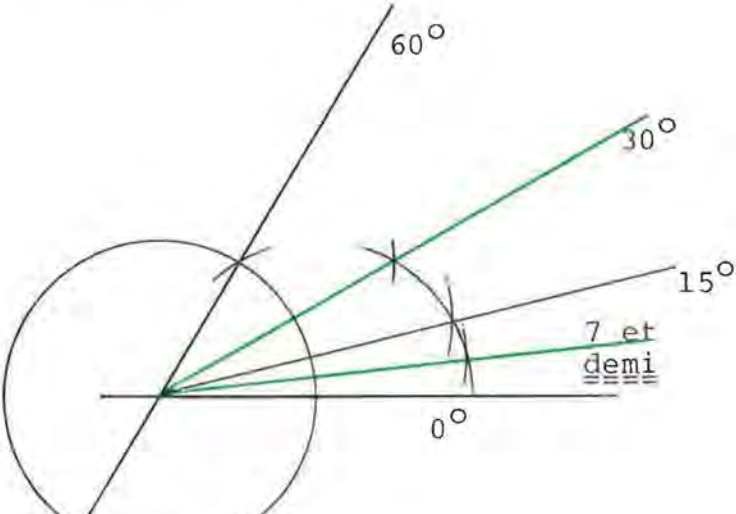
Voici quelques exemples donnés. Les élèves vont nous amener sur des pistes extrêmement diversifiées...

Laissons donc libre cours à leur imagination...

Nous avions laissé une question en suspens...

«Ah, oui c'est quand on ne pouvait plus diviser les angles parce qu'ils étaient impairs».

Profitons de reconstruire l'angle de 60°, divisons-le en deux, puis en 2, puis en 2... que se passe-t-il?



Cette difficulté d'écriture peut nous amener tout naturellement au système décimal.

Nous venons d'étudier les angles, regardons ce qui se passe dans d'autres domaines.

Les angles	Les francs	Les mètres	Les kilos	Les litres
60°	60 F	60 m	60 kg	60 l
30°	30 F	30 m	30 kg	30 l
15°	15 F	15 m	15 kg	15 l
7° et demi	7 F 50	7 m 50	7 kg 500	7 l 5
	3 F 75	3 m 75	3 kg 750	3 l 75
		1 m 875	1 kg 875	1 l 875

Pour établir ce tableau, dans le cours de la discussion, les enfants ont été amenés à procéder à des changements d'unités.

Des F on est passé aux centimes : bloqué à 3 F 75

Des m on est passé aux centimètres
aux millimètres : bloqué à 1 m 875

Des kg on est passé aux grammes : bloqué à 1 kg 875

*** Les élèves n'ont pas pensé au dg, cg et mg.**

Des l on est passé aux décilitres
aux centilitres
aux millilitres : bloqué à 1 l 875

Voulant en savoir plus, j'ai donné une indication aux enfants:

1° d'angle = 60 minutes

Que pouvez-vous faire de cette indication?
«Alors 7° et demi c'est égal à 7° 30 minutes»
«Eh bien on peut encore diviser!»

A ce stade, j'ai laissé faire et voici ce que j'ai trouvé dans certains groupes:

7° + 30'

La moitié 3° et demi + 15 minutes
3° 30 min. + 15 minutes
3° 45 minutes → **3° 45'**

3° + 45'

La moitié 1° et demi + 22 minutes et demi
«Mais M'sieur les minutes se divisent-elles en secondes?»
– Bien sûr.
Et les voilà repartis.
1° et demi + 22 minutes et demi
1° 30 min. + 22 min. + 30 sec.
1° 52 min. 30 sec. → **1° 52' 30"**

1° 52' 30"

La moitié un demi degré + 26 min. + 15 sec.
30 min. + 26 min. + 15 sec.
56 min. 15 sec. → **56' 15"**

56' 15"

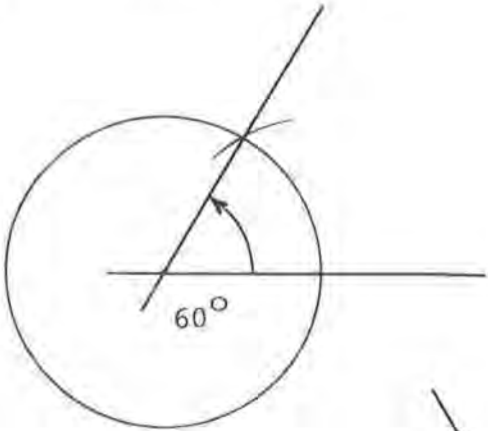
La moitié 28 min. 7 sec. et demi
«M'sieur, après les secondes c'est les 1/10 et les 1/100 de seconde comme au ski?»
→ **28' 7" 5 dixièmes**

L'exercice peut se poursuivre pour la plus grande joie des enfants...

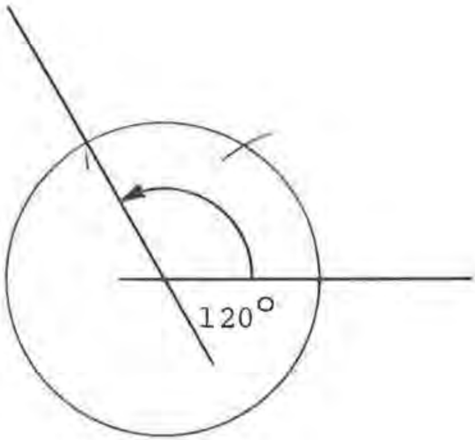
J'ai constaté avec plaisir que les élèves savent travailler dans des bases différentes.

2. Autre démarche menée dans cette même classe de 5e-6e années à Puplinge (GE)

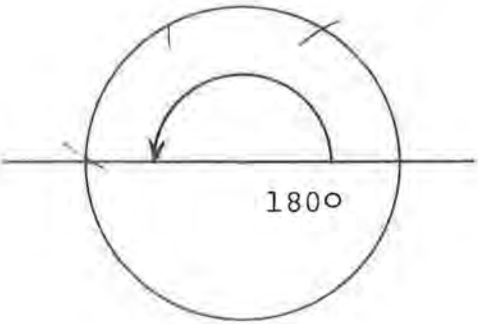
Utilisation du compas



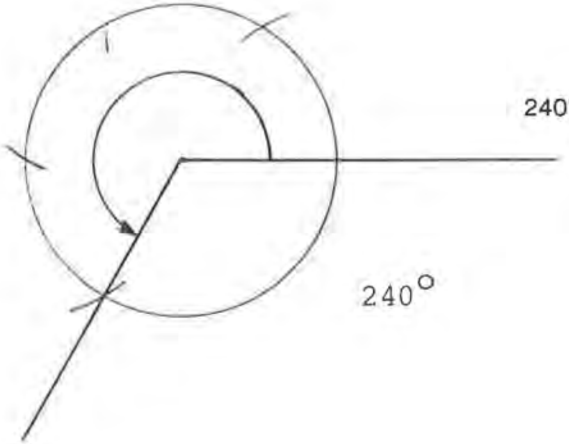
60° = 1 ouverture de compas
= ∢ aigu



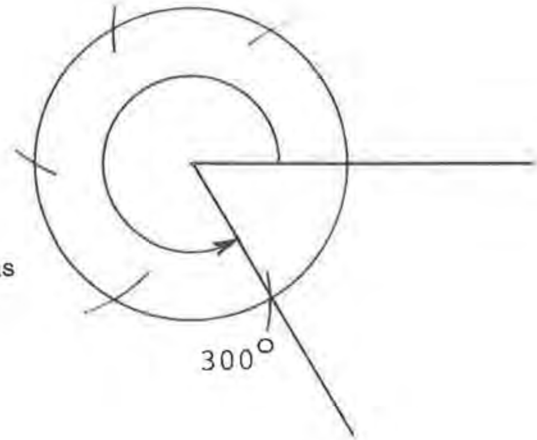
120° = 2 ouvertures de compas
= ∢ obtus



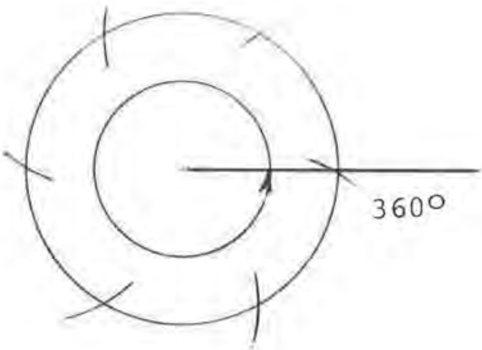
180° = 3 ouvertures de compas
= ∢ plat
= demi-cercle
= segment de droite



240° = 4 ouvertures de compas
= ∢ rentrant

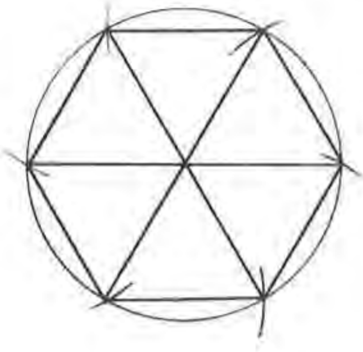


300° = 5 ouvertures de compas
= ∢ rentrant



360° = 6 ouvertures de compas
= ∢ d'un tour
= ∢ nul

«Pourquoi, quelle que soit l'ouverture de compas, trouve-t-on toujours (60°)?»: (Béatrice).

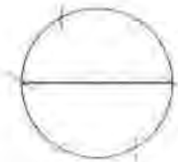


Conclusions des élèves:

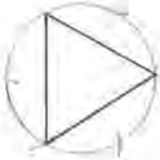
- **L'**∢ au centre d'un cercle = $60° + 60° + 60° + 60° + 60° + 60° = 360°$.
- L'ouverture du compas entre 6 fois dans la circonférence.
- L'angle au centre d'un △ est égal à $360° : 6 = 60°$.
- Tous les côtés sont égaux (on l'a vu avec le compas).
- Les ∢ sont égaux, tous ont 60°.
- On a des △ équilatéraux.
- On a dessiné un hexagone.

«On a vu une fois les angles de 90° 180° 270° et aujourd'hui ceux de 60° 120° 180° 240° 300° 360°; peut-on dessiner des figures géométriques autres que l'hexagone en utilisant ces points de repères?»

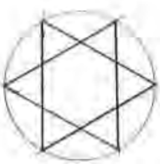
Après essais et inventaires voilà le fruit des recherches des enfants:



- disque
- cercle
- demi-cercle
- diamètre

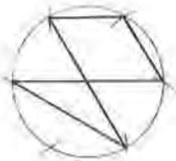


- triangle équilatéral
- secteur de cercle



- étoile à 6 branches
- triangles équilatéraux
- hexagone

- rectangle
- triangles équilatéraux
- triangles isocèles



- losange
- triangle isocèle

- losange
- trapèze isocèle
- triangle rectangle
- trapèze rectangle
- triangle équilatéral

- cerf-volant
- triangle isocèle
- triangle rectangle
- triangle équilatéral

- étoile à 6 branches
  (à l'infini)
- hexagone
- triangle équilatéral
- triangle rectangle
- cerf-volant

- triangle équilatéral
- triangle rectangle
- triangle isocèle
- pentagone irrégulier
- étoile à 5 branches
- losange
- rectangle
- flèche

en ajoutant 90°, 270°

- carré
- triangle rectangle
  isocèle

- triangle isocèle
- triangle équilatéral
- triangle rectangle
- flèche
- cerf-volant
- trapèze isocèle
- quadrilatère
- étoile

- rectangle
- parallélogramme
- losange
- triangle rectangle
- triangle équilatéral
- trapèze rectangle

Laissons aux enfants le soin de construire le plus de figures possibles en leur demandant de noter le nom de toutes celles qu'ils reconnaissent.

On peut alors travailler: – tous les △
– tous le quadrilatères
– etc.

Au libre choix de chacun!...

Avant l'école primaire

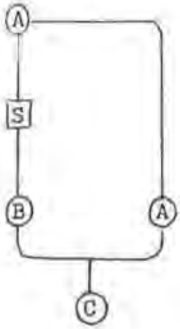
par R. Dénervaud

«Enseigner des mots n'est pas la même chose que développer le pouvoir de raisonnement des enfants».
(La théorie de Piaget et l'éducation préscolaire, C. Kamii & R. de Vries)

Lorsqu'un enfant commence sa première année primaire, on ne peut pas exiger de lui d'avoir un bagage de connaissances, des prérequis. Mais cette absence d'exigence ne signifie évidemment pas absence d'un tel bagage: par ce qu'il a déjà vécu, l'enfant est capable de parler, écouter, chanter, dessiner, ...; avec plus ou moins de maîtrise. Dans ce qui suit, je voudrais vous livrer certaines réflexions concernant l'acquisition des connaissances logico-mathématiques (avant l'école primaire) qui, dans les théories de Piaget, sont caractérisées par:

1) elles ne sont pas directement enseignables (parce que construites par l'enfant);
2) elles se développent toujours dans une seule direction: vers plus de cohérence;
3) une fois construites, elles ne seront pas oubliées;
4) la vérification empirique est superflue.

Pour mieux comprendre comment se construit cette connaissance, considérons un enfant à un moment donné. Il dispose d'un certain bagage de connaissances logico-mathématiques (qu'on peut désigner par Ⓐ). Pour l'enfant, il n'y a pas de doute, le système Ⓐ est correct (voir 4e caractéristique) (dans son système, l'enfant a toujours raison). Le jour où il se trouve en face d'une situation conflictuelle $\boxed{S}$ qu'il ne peut maîtriser à l'aide de Ⓐ, il devra trouver un système Ⓑ qui lui permette de résoudre $\boxed{S}$. A ce moment, Ⓑ est un «parasite» existant à côté de Ⓐ et la connaissance sera construite seulement lorsque le système Ⓐ aura été remplacé par un système qui l'englobe, et qui englobe également Ⓑ:



On peut illustrer ce mécanisme avec l'exemple de Pierre (5 ans, 6 mois), qui sait compter (au sens de la comptine, suite de mots servant à compter) jusque vers trente. En face du problème d'ajouter 1 à un nombre comme 7 (inférieur à 10), il procède comme suit (comportement Ⓐ):

1) il lève 7 doigts;
2) il les compte en touchant son menton successivement avec chacun des doigts levés;
3) il s'aide de sa bouche pour lever un doigt de plus;
4) il compte les doigts levés comme au point 2).

La situation conflictuelle 🅂 était de lui demander alors d'ajouter 1 à 10. Dans un premier temps, il n'a pas été possible de suivre la trace du procédé employé pour venir à bout de cette situation. Petit à petit, on a trouvé sa manière de faire (comportement Ⓑ): il compte depuis un jusqu'au nombre donné supérieur à 10), puis serre les poings (comme pour «marquer» ce nombre) et s'arrête au mot suivant de la comptine. Ce qui est surprenant, c'est que malgré un certain «drill» du comportement Ⓑ, avec des nombres plus grands que 10, quand en conclusion on lui a demandé 8 + 1, il a repris intégralement le comportement Ⓐ. Dans cet exemple, on est donc arrivé à la coexistence de Ⓐ et de Ⓑ, on n'a pas encore Ⓒ, et il est clair que ce n'est pas l'intervention de l'adulte qui va permettre d'y arriver. On voit donc que la part de l'adulte dans l'acquisition des connaissances logico-mathématiques est restreinte et, d'une manière directe, se limite généralement à amener 🅂, ... et sans savoir ce que l'enfant va en faire, un peu comme quelqu'un qui va à la pêche, lance la ligne... et ne sait pas ce qui sortira. Je pense en fait que la comparaison avec la pêche ne s'arrête pas là: un bon pêcheur connaît les coins poissonneux, choisit sa canne et son appât pour augmenter ses chances de sortir le poisson convoité. Comme le pêcheur connaît la rivière, il faut que l'adulte connaisse le mode de raisonnement Ⓐ de l'enfant, qu'il en trouve les limites pour amener l'enfant au conflit qui le fera progresser. Comme l'appât doit donner au poisson l'envie de mordre l'hameçon, 🅂 doit donner à l'enfant l'envie de construire cette étape intermédiaire qu'est Ⓑ, sorte de graine qui donnera Ⓒ. Là s'arrête la comparaison avec la pêche: je ne peux pas croire qu'un enfant pris par 🅂 courre les mêmes risques qu'un poisson au bout de la ligne!

En fait, pour qu'une situation 🅂 remplisse son rôle, il est indispensable que:

1) elle ne puisse pas être maîtrisée par Ⓐ;
2) l'enfant puisse la comprendre;
3) l'enfant ait envie de la surmonter.

Ce troisième point est fondamental, car c'est bien l'enfant qui doit construire Ⓑ. Ainsi, d'entrer dans le jeu d'un enfant (en train de jouer) pour lui apporter une telle situation, dans le contexte où il est (son jeu), avec le matériel qu'il a (ses jouets) est certainement plus favorable que de plonger l'enfant dans un contexte entièrement fixé par l'adulte. En d'autres mots, une (brève) intervention pendant une activité libre a certainement plus de chances d'aider un enfant à progresser qu'une «leçon» où le jeu ne l'intéresse pas nécessairement, et avec un matériel qu'il n'a peut-être pas envie de manipuler.

En guise de conclusion...

Comment un enfant peut-il posséder un langage évolué si on lui parle toujours un langage «bébé» (bobo, dodo, popo...)? De même, comment prétendre qu'un enfant acquière de bonnes connaissances logico-mathématiques si on n'enrichit pas au mieux son environnement, en l'encourageant à surpasser sa façon de raisonner à un moment donné. L'apprentissage élémentaire de la langue maternelle ne passe pas plus par des leçons que le développement de base du raisonnement, mais au contraire par un environnement en chaque instant riche de ce que l'enfant peut en retirer.

Pour enrichir vos connaissances...

MATHÉMATIQUES VENUES D'AILLEURS

Divertissement mathématique en URSS

Editions Belin 1982

A Moscou, un journal de mathématique et de physique pour jeunes, «QUANT», est publié mensuellement à près d'un million d'exemplaires. L'équipe de rédaction regroupe des mathématiciens confirmés, de jeunes chercheurs, des professeurs et des historiens. Ce journal organise des rencontres et des écoles d'été.
Avec l'appui de l'UNESCO, J.M. Kantor a réuni et adapté un certain nombre d'articles accompagnés de la solution des exercices.
Sous le thème «Figures et Géométrie», vous y trouverez le nombre d'or, le chèvre et la corde, les mathématiques du billard, le plan projectif. Le chapitre «Quadrillage et réseaux» présente le polygone de Newton, le cube transpercé, le jeu de la vie (emprunté à un Anglais, J. Conway). «Les cheminements mathématiques» font intervenir le jeu d'échecs, la notion d'invariant, le manuscrit de Saragosse, l'escalier du Pharaon. Enfin «Nombres et logique» vous invite à aborder l'art de la récurrence, la démonstration et la fonction d'Euler.
De quoi passer quelques bonnes heures à dérouiller votre esprit (si le besoin s'en fait sentir) ou à imaginer des adaptations à l'intention de vos élèves.
MATH-ECOLE publiera avec grand plaisir les résultats de vos expériences si vous les lui faites parvenir.

RH

L'arithmétique en première primaire sans crayons *

par Constance Kamii, Université d'Illinois à Chicago

Les pédagogues définissent actuellement comme objectif de l'arithmétique en première année primaire la capacité d'écrire des réponses justes à des questions telles que:

2 + 3 = ...
4 + ... = 6
.... dizaines et .... unités (lorsqu'une image de 10-30 objets est présentée).

Cet objectif découle de l'ignorance de la distinction faite par Piaget entre *abstraction* et *représentation*. Quand l'enfant devient capable d'écrire des réponses correctes à des questions écrites, la plupart des pédagogues actuels croient que l'enfant a progressé d'un niveau «concret» à un niveau plus «abstrait» que lorsqu'il comptait des objets et des images.

J'aimerais clarifier la différence entre l'abstraction (réfléchissante) et la représentation, pour montrer que la représentation écrite est un mauvais objectif pour l'arithmétique en première année primaire, et que l'accent doit plutôt être mis sur l'abstraction. Je discuterai d'abord des additions simples (exemple: 2+3=..........) et je passerai ensuite aux équations lacunaires (exemple: 4+..........=6) et à la numération de position (c'est-à-dire, par exemple, le fait que le «1» dans «16» signifie «dix»).

Si je prends deux crayons, un rouge et un jaune, par exemple, je peux dire qu'ils sont *différents*. Cette différence n'existe ni dans l'un des crayons ni dans l'autre, ni nulle part ailleurs dans le monde extérieur. La différence n'existe que dans la tête de chaque personne qui met ces objets en relation de «différence». Cette mise en relation est un exemple de l'abstraction réfléchissante. C'est par abstraction réfléchissante que nous créons des relations entre les objets. Il est également possible de considérer les crayons comme étant *semblables*. Dans ce cas-là, à nouveau, la ressemblance n'existe ni dans l'un des crayons ni dans l'autre, mais dans la tête de chaque individu qui considère les crayons comme étant «semblables». Un troisième exemple d'abstraction réfléchissante est la relation de *deux*. De nouveau, cette relation n'existe pas dans les crayons. Les crayons sont observables mais non le nombre «deux». Une fois que l'enfant a créé la relation de «deux» par abstraction réfléchissante, il peut la représenter oralement avec le mot «deux» ou graphiquement avec «oo» ou le chiffre «2».

Je suis opposé au fait de fixer comme objectif la capacité d'écrire des réponses justes parce que cela met l'accent sur la production des chiffres sur papier. Les conséquences malheureuses en sont les suivantes:

1. Les enfants tendent à aborder chaque question d'une façon mécanique, en se limitant au comptage sans réfléchir, uniquement pour obtenir des réponses. Face à la question «3 + 4 = ... », par exemple, les enfants comptent souvent des points sans aucune réflexion numérique du genre de «3 + 4 = 1 de plus que 3 + 3».
2. Les enfants ne peuvent penser aux nombres 3, 4 et 7 lorsqu'ils se centrent sur le fait d'écrire «7». Autrement dit, la nécessité d'écrire les réponses interfère avec la possibilité de penser aux additions et de se souvenir de la combinaison de 3, 4 et 7.
3. Les enfants abordent les questions d'une même fiche séparément, sans effectuer de mise en relation entre elles. Ainsi, ils ne remarquent pas, par exemple, que 4 + 3 est la même question que 3 + 4.

Je propose les deux objectifs suivants à la place de la représentation graphique:

1. Que les enfants réfléchissent (c'est-à-dire, qu'ils opèrent sur les nombres et qu'ils les mettent en relation).
2. Qu'ils se souviennent de ces opérations numériques.

Des activités de deux types me semblent idéales pour atteindre ces objectifs: des situations de la vie quotidienne telles que les votations, et des jeux de groupes.

L'idée d'utiliser ces activités naturelles au lieu du programme d'enseignement est inspirée de la théorie piagétienne du nombre. Selon cette théorie, l'enfant construit le nombre par lui-même, sans transmission sociale, par abstraction réfléchissante. Autrement dit, la source ultime de la connaissance du nombre est à l'intérieur de chaque enfant. Le mot «dix» et le chiffre «10» requièrent une intervention sociale, mais non pas l'idée numérique sous-jacente. Une fois que l'enfant a construit cette idée, il peut la représenter avec un dessin inventé par lui-même tel que «oooooooooo», sans aucun apprentissage social. Par ailleurs, selon la théorie piagétienne, la construction même du nombre implique l'addition parce que la série des nombres est engendrée par l'opération de + 1. Autrement dit, comme le nombre lui-même est de nature additive, j'ai fait l'hypothèse que l'enfant doit pouvoir apprendre les additions sans recevoir aucune instruction scolaire.

Avant de donner quelques exemples de jeux de groupes, j'aimerais présenter les résultats d'une expérience effectuée avec un groupe d'enfants de première primaire dans une banlieue de Chicago. Le groupe expérimental du tableau 1 n'avait reçu aucune instruction scolaire. Lorsque l'on compare ce groupe au petit groupe de contrôle qui avait suivi un enseignement traditionnel (avec des fiches), on ne constate pas de différence systématique dans la partie supérieure (les nombres à ajouter allant jusqu'à 6). Lorsque l'on passe à la partie inférieure de ce tableau (les nombres à ajouter allant de 7 à 10), on remarque la supériorité du groupe expérimental. Celui-ci avait mieux mémorisé les additions que le groupe de contrôle.

Tableau 1

Pourcentages des enfants de première primaire qui ont immédiatement donné les réponses correctes.

	Groupe expérimental N = 24	Groupe de contrôle N = 12	Différence
2 + 2	100	100	0
5 + 5	100	92	8
3 + 3	100	100	0
4 + 1	100	100	0
6 + 1	100	100	0
5 + 1	100	100	0
1 + 4	100	100	0
2 + 3	100	92	8
5 + 2	100	92	8
4 + 4	96	100	− 4
1 + 5	96	100	− 4
6 + 6	88	75	13
4 + 2	88	83	5
3 + 2	88	92	− 4
2 + 5	88	92	− 4
6 + 2	88	83	5
2 + 6	88	67	21
6 + 3	79	67	12
4 + 5	75	92	−17
2 + 4	75	92	−17
5 + 4	71	83	−12
4 + 3	71	83	−12
3 + 4	71	75	− 4
4 + 6	67	50	17
5 + 3	63	83	−20
3 + 6	63	67	− 3
3 + 5	63	75	−12
6 + 5	54	58	− 4
5 + 6	50	58	− 8
9 + 1	100	100	0
7 + 2	100	83	17
1 + 10	100	92	8
10 + 10	100	75	25
2 + 8	88	67	21
7 + 3	83	67	16
9 + 2	79	67	12
9 + 9	63	58	5
8 + 5	54	42	12
8 + 8	54	42	12
7 + 7	50	50	0
5 + 7	50	58	− 8
7 + 8	38	25	13

Une fois que les enfants avaient bien mémorisé les additions, ils n'avaient aucune difficulté à remplir les fiches. Autrement dit, si les additions sont construites et bien mémorisées, il est très facile de passer à la représentation écrite.

J'aimerais maintenant vous donner six exemples de jeux de groupes: «les Cartons à Remplir», le «Jeu de l'Oie», la «Bataille Double», le «Mémory», le «Parcheesi Double» et «Toujours Dix».

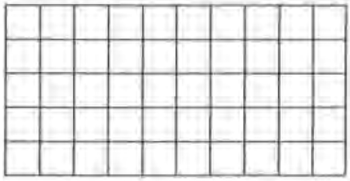


Figure 1

Pour «les Cartons à Remplir», l'enseignant prépare six petits cartons, chacun réparti en 50 cases comme le montre la figure 1. Les enfants lancent un ou deux dés et mettent sur les cases le nombre de jetons correspondant au total des points sur les dés. Celui qui remplit son carton le premier est le gagnant.

Le «Jeu de l'Oie» se joue selon les mêmes principes, mais les joueurs déplacent des pions sur les cases d'un trajet au lieu de les remplir. Le premier qui arrive au but est le gagnant.

La «Bataille Double» se joue selon les mêmes principes que la «Bataille», à cette différence près que chaque joueur reçoit deux tas de cartes et que la somme de deux cartes d'un joueur est comparée à la somme des deux cartes de son adversaire. Celui qui a le plus grand total ramasse les quatre cartes. Le joueur qui a le plus grand nombre de cartes à la fin gagne.

Le jeu du «Mémory» commence avec toutes les cartes retournées. A tour de rôle, chaque joueur essaie d'obtenir le plus grand nombre possible de paires de cartes identiques en retournant chaque fois deux cartes. Il continue à jouer tant qu'il trouve deux cartes identiques. Si elles sont différentes, il les remet à leurs places, et le tour passe au joueur suivant. La personne qui a le plus de cartes à la fin gagne.

Si les cartes du «Mémory» portent des points (chacune valant 1, 2, 3, 4, 5 ou 10 points, par exemple), les enfants modifient la règle du jeu selon les principes expliqués dans Kamii et DeVries (1980) en décidant que le gagnant sera celui qui a obtenu le plus grand nombre de points à la fin. Comme les enfants additionnaient les points au fur et à mesure qu'ils retournaient des paires, j'ai essayé de leur suggérer de noter leurs totaux chaque fois qu'ils retournaient de nouvelles paires. Pour moi, cette situation était l'occasion idéale de montrer l'utilité de la représentation graphique, mais les enfants n'ont pas ressenti cet avantage, car ils se souvenaient bien de leurs totaux. En cas d'oubli, ils recommençaient volontiers l'addition. Voilà un exemple de plus qui m'a renforcé dans l'idée de ne pas exiger l'utilisation du crayon. Le fait d'écrire semble être une rupture d'attention dans une activité attrayante.

Le «Parcheesi» est un jeu que l'on trouve dans le commerce. Il est joué selon les mêmes principes que le «Jeu de l'Oie», à ces différences près que le parcours est plus long et que chaque joueur a quatre pions. Pour le «Parcheesi Double», j'ai introduit un dé ayant dix faces et portant les chiffres de 1 à 10. L'enfant lance ce dé et avance chaque fois du double du nombre sorti. J'ai inventé cette règle parce que de nombreuses recherches ont montré que les «doubles» (2 + 2, 3 + 3, 5 + 5, etc.) sont plus faciles à mémoriser que les autres additions semblables (telle que 2 + 3). Une fois que les «doubles» sont mémorisés, l'enfant peut utiliser cette connaissance dans des situations telle que 5 + 6.

«Toujours Dix» a trait à la décomposition de 10. On utilise dans ce jeu les cartes allant de 1 (As) à 9. Les neuf premières cartes du tas sont arrangées comme le montre la figure 2. A tour de rôle, les joueurs essaient de trouver tous les couples possibles pour faire un total de 10 (5 + 5, 3 + 7, et 2 + 8 dans la situation de la figure 2). Celui qui a le plus de cartes à la fin gagne.

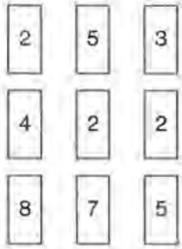


Figure 2

Si les enfants font des additions dans ce type de jeux jour après jour, ils mémorisent facilement et inévitablement. L'interaction sociale dans ces jeux rend les enfants beaucoup plus actifs mentalement que lorsqu'ils remplissent des fiches, et une fois que les additions sont bien apprises, le passage à l'écrit se fait sans aucune difficulté.

Les équations lacunaires

La faute la plus commune que l'on trouve en première primaire est la suivante: $4 + \underline{10} = 6$. Elle est due à l'incapacité des jeunes enfants de lire dans l'équation la relation hiérarchique de partie à tout (Inhelder et Piaget, 1959). Autrement dit, l'enfant ne peut lire dans une équation que les relations qu'il est capable de construire (par abstraction réfléchissante).

Deux épreuves mettent en évidence les mêmes difficultés de mise en relation des parties au tout. Les résultats de la première sont présentés dans le tableau 2. Dans cette épreuve, je prenais trois jetons en disant à l'enfant «Tu vois que j'ai pris 3 jetons.» En en ajoutant 2, je lui faisais remarquer: «j'en ajoute 2». Je l'ai ensuite prié d'écrire sur une feuille ce que j'avais fait. Si l'enfant écrivait «5», je lui demandais de commencer par le «3» en lui disant «Tu as très bien écrit le résultat, mais je t'ai demandé d'écrire ce que j'ai fait. Tu vois que j'en ai d'abord pris 3. Peut-tu commencer par le «3» pour montrer que j'ai pris 3 jetons au départ?».

Les enfants avaient rempli des fiches de calcul pendant 5 mois, mais on constate dans le tableau 2 que 45 % d'entre eux n'ont écrit que «3 2», «2 3» ou «3 + 2» (les deux parties sans le tout). Seulement 24,5 % ont écrit trois chiffres, ce qui montre que la représentation d'une relation hiérarchique est rare en première primaire. On constate, en outre, que l'opération (+) et la relation (=) ne sont représentées avec des signes conventionnels que par 24,5 % et 10,5 % respectivement.

	N = 29
<u>2 chiffres sont écrits</u> (les collections initiales)	
«3 2» ou «2 3»	34,5%
«3 + 2»	10,5
<u>3 chiffres sont écrits</u> (les collections initiales et le tout final)	
«3 + 2 = 5» ou «2 + 3 = 5»	10,5
«3 + 2 5»	3,5
«3 2 5»	3,5
«2 $_5$3»	3,5
«5 3 2»	3,5
<u>Les autres réponses</u>	
«3 5» ou «$\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{5}$» (la collection initiale et le tout final)	10,5
«5» («Je ne peux pas écrire '3' parce que les 3 sont déjà dans le 5.»)	3,5
«3 4 5»	3,5
«3 + 5 = 5»	3,5
«+ 3 2 − 5»	3,5
«3 = 2»	3,5
«2»	3,5

Tableau 2

Cette évolution de la représentation écrite suit le même ordre que l'évolution de l'abstraction réfléchissante. L'enfant construit d'abord les quantités numériques et ensuite opère sur elles. Le résultat de cette opération est une relation hiérarchique qui est une des caractéristiques des opérations concrètes. Schubauer-Leoni et Perret-Clermont (1980) ont également mis en évidence l'apparition tardive des équations dans des situations semblables.

Dans la deuxième épreuve, j'ai demandé à chaque enfant s'il pouvait finir l'équation suivante: 4 + 2 = ... Quand il avait écrit la réponse, je lui demandais de donner à une poupée le nombre de jetons indiqué par l'équation. («J'aimerais que tu donnes à la poupée ce qui est écrit (4 + 2 = <u>6</u>.») Deux tiers du groupe en ont donné 6, mais les autres en ont donné 12! On voit ainsi que ces derniers ont lu dans l'équation trois quantités juxtaposées, et non pas hiérarchisées.

Il n'est pas surprenant donc que tant d'enfants écrivent «10» pour répondre à la question «4 + ... = 6», et que «.......... + 2 = 6» soit encore plus difficile.

La numération de position

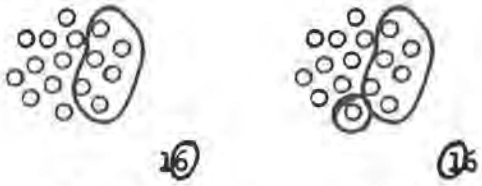
On arrive assez facilement à faire remplir aux enfants des fiches contenant des questions telles que les suivantes:

.... dizaines et .... unités
Total: ....

Dessine 24 croix

Après la maîtrise de ce type d'exercices, j'ai fait l'expérience suivante: En présentant 16 jetons à l'enfant, j'en ai demandé un dessin. J'ai ensuite prié l'enfant d'écrire «seize» avec des chiffres. Ensuite, j'ai demandé à l'enfant de montrer dans son dessin ce que «cette partie (le '6' dans '16')» voulait dire. Presque tous les enfants ont entouré 6 jetons comme le montre la figure 3(a). Lorsque j'ai passé à l'autre «partie (ce que le '1' dans '16' voulait dire)», tous les enfants ont encerclé un seul jeton (voir la figure 3(b). Le tableau 3 montre les pourcentages de réussite dans les degrés 1, 4, 6 et 8. Ces résultats confirment ceux obtenus par Mieko Kamii (1980, 1982).

Figure 3



(a) (b)

La numération de position requiert les deux capacités suivantes: (a) la possibilité de considérer que 10 devient une dizaine et donc une unité et (b) la multiplication. Pour savoir que le «2» dans «24» signifie «20», par exemple, l'enfant doit savoir que le «2» signifie 2×10. Comme la multiplication ne devient possible qu'en troisième primaire, il n'est pas étonnant que la numération de position soit impossible à comprendre en première. Une fois de plus, on voit que la représentation écrite n'a du sens qu'après la construction (par abstraction réfléchissante) de l'idée à représenter.

Tableau 3

Pourcentage des enfants qui ont dit que le «1» dans «16» signifie «10»

En 1re primaire	0 %
4e	51
6e	60
8e	78

J'ai essayé dans cet article d'expliquer brièvement pourquoi la représentation écrite n'est pas un objectif valable en première primaire. Le lecteur qui désire une explication plus complète aura bientôt la possibilité de la trouver dans un livre intitulé *First Graders Invent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory* (C. Kamii, en préparation).

Références

INHELDER, B. et PIAGET, J. *La genèse des structures logiques élémentaires.* Neuchâtel: Delachaux, 1959.

KAMII, C. *First graders invent arithmetic: Implications of Piaget's theory.* En préparation.

KAMII, C. and DEVRIES, R. *Group games in early education: Implications of Piaget's theory.* Washington, D.C.: National Association for the Education of Young Children, 1980.

KAMII, M. Place value: *Children's efforts to find a correspondence between digits and number of objects.* Paper presented at the Tenth Annual Symposium of the Jean Piaget Society, Philadelphia, 1980.

KAMII, M. *Children's graphic representations of numerical concepts: A developmental study.* Thèse de doctorat soutenue à Harvard University, 1982.

SCHUBAUER-LEONI, M. L. et PERRET-CLERMONT, A.-N. Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 1980, *1,* 297-350.

* Originalement une conférence donnée aux Journées sur «Des Nouvelles Perspectives de la Représentation Ecrite chez l'Enfant», organisées par l'Institut des Sciences de l'Education de l'Université de Barcelone et l'Institut Municipal de l'Education de Barcelone, 27-9 mai 1982.

A propos de...
... triangles

Une voix venue du Canada...

Le texte qui suit a paru, sous la signature de Jean Grignon, dans «Instantanés mathématiques», la revue de l'association canadienne des promoteurs de l'avancement de la mathématique à l'élémentaire, en décembre 1978.

Il peut donner une piste intéressante en géométrie.

J'ai fait une découverte. Me croirez-vous?

J'en suis tout surpris.

Sur les triangles, je croyais que tout avait été observé. Eh bien non, j'ai découvert un petit fait, qui ouvre une voie large, toute lumineuse pour l'étude du triangle.

C'est fantastique: j'ai fait une découverte.

Ah, me direz-vous, cette découverte, qui n'est probablement qu'une observation, était certainement connue il y a déjà quelques décennies ou quelques siècles. Peut-être même que du temps d'Euclide... ou avant...

Eh bien, probablement, et puis après... Cette trouvaille, je l'ai faite à ma manière à partir d'éléments observables et connus de tous. Ainsi en est-il de l'écrivain qui ne fait qu'utiliser des lettres connues de tous, des mots cent fois écrits, des expressions qui ne sont souvent que des clichés et, pourtant, il a l'impression de créer et il crée et vous fait participer à des sentiments profonds. De même, le musicien, sans refaire l'instrument, sur un nombre très limité de touches, vous parle à sa façon, vous transporte... Et le peintre, grâce à quelques tubes de couleurs, vous rejoint et parfois vous éblouit... Et le concepteur en mécanique bâtit souvent un nouvel appareil à partir de pièces connues qu'il redessine et réorganise pour rencontrer quelque nouvelle exigence. Pourquoi, dans ce contexte, ne serai-je pas un artiste.

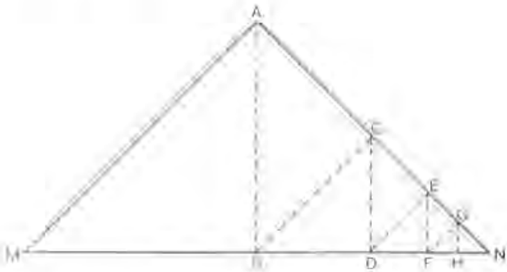
J'allais oublier ma découverte.

Si dans un triangle on observe que deux côtés sont congrus et qu'un des angles est droit, cet angle a nécessairement comme côtés les deux côtés congrus. On l'appelle parfois triangle rectangle isocèle. Cette figure constitue mon matériel de base.

Si, du sommet de l'angle droit, j'abaisse une droite sur le milieu du côté opposé, j'obtiens alors deux triangles qui ont les propriétés de la figure originale. Et je peux répéter l'opération une deuxième fois, une troisième fois..., une centième fois, ... Les propriétés sont conservées: tous les triangles de la suite sont rectangles et isocèle.

Je peux aussi dire: «Si un triangle est plié en deux, selon la ligne décrite précédemment, que les deux parties se recouvrent parfaitement et que chacune des parties a conservé les propriétés de la figure originale, alors ce triangle est rectangle et isocèle.

Je pourrais en faire une définition.



Les triangles de la suite sont: MNA, NAB, BNC, NCD, DNE, NEF, FNG, NGH, ...

Où va-t-on avec ce petit rien?

Eh bien, si le rôle de l'école, tout simplement, comme cela, par hasard, était de faciliter l'éclosion des talents de chacun, de promouvoir l'idée de créativité... Certains me diront qu'il faut d'abord apprendre des mathématiques, avant de s'exprimer avec des mathématiques. D'ailleurs on me l'a déjà dit. Mais ceux-là n'avaient rien compris et ne savaient pas s'exprimer mathématiquement même avec leurs grandes connaissances en ce domaine. Ils n'avaient rien créé... L'émerveillement, qui est essentiel à la création, n'arrive pas avec un diplôme à ce que je sache. Pas plus que la confiance en soi et la curiosité... Si cette école de l'émerveillement n'a pas été notre lot, que pouvons-nous faire pour que les élèves présentement dans le système aient une chance? Il n'y a pas de recette magique et chaque conseiller ou enseignant ne peut devenir créateur d'une manière instantanée. Il peut cependant beaucoup pour ses élèves.

Il lui faudrait gagner un peu de confiance en soi et, s'il peut créer, il devrait pouvoir être un technicien averti.

- En lançant ses élèves sur de nouvelles pistes même s'il n'a pas eu la chance de les explorer et même s'il n'en connaît pas tous les détours;
- en permettant à ses élèves de prendre contact avec du matériel même si lui-même n'a que rarement abordé la mathématique par le biais du concret;
- en brisant la paralysie du nouvel unique qui, à la longue, offre un menu stéréotypé et peu formateur;
- en constituant un environnement où la mathématique sera en évidence;
- en acceptant que chaque élève découvre de petites choses, et peut-être de grandes, dès son entrée à l'école;
- en renouvelant de temps à autre sa didactique...

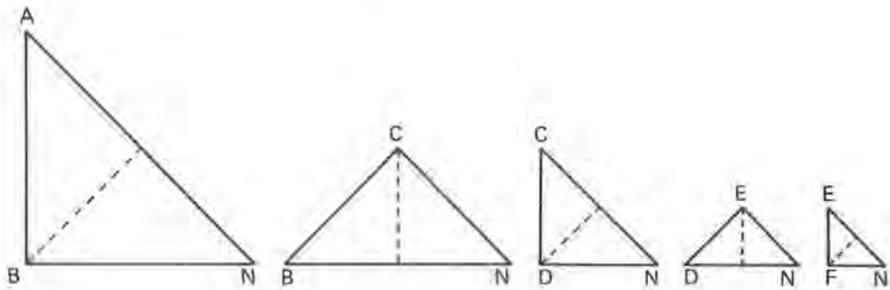
Je coupe court à cette liste. Je suis certain que vous pouvez ajouter un énoncé... Et si c'est exact, seriez-vous un peu artiste?

S'il en est ainsi, soyez fidèle à votre personnage.

L'étude du triangle peut se ramener à peu de choses à moins qu'on ne veuille y apporter une certaine attention. Dans cette démarche, j'ai trouvé un genre d'activité qui me semble prometteur, en ce sens qu'on peut l'appliquer à différentes figures. Il s'agit de créer des suites de figures et d'observer comment, dans ces suites, les propiétés varient ou non. Ces suites de figures sont obtenues à partir d'un travail assez simple, qui pourra consister, par exemple, à séparer une figure en deux parties congrues soit par découpage, soit par pliage, soit simplement en traçant une ligne et en portant notre attention sur des sections obtenues. On pourra imaginer d'autres façons d'obtenir de telles suites. Ces activités peuvent être réalisées aussitôt que les enfants ont une bonne connaissance, même si elle n'est qu'instinctive, des propriétés des figures concernées.

Nous allons nous donner une suite et formuler quelques questions. Dans toutes les suites qui seront suggérées, les figures conserveront l'orientation qu'elles auront au moment d'être générées. Comme première suite, nous utiliserons celle indiquée dans l'éditorial.

Fiche 1. Voici une suite de triangles:



a) Ajoute deux triangles à la suite en suivant la règle de construction.

b) Ajoute un autre triangle qui précèdera la suite donnée.

c) Quelles sont les propriétés de chaque figure quant à la congruence des côtés et des angles? (Le premier est rectangle et isocèle).

d) Si le triangle ABN a comme aire 32 unités carrées, quelle sera la suite des nombres exprimant l'aire? Indique aussi l'aire des figures que tu as ajoutées.

e) Si le périmètre de la première figure est $16 + 8\sqrt{2}$, la suite des nombres exprimant les périmètres devient
$16 + 8\sqrt{2}$, $8 + 8\sqrt{2}$, $8 + 4\sqrt{2}$,
$4 + 4\sqrt{2}$, $4 + 2\sqrt{2}$.

Saurais-tu compléter à l'aide des périmètres des figures que tu as ajoutées?

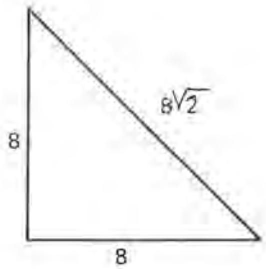
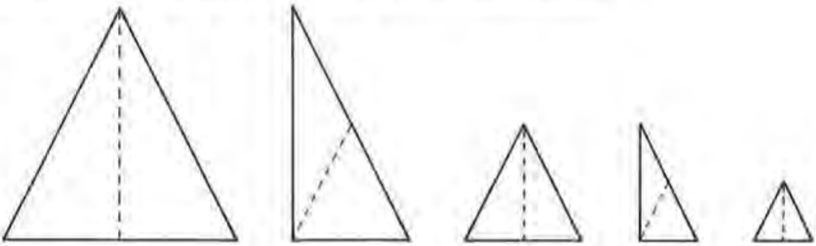


figure 2

f) Si $\sqrt{2} = 1{,}41$ au centimètre près, exprime les périmètres en décimales (si tu as une minicalculatrice, cherche la valeur de $\sqrt{2}$).

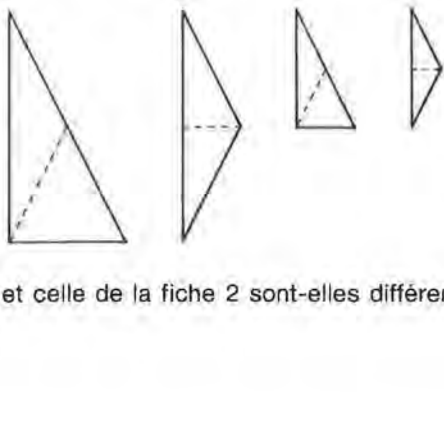
(Pourquoi ne pas oser?...)

Fiche 2. Amorçons notre suite avec un triangle isocèle.



Reprends les questions a, b, c et d de la fiche 1.

Fiche 3. Amorçons notre suite avec un triangle rectangle.



La suite fournie ici et celle de la fiche 2 sont-elles différentes? Explique.

Fiche 4. Si on coupe le triangle initial en joignant les milieux de deux côtés, on peut obtenir cette suite:

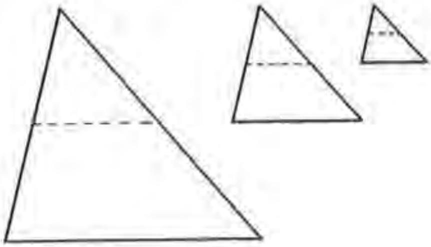


Figure 5

a) Ajoute deux figures, une au début et une à la fin de la suite.

b) Si tu mesures avec exactitude, tu verras que le périmètre diminue de moitié de triangle en triangle.

Qu'advient-il de l'aire?

Fiche 5. Pour faire changement, partons d'un carré et faisons successivement des coupes verticale et horizontale.

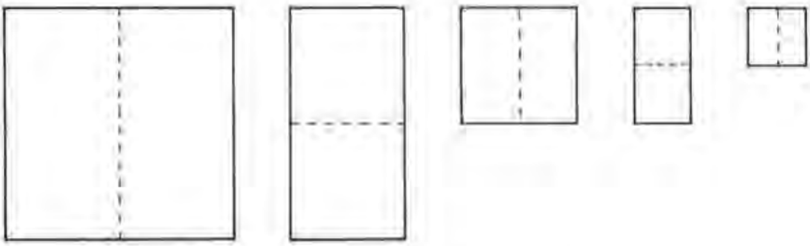


Figure 6

1. Reprends les questions a, b, c et d de la fiche 1, en changeant le mot «triangle» par «carré» ou «rectangle» selon le cas.
2. Calcule la suite des nombres exprimant les périmètres. Saurais-tu prolonger cette suite?

Fiche 6. Construis d'autres suites en partant de triangles et de quadrilatères.

Fais tes observations.

Bonne chance!

J. A. 1211 GENEVE 6

Monsieur François JAQUET
Recorne 21
2300 LA CHAUX-DE-FONDS

TABLE DES MATIÈRES

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:
Mlle F. Waridel, MM. Th. Bernet, F. Brunelli, A. Calame, R. Dénervaud, R. Délez, Ch. Félix, M. Ferrario, F. Jaquet, F. Oberson.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 14.—, Etranger F 16.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie Florina & Burgener, 1950 Sion