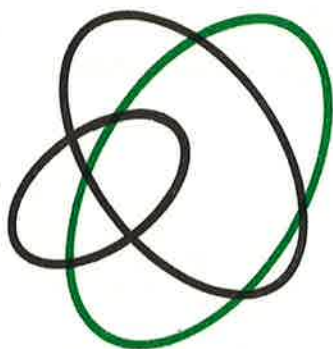




MATH ECOLE

MARS
1971
10^e ANNÉE

47

La voie d'Outre-Sarine

Ce numéro 47 est entièrement composé par deux de nos amis, Rémy Droz¹ et Walter Senft. Tous deux ont, je crois, amorcé leur collaboration au cours de Genève, en été 1968 (voir l'article de Greta Berger, *Math-Ecole* 35, novembre 1968, p. 11). Cette collaboration est riche d'enseignements. Elle nous montre la conjonction possible de la pensée suisse alémanique ou même allemande et de la pensée caractéristique de l'école de Genève (Piaget). Le travail communautaire de Rémy Droz et de Walter Senft a ceci de particulier et de réjouissant qu'il tente, avec de premiers succès encourageants, de faire passer dans le réel scolaire la science mathématique nouvelle et l'apport de la psychologie génétique. Cela s'accomplit en Suisse alémanique. Il importait que la Suisse romande en soit informée et enrichie. Ce numéro y pourvoit.

Walter Senft, docteur en mathématique (université de Zurich), et Rémy Droz, docteur en psychologie (université de Genève), collaborent depuis quelques années (avec l'aide de maîtres suisses alémaniques) en vue de mettre au point, d'une part des formes susceptibles de stimuler la pensée cognitive de l'enfant dans le cadre scolaire et, d'autre part, de définir les cadres où cette activité puisse s'insérer utilement, sans donner lieu à de grandes réformes ou à des révolutions de l'enseignement des mathématiques, mais, bien davantage, à une croissance organique au sein de l'école elle-même. D'où leur collaboration aux cours de la Société suisse de travail manuel et de réforme scolaire.

Walter Senft est professeur de mathématiques au gymnase cantonal de Zurich; il enseigne aussi, comme professeur invité, à la Pädagogische Hochschule de Ludwigsburg (RFA). Il est l'auteur, avec Irma Glaes, de l'ouvrage «*Mathematische Früherziehung, erster Rechenunterricht*», paru chez Franz Schubiger, Winterthur².

Rémy Droz est professeur de psychologie à l'Université de Lausanne et collabore aux travaux de l'équipe de recherche «*Science et Pédagogie*» dirigée par MM. L. Pauli et J.-B. Grize. Il essaie là, de trouver le moyen de transposer dans la pratique scolaire les données et les théories de la psychologie «pures».

¹ Voir *Math-Ecole* 38, mai 1969, *Le point de vue du psychologue*, p. 10.

² Voir *Math-Ecole* 32, mars 1968, p. 9.

Genèse des notions spatiales et enseignement élémentaire de la géométrie

par Rémy Droz et Walter Senft

1. Préliminaires

La géométrie, comprise comme mode d'analyse ou d'appréhension de l'espace répond sans doute à des intérêts fondamentaux de l'homme. C'est donc l'une des missions de l'école d'accorder à tous ses niveaux une attention convenable aux problèmes que pose la géométrie. Comme toute analyse intellectuelle, il s'agit ici de projeter un réseau de concepts sur le réel empirique pour le saisir et le comprendre. Les concepts dont nous nous servons en géométrie ont leurs racines dans une expérience élémentaire de l'espace, dans une pratique primitive de la géométrie. Celle-ci se développe de façon naturelle à partir de toutes sortes de situations. Nous croyons, cependant, que c'est l'une des tâches de l'enseignement élémentaire que de susciter, de façon explicite, des situations appropriées au sein desquelles l'enfant ait la possibilité de construire les notions élémentaires dont il a besoin.

Ici, dans notre contexte, nous entendrons la géométrie comme une analyse élémentaire de l'espace environnant. Les éléments qualitatifs les plus simples qui structurent l'espace doivent devenir conscients. Un tel mode d'attaque en vue d'une propédeutique de la géométrie correspond d'ailleurs aux résultats de la recherche psychologique. Citons: «en résumé, dit Piaget, on a constaté que tous les concepts fondamentaux de la compréhension de l'espace ont un caractère qualitatif»^{1 *}.

Cette façon de voir pourrait paraître en contradiction avec certaines conceptions purement mathématiques de la géométrie: «... je considère l'intuition spatiale comme une chose essentiellement imprécise, qu'on parle d'intuition abstraite, comme nous la connaissons bien par nos habitudes, ou d'intuitions concrètes qui jouent un rôle dans l'observation empirique. Pour moi l'axiome est l'exigence par laquelle j'introduis des énoncés précis dans l'intuition imprécise...»² «... les résultats de n'importe quelle observation ne sont toujours vrais qu'à l'intérieur de certaines limites de précision et sous des conditions particulières; en posant des axiomes, nous substituons à ces résultats des énoncés de précision et de généralité absolues...»³. «Les axiomes transforment (donc) les résultats imprécis de l'expérience en énoncés précis sur l'expérience que nous poserons comme condition de l'expérience (elle-même)»⁴. Notre façon de voir est même, et très certainement, en contradiction avec la position de Hilbert⁵, où l'on choisit des axiomes qui ne reproduisent nullement les faits «simples» de l'expérience. «Qu'on veuille encore appeler «géométrie» le système scientifique qui se forme n'est sans doute qu'une question de goût; personne ne peut, cependant, refuser la construction de tels systèmes. En tout cas ni le mathématicien ni le non-mathématicien n'ont plus le droit d'affirmer que la géométrie euclidienne soit nécessaire à la pensée. Le fait que beaucoup de mathématiciens et de non-

* Voir les notes et références à la fin de l'article.

mathématiciens, et surtout de philosophes, pensent encore que la géométrie euclidienne soit nécessaire du point de vue de l'intuition, trouve son explication dans l'accoutumance de l'homme, infiniment petit, aux conditions de mesures terrestres qui ne permettent qu'une très petite mesure de la courbure.»⁶

Il n'y a pas de doute que les conceptions de Klein et de Hilbert ne soient importantes et pertinentes dans les discussions qui portent sur les mathématiques scientifiques. Parlant d'une pédagogie élémentaire de la géométrie, nous devons cependant, et probablement, prendre comme point de départ le fait que notre vécu et notre compréhension sont toujours liés de façon naturelle à la sphère spatiale de notre existence. Notre «être-dans-le monde» est toujours et simultanément un «être-dans-l'espace» qui requiert dès le début, et continuellement, une analyse des structures spatiales complexes qui nous entourent. Dès que nous analysons consciemment ces structures, nous faisons de la géométrie.

La question «quand faut-il commencer l'enseignement de la géométrie?» est donc mal posée par rapport à notre compréhension de la géométrie. Il faudrait demander «quand voulons-nous faire l'effort d'assister l'enfant dans ses efforts spontanés de compréhension géométrique?» et surtout il faudrait s'interroger sur les moyens dont nous disposons pour donner à cette assistance la forme conceptuelle la plus valable.

Tout enfant se retrouve continuellement dans des situations où il est dans l'obligation de tenir compte de conditions spatiales, topographiques (donc géométriques) et cela — dans la plupart des cas que lui offre son existence quotidienne — sans être en mesure de faire appel à des connaissances scolaires.

La raison de cela réside dans le fait que l'enseignement de la géométrie, au sens précis du terme, ne débute que relativement tard dans la plupart de nos régions. De plus, cet enseignement n'est pas centré, en priorité, sur la compréhension et la construction de l'espace qui nous entoure (ce qui pourrait se faire par des activités simples et concrètes appropriées), mais porte essentiellement sur la transmission d'un système conceptuel (avec les techniques qui y sont rattachés comme les «constructions géométriques»). Nous ne mettons pas en doute l'adéquation, partielle, d'un tel système conceptuel à une partie de l'espace qui nous entoure; nous sommes cependant persuadés que la compréhension de l'enfant est exagérément sollicitée à bien des égards (axiomes en tant que conventions de départ; démonstrations géométriques qui ne peuvent être comprises — et encore — qu'au niveau de la pensée abstraite ou formelle et ne sont certainement pas enracinés dans l'expérience quotidienne de l'enfant ni comprises par lui). Ce qui est vrai pour les notions qui nous permettent de saisir les aspects quantitatifs de notre monde (nombre, opérations) est tout aussi vrai pour les notions liées à l'espace: elles doivent être enracinées dans une expérience de départ concrète et fondamentale. Dans une propédeutique de la géométrie, il ne s'agit pas d'apporter aussi vite que possible à l'enfant des systèmes conceptuels achevés, tels que la théorie de l'espace selon Euclide. L'espace n'est pas l'objet d'un enseignement ou d'une

théorie, il est la **base d'expériences** de toutes sortes. Il n'existe pas «en soi» ou «pour soi», mais se manifeste au travers de la position relative de lieux empiriques. C'est ainsi que l'espace est vécu dans le détail. Nous recherchons, par la géométrie, les invariances de nos expériences sur l'espace. Nous tentons de saisir la géométrie par nos moyens intellectuels, par des actions centrées sur un but précis, par un langage clair, par des notations (graphismes, écritures) de genres différents. Ces conduites constitueront alors une expérience géométrique sur laquelle pourra se fonder ultérieurement l'analyse théorique de l'espace.

2. Le développement des notions spatiales élémentaires chez l'enfant

Les travaux de Jean Piaget et de ses collaborateurs rendent compte à bien, des égards du développement spontané (ou, tout au moins, du développement qui n'est pas explicitement guidé par les acquis scolaires) de nombreuses notions concernant la représentation et la compréhension de l'espace ⁷. Piaget distingue «trois plans différents de constructions spatiales: le plan sensori-moteur ou de l'action proprement dite, celui de la perception ou de l'organisation des données sensorielles, et celui de la représentation intuitive ou opératoire qui, seul, intéresse directement la formation des connaissances mathématiques...» ⁸. L'assertion de Piaget selon laquelle ce ne seraient que les représentations opératoires, ou du moins intuitives, qui seraient importantes pour la formation des connaissances mathématiques est peut-être vraie pour une mathématique qui n'existerait que comme construction conceptuelle formelle, tout achevée (ce qui est concevable); cette affirmation est pourtant excessive, sans doute, lorsque nous songeons à une mathématique de l'action et que nous nous concentrons sur l'analyse et la compréhension cognitive (ou intellectuelle) du monde qui nous entoure, et qui entoure l'enfant. En effet, les recherches de Piaget montrent bien que les enfants d'un an et demi ou de deux ans se sont déjà construit un espace existentiel dont ils disposent librement et qui leur permet des mouvements, des déplacements, etc., dans un espace coordonné et plus ou moins continu ⁹. Nous constatons également que l'enfant est assez vite capable de définir des lieux avec quelque précision ou de localiser des objets dans un système de relations spatiales simples (haut-bas, devant-dérrière, en avant-en arrière, etc.). Finalement «on constate la présence d'un certain nombre d'intuitions topologiques fondamentales. Sitôt capable de dessiner (entre trois et quatre ans), le sujet copiera des carrés, des cercles, des rectangles, des triangles, etc., sous la forme de figures quelconques fermées (sans droites ni angles), tandis qu'il représentera des croix, des anneaux interrompus, etc., par des figures ouvertes. Un petit cercle placé à l'intérieur d'une ellipse, à l'extérieur de celle-ci ou sur sa frontière, sera dessiné selon ces trois positions exactes...» ¹⁰. Les enfants sont même capables de reproduire des ordres spatiaux simples (la suite des perles de couleurs différentes sur une ficelle) sans pourtant disposer encore de la notion d'ordre; ce qui rend d'ailleurs impossible, pour l'instant, la reconstruction de cette suite de perles en ordre inverse ¹¹. Nous constatons dès lors que les enfants qui se trouvent encore au niveau de la pensée pré-opératoire ou

intuitive sont déjà parfaitement capables de dominer de nombreuses notions concernant l'espace et de les appliquer de façon efficace, en coordonnant (ou même en subordonnant) leurs intentions et les buts qu'ils visent avec les propriétés de l'espace.

Avec les débuts des opérations concrètes, les possibilités de l'enfant s'élargissent de façon remarquable. Ces opérations sont caractérisées par l'apparition d'une série de conduites (à partir de six ou sept ans) qui permettent à l'enfant d'organiser son univers concret et réel selon toutes sortes de points de vue (constructions d'ensembles ou de classes, sériations des éléments d'un ensemble, etc.) et de comprendre puis d'expliquer certaines propriétés des objets de cet univers (invariance des quantités physiques ou de certaines propriétés géométriques lorsqu'on déforme un objet, etc.). Nous constatons, en particulier (en ce qui concerne la géométrie), que l'enfant commence à développer des conduites de mesure assez primitives il est vrai (il s'agit de simples comparaisons qualitatives), qui lui sont propres et qu'il commence à comprendre alors la position des objets dans l'espace comme des états essentiellement relatifs. Ce qui veut dire que l'enfant comprend que la position d'un objet dépend, entre autres, de la position de l'observateur ou d'objets voisins (pensons aux concepts de droite-gauche ou devant-dérrière lorsqu'un interlocuteur se trouve en face de l'enfant) ¹². L'enfant commence également à pouvoir se représenter la translation d'objets sur une surface, et il devient même capable de noter graphiquement un tel déplacement continu comme suite d'états successifs ¹³. Finalement l'enfant acquiert la capacité d'assimiler, en tant qu'objets de sa connaissance et de sa conscience, les propriétés des objets et de classes d'objets, saisis comme les effets de sa propre action sur ces objets ou ces ensembles d'objets. Par ailleurs, l'enfant devient de mieux en mieux capable d'adapter son activité aux propriétés réelles et aux contraintes matérielles des objets ¹⁴.

Cet état de fait, assez encourageant en apparence, ne devrait cependant pas nous induire à croire que l'enfant sera rapidement en possession des outils nécessaires à la compréhension d'un enseignement formel de la géométrie. Nous savons, en effet, que l'enfant construit ses connaissances par des actions concrètes et réelles, avec et sur les objets, et qu'il faudra encore un long développement jusqu'à ce qu'il devienne capable de **parler** de ces objets ou des abstractions qui se fondent sur ceux-ci ou sur son action et, à plus forte raison, de manipuler ces abstractions sur le plan formel ou abstrait. Même les notions qui semblent s'appuyer sur des expériences ou connaissances concrètes et élémentaires demandent, pour s'établir, un développement qui s'étend sur des années. Ainsi les conduites de mesure apparaissent-elles déjà à l'âge de cinq-six ans, mais il faudra attendre l'âge de neuf-dix ans jusqu'à ce qu'on puisse dire que les conduites de mesure de l'enfant correspondent à peu près aux conduites de mesure de l'adulte (et encore cela n'est-il vrai que pour des situations relativement simples et quotidiennes).

L'objet d'un enseignement propédeutique de la géométrie semble donc devenir assez clair. Il s'agit de seconder, de soutenir et de stimuler le développement intellectuel de l'enfant en lui présentant des situations de découvertes

ou d'apprentissage (au sens actif du terme, et non au sens d'«enseignement passif»). Il ne s'agit en tout cas pas de présenter à l'enfant les domaines ou certains domaines de la géométrie comme autant de programmes thématiques et fixés par une terminologie et un mode de pensée scientifiques. Il ne s'agit en aucune manière de «traiter» une branche scolaire.

3. Pour une pédagogie propédeutique de l'espace et de la géométrie

a) Bases historiques et scientifiques

L'idée d'introduire dans l'école une géométrie qui ne soit pas conçue a priori comme une théorie finie de l'espace, mais qui croisse à travers un dialogue actif entretenu avec l'espace d'une part et l'expérience de l'espace d'autre part, fait déboucher l'enseignement de la géométrie actuel, souvent un peu rigide, sur la ~~conception~~ ^{conception} contemporaine de l'espace qu'a élaborée la science. En effet, nous ne pensons plus aujourd'hui que l'espace est donné comme un tout absolu, isotrope * et continu; nous considérons bien plus les structures spatiales possibles et des ensembles de relations spatiales relatives. Rappelons, à cet égard, les conceptions suivantes concernant la nature de l'espace et leur développement historique:

1. L'espace est considéré comme centré, hiérarchiquement échelonné, et fini. Il présente des qualités locales particulières (espace sacré, profane). C'est l'idée des philosophes de l'Antiquité et du moyen âge.
2. L'espace est un tout absolu, isotrope, infini et continu. C'est la conception de la physique classique, de Newton et de Kant ¹⁵.
3. L'espace n'existe que comme une totalité de lieux empiriques entre lesquels existent des liaisons relatives: point de vue de Leibniz, des théories de la relativité et des quantas ¹⁶.

Rappelons également le commentaire d'Albert Einstein à propos de ce développement historique: «En ce qui concerne le concept d'espace, il semble qu'il ait été précédé par la notion de «lieu» qui est psychologiquement plus simple. Le lieu est en première approche une (petite) partie de la surface terrestre que l'on désigne par un nom. L'objet dont on désigne le «lieu» est un objet physique. Le «lieu» se révèle, à l'analyse simple également, comme un groupe d'objets physiques... (on arrive ainsi à l'idée) que l'«espace» (c'est-à-dire le «lieu») est une sorte d'ordre des objets physiques et rien d'autre qu'une sorte d'ordre des objets physiques... Pourtant on peut penser autrement. Dans une boîte spécifique, nous pouvons mettre tant de grains de riz ou tant de cerises, etc. Nous avons donc ici une propriété de l'objet physique «boîte» qui est aussi réelle que la boîte elle-même... De cette façon, et en élargissant l'idée de l'«espace-boîte», nous arrivons à l'idée d'un espace autonome dont l'étendue est infinie et dans lequel se trouvent tous les objets physiques... On peut opposer ces deux conceptions de l'espace de la manière suivante:

- a) les qualités de position des objets physiques;
- b) l'espace comme le «contenant» (container) de tous les objets physiques . . .

* Se dit des corps dont les propriétés physiques sont identiques dans toutes les directions; homogènes.

Les deux conceptions de l'espace sont des créations libres de l'imagination humaine, elles sont des moyens pour mieux comprendre nos expériences sensorielles... Il a fallu une lourde lutte pour arriver à l'idée d'un espace indépendant et absolu indispensable au développement théorique. Et il a fallu des efforts tout aussi importants pour dépasser ce processus par la suite...¹⁷

Comme «science des propriétés spatiales», la géométrie doit donc transmettre à l'enfant un système conceptuel qui lui permet de prendre conscience de sa propre existence dans l'espace. Nous devons cependant nous demander quelles sont les conditions préliminaires d'un tel enseignement et, en conséquence, nous devons nous demander, si ces conditions préliminaires «croissent avec la même certitude et en suivant une contrainte semblable à celle de la plante qui croît d'après un plan de construction pré-établi, de façon à être disponibles à tel âge donné? Ou, si l'enfant a besoin d'un long processus de développement, quand aura-t-il besoin d'incitations et d'assistance?»¹⁸

b) Bases psychologiques

Les travaux de Piaget et de ses collaborateurs montrent clairement que ces «conditions préliminaires» sont construites par l'enfant et par sa propre activité selon un processus de développement qui s'étend sur plusieurs années. Nous croyons que le but d'une pédagogie propédeutique de la géométrie est de mettre à la disposition de l'enfant des situations d'action et de découverte qui assurent, d'une manière tant soit peu certaine et systématique la construction et par conséquent le développement, de ces connaissances préliminaires. Il est d'ailleurs probable qu'une telle propédeutique fonderait l'enseignement de la géométrie proprement dite de telle sorte qu'il ne soit plus un simple jeu (dans le meilleur des cas) ou une matière à bachotage aveugle, mais qui ferait de lui une analyse, une discussion du réel, au niveau de la pensée formelle et intellectuelle.

C'est dans ce sens que nous allons tenter de délimiter de la manière suivante les domaines de l'activité propédeutique:

1. Désigner des objets, les reconnaître, leur donner un nom (activité sémiotiques).
2. Comparer des objets, les ordonner (analyse de relations, établissement d'ordres).
3. Réunir des objets qui vont ensemble (construction de classes ou d'ensembles).
4. Combiner et transformer des objets (activités opératoires).
5. Procéder à des activités de quantification et, en particulier, construire la mesure¹⁹.

1. En premier lieu, il s'agira de découvrir dans ce contexte que les objets de notre perception, de notre représentation ou de notre pensée, peuvent être munis d'une sorte d'«étiquette» ou d'un «nom» qui permet de les signifier comme disent certains ou de les désigner, comme on pourrait le dire plus simplement.

Une première difficulté apparaît presque immédiatement lorsque nous découvrons qu'un seul et unique nom peut désigner plusieurs objets et que, par ailleurs, un objet bien précis peut avoir plusieurs noms à la fois. Ainsi le nom «animal» désigne des objets aussi divers que «chat», «éléphant», «jouet-ayant-la-forme-d'un-ourson», etc. et inversement un objet spécifique, unique et clairement défini tel que «mon-chat» peut s'appeler selon les circonstances ou selon les interlocuteurs «chat», «animal», «sale-bête» ou encore «Ramgram» (comme nom propre).

La désignation d'objets géométriques simples présente exactement les mêmes difficultés: une figure géométrique, disons un «triangle», s'appelle tour à tour «polygone», «forme-rectiligne», «courbe-fermée», etc., et par ailleurs le terme «polygone» peut désigner (en plus de notre «triangle») un «carré» une «figure-rectiligne-ayant-67-angles» etc. Pour parler plus formellement, il s'agit d'insérer un objet dans un système de classes hiérarchisées en ayant clairement précisé auparavant de quel système de classes on parle: un «triangle» ne peut pas simplement appartenir à la classe des «figures-géométriques», mais aussi à des systèmes classificatoires du genre «toits-de-maisons» ou «tentes-pour-y-faire-du-camping».

Une deuxième difficulté apparaît lorsque nous tentons de définir le contenu (ou la signification) d'une propriété que nous voulons attribuer à un objet lorsque nous l'analysons ou le manipulons: l'objet est «rouge», il est «lourd», il est «grand» et «rond». Nous (les adultes) découvrons bien vite, et les enfants le découvrent un peu moins vite, que ces propriétés ne semblent pas vraiment absolues, mais qu'elles sont relatives. Lorsque nous voulons dire qu'un objet est «rond», nous devons nous demander quelle est sa «rondeur» et si la propriété «rond» correspond bien à une sorte de représentation intérieure que nous avons ou si nous attribuons à notre objet cette propriété parce que sur le moment nous ne trouvons rien de plus approprié («un œuf est rond», cette dame est un peu «ronde»). La chose se complique d'ailleurs sérieusement lorsque nous demandons ce qui est «rond», ce qui est «plus-rond» ou «vraiment-tout-à-fait-rond». Nous glissons alors du simple exercice d'identification d'un nom ou d'une propriété d'un objet à l'établissement de relations entre objets et même à la construction d'un ordre sur un ensemble d'objets.

Nous croyons que les «lieux» dont parlait Einstein sont d'une importance capitale dans ce contexte. En effet, le lieu ou la position d'un objet peut être désigné en disant «il est en haut», «il est à droite» (sans nous demander pour l'instant du moins, «quelle droite» ou «la droite de qui?»), «il est au milieu». Ensuite nous pouvons être plus précis, l'objet est «au-dessus de l'échelle», «tout en haut sur l'échelle» ou encore, il est «à droite de la chaise et sous la table», etc.

Le fait que certaines de ces notions ne nous paraissent pas entièrement univoques et parfois même assez peu claires ne devrait pas nous conduire à imposer rapidement certaines conventions («à **ma** droite», «à **ta** droite», etc.) pour éviter des ambiguïtés ou des erreurs. Au contraire. Ce n'est pas la tâche de l'école de «normaliser» notre connaissance de façon univoque et selon

un modèle pré-établi. Nous croyons que l'école est justement le lieu où l'enfant peut découvrir et identifier l'ambiguïté (et même des situations encore plus confuses) dans des situations d'action appropriées à lui-même et au problème que nous voulons soumettre à sa réflexion. L'ambiguïté ne peut pas être éliminée de l'école, elle doit surgir là où elle se trouve naturellement (et nous savons que ces situations sont nombreuses...). On ne peut pas l'ignorer, en établissant, par exemple des «règles de jeu» restrictives; il faut qu'elle soit perçue, discutée, analysée et si nécessaire, surmontée. Nous croyons que ceci devrait amener l'enfant à la tolérance de l'ambiguïté d'une part et à la compréhension des conventions arbitraires d'autre part.

2. Nous avons déjà fait allusion au passage de l'identification de propriétés aux manipulation de relations et d'ordres. La majorité des notions qui concernent les qualités ou les propriétés ne sont ni univoques, ni absolues; elles dépendent, en général, de la comparaison explicite ou implicite d'un objet donné avec un autre objet qui présente avec lui la même qualité de façon plus ou moins prononcée. On peut cependant penser ²⁰ que l'identification d'une propriété ou d'une qualité est relativement simple, alors que les notions d'ordre demandent une certaine capacité d'objectivation et d'abstraction. Cette opinion est d'ailleurs confirmée par les travaux de Sinclair ²¹ qui indiquent clairement que le développement des notions de qualités quasi-absolues précèdent de loin le développement des notions d'ordre; on constate, en particulier, que l'enfant comprend bien certaines notions d'ordre et comment on les utilise dans le langage courant («plus grand que», «moins long que», etc.) à un âge assez précoce, mais qu'il ne les utilise lui-même qu'au moment où il a compris la notion d'ordre elle-même, ce qui est le cas avec le début des opérations concrètes (c'est-à-dire vers six-sept ans). Les notions de «à gauche de» ou «à droite de» semblent nécessiter un développement particulièrement long et doivent donc être traitées avec une subtilité particulière dans le contexte scolaire ²².

Insistons cependant sur le fait qu'il ne s'agit pas simplement de construire des aptitudes purement verbales chez l'enfant. Les notions que nous mentionnons se développent et sont construites par lui au travers d'une grande multitude d'activités concrètes et pratiques où des objets de toutes sortes sont manipulés, modifiés et travaillés. Il nous paraît inacceptable que des aptitudes simplement verbales soient enseignées à l'aide de «modèles de démonstration» et que des notions liées à la géométrie soient enseignées au tableau noir; du moins au niveau d'une pédagogie propédeutique des concepts géométriques et spatiaux. Il s'agit, en premier lieu, de donner à l'enfant assez de matériels et d'espace pour qu'il puisse jouer et ainsi accumuler des expériences. Ce n'est qu'en deuxième lieu qu'il s'agira de saisir les connaissances découvertes au moyen de schémas notionnels ou conceptuels plus ou moins conventionnels et arbitraires. Et ce n'est que beaucoup plus tard, lorsque l'enfant aura atteint le niveau d'une pensée plus ou moins formelle, qu'il s'agira de parler «sur» ces schémas conventionnels, abstraits de l'action et du matériel concret.

3. Nous savons depuis les travaux de Piaget ²³, et depuis que nous avons vu apparaître des «jeux logiques» dans les classes, que les enfants sont capa-

bles assez tôt de former des ensembles (au sens quelque peu mathématique du terme) et d'effectuer des opérations simples sur ces ensembles. Indirectement, ces jeux nous montrent avec quelle facilité les enfants reconnaissent et différencient diverses formes géométriques. Le jeu avec les ensembles permet de comprendre assez facilement les systèmes de classifications. Lorsque nous considérons sur une surface, des figures géométriques, nous pouvons distinguer les courbes ouvertes et les courbes fermées; les ensembles que nous pouvons en former sont complémentaires (dans les limites de certaines conventions). En partant de l'univers des «Blocs logiques» nous pouvons différencier des objets rectilignes et les objets curvilignes, les objets qui ont trois côtés et les objets qui ont quatre côtés, les carrés et les rectangles. En bref, notre capacité de former des classes ou des ensembles nous donne la possibilité d'organiser et d'articuler notre univers cognitif. Nous pouvons former des classes d'équivalence (les triangles), des ensembles complémentaires, des systèmes de classification hiérarchiques (les quadrilatères, les quadrilatères avec 2 côtés parallèles; les quadrilatères avec 2×2 côtés parallèles; les quadrilatères avec 2×2 côtés parallèles et 4 angles égaux; etc.), où nous serons rapidement amenés à devoir analyser des systèmes hiérarchiques qui s'interpénètrent (les carrés étant, par exemple, à la fois des rectangles dont les 4 côtés sont égaux ou des losanges dont les 4 angles le sont aussi).

On peut discuter pour savoir si le «triangle» des blocs logiques est vraiment un triangle ou s'il n'est pas bien davantage un prisme; on peut également se demander si le cercle ne serait pas en fait un cylindre. Nous croyons que c'est là un faux problème tant que les enfants ne le soulèvent pas eux-mêmes. Une fois de plus, il ne s'agit pas de transmettre à l'enfant nos systèmes conceptuels établis ni même de le forcer de les accepter. Il s'agit de lui donner les moyens de faire ses propres découvertes et expériences et de les articuler par rapport à ses propres idées. L'expérience de l'enfant et la nécessité d'échanger des informations avec d'autres êtres humains (avec ses camarades et son maître, au moins) produiront en temps voulu une adaptation des systèmes personnels aux normes conventionnelles.

Rappelons à ce propos que Piaget a clairement montré (après les travaux des psychologues de la «Forme») que la mémoire n'est pas une simple mise en conserve du vécu, mais qu'elle relie constamment les expériences nouvelles aux expériences anciennes, qu'elle modifie des expériences anciennes par de nouveaux modes d'action ou de pensée, etc.²⁴. Nous voyons ainsi que ce n'est pas seulement la connaissance ou l'intelligence qui se développent avec l'âge, mais que la mémoire, elle aussi, évolue et qu'il existe des mécanismes qui corrigent presque automatiquement certaines erreurs de la mémoire par confrontation avec de nouvelles connaissances. A la condition, cependant, qu'on n'ait pas systématiquement dressé l'enfant à commettre certaines erreurs.

4. Nous avons déjà vu, en parlant des relations et des ordres, que l'enfant est capable d'envisager les objets sous différents points de vue, de les modifier, de les combiner entre eux. En bref, l'enfant devient capable d'opérer avec les objets. Dans le contexte d'une pédagogie propédeutique de la géomé-

trie, nous aurons à envisager en particulier les opérations qui portent sur des objets géométriques.

Pensons aux figures. On peut les déplacer, les tourner ou les retourner, les rabattre, les agrandir ou les rapetisser, etc. ²⁵. A cet égard les différents types de symétrie nous paraissent particulièrement importants. Selon Bauersfeld ²⁶ «on tend à sous-estimer à l'école les capacités d'appréhension et d'articulation de l'enfant en ce qui concerne la symétrie. Déjà le jeune enfant construit et dessine des objets qui ne sont certainement pas symétriques par hasard. Les formes et les «Gestalts» réguliers et bien proportionnés sont souvent préférés contrairement à ce que l'on trouve dans certaines tendances de l'art contemporain peut-être parce que les lois de la vision sont déterminées par des lois de symétrie. (...) Finalement on peut fonder une construction de la géométrie sur le concept de réflexion; et une compréhension de la projection fondée sur le concept de symétrie rend possible une structure plus heureuse de l'enseignement de la géométrie que ne le ferait une conception euclidienne. Considérant cette importance fondamentale de la symétrie, il est sans doute nécessaire de rendre possible au niveau déjà de l'enseignement élémentaire (propédeutique géométrique) la découverte, l'accentuation et la formulation verbale de relations symétriques élémentaires, en partant de l'univers immédiatement vécu de l'enfant. En relation avec les domaines des relations d'ordre et des types de formes (ensembles) nous avons ici de multiples possibilités pour la préparation des contenus géométriques proprement dits.

Avec l'apparition des opérations concrètes, l'enfant acquiert le pouvoir de se représenter et de comprendre un grand nombre de transformations et de changements qui s'effectuent dans l'espace. En premier lieu l'enfant comprend les invariances éventuelles d'une telle transformation, étant capable, par exemple, de découvrir quelles sont les propriétés d'une figure qui ne se modifient pas lors d'un déplacement parallèle et quelles sont les propriétés qui sont changées lors d'une rotation de la même figure. L'enfant commence également à comprendre le caractère systématique de certaines transformations. Par exemple, lorsque nous rabattons un «p» par rapport à un axe vertical nous obtiendrons un «q», lorsque nous rabattons le «p» par rapport à un axe horizontal nous obtenons un «b», et lorsque nous effectuons les deux rabattements simultanément, nous obtenons un «d». Remarquons que nous pouvons également obtenir cette dernière transformation par une rotation de 180° du «p» ²⁷. Que ce système de transformations ait la structure d'un groupe de Klein, n'intéressera sans doute pas nos enfants, pour autant qu'ils ne s'intéressent pas encore aux structures mathématiques. Cela a d'ailleurs aussi peu d'importance que le fait que, certainement, tous les enfants ne parviennent pas à la compréhension de ce système de transformations au même moment. L'essentiel est d'avoir bien joué.

De nombreuses situations qui permettraient d'aborder le sujet de la symétrie ont l'inconvénient qu'il faut savoir dessiner. Il n'apparaît que trop fréquemment que ces problèmes artisanaux ou moteurs conduisent le maître qui veut bien faire à renoncer au jeu, à l'expérience vécue et à les remplacer par des situations où l'on montre, démontre, fait voir, mais où l'enfant n'agit pas

lui-même, ne découvre pas lui-même. Nous persistons à croire qu'il est indispensable que l'enfant prenne un premier contact avec les situations visées par des jeux assez libres, bien avant qu'on ne les «thématisé» en «leçons». Il n'y a pas de doute que le dessin ou l'esquisse est un moyen puissant d'enregistrer, de fixer pour l'avenir, de protocoller une découverte ou une construction. A ce moment-là le dessin n'est pas un objet d'art qui doit être «joli» ou «précis», mais un moyen de travail; il n'est pas un «exercice de style». De même, nous persistons à croire que la langue n'a ni pour but, ni pour fonction de servir à apprendre par cœur des théorèmes, mais qu'elle sert à quelque chose de bien plus important: faire et communiquer à autrui des énoncés basés sur l'analyse ou l'observation précise d'un état de fait. Le dialogue parlé, comme moyen de saisir un état de faits avec précision, doit donc se trouver, toujours à nouveau, au centre des efforts pédagogiques. Et à cet égard, il sera aussi nécessaire de stimuler ce dialogue et de l'encourager aussi bien entre maître et élèves qu'entre les élèves eux-mêmes.

5. Les travaux de l'Ecole de Genève ont montré à maintes reprises que le passage de l'analyse qualitative d'une situation à son analyse quantitative n'est pas simple du tout. Aussi bien, la genèse de la notion de nombre et le développement des conduites de mesure s'étalent-ils sur plusieurs années.

On observe, comme on pouvait s'y attendre, les premières conduites de mesure qualitative au début des opérations concrètes, quand l'enfant devient capable, par exemple, de comprendre que la longueur de deux objets est indépendante de leur déplacement. Le passage à la mesure de grandeurs simples (la longueur, par exemple) se produit, cependant, très lentement et n'est terminé que vers l'âge de dix ans environ. Cet état de fait ne signifie pourtant pas qu'on ne puisse ni ne doive laisser les enfants mesurer avant cet âge. Cela signifie, au contraire, qu'une des tâches de l'école est de soutenir et de stimuler les dispositions naturelles de l'enfant, en particulier ses tentatives spontanées à la comparaison et à la mesure. Cela ne devrait pas mener, toutefois, à la transmission irréflechie de «recettes» auxquelles l'enfant obéirait sans en saisir le sens et sans les comprendre en vertu d'une nécessité fondée sur l'action propre.

Une fois de plus, nous ne demandons ni exigeons des programmes précis ou des «objectifs pédagogiques» (on a pu remarquer d'ailleurs que nous ne présentons ni l'un, ni l'autre). Nous demandons au maître qu'il soit prêt à organiser et à mettre à disposition de l'enfant des situations d'action, de découverte et d'apprentissage, à partir desquelles il puisse faire ses expériences, accumuler des connaissances qui, avec le temps et l'interaction sociale, s'organiseront et qui ne seront pas simplement des règles ou des prescriptions imposées de l'extérieur.

5. Pour conclure

1. Dans son comportement spontané, l'enfant se construit une géométrie spontanée et personnelle, et cela grâce au contact permanent qui s'établit entre lui et l'espace. On n'a donc pas à se poser la question de savoir comment ou quand il faut enseigner la géométrie; bien plus, il faut se demander

quelles sont les formes utiles et appropriées que doit prendre pour nos plus jeunes élèves une pédagogie propédeutique de la géométrie.

2. De toute évidence, on ne pourra pas trouver une forme appropriée en tentant de simplement transmettre nos connaissances, nos théorèmes ou nos recettes (la construction d'un triangle équilatéral à l'aide d'un compas et de la règle...). Une propédeutique de la géométrie consiste en premier lieu à soutenir le développement «spontané», donc à mettre à disposition de l'enfant des situations où celui-ci puisse acquérir ses propres notions en partant d'actions élémentaires et concrètes (c'est-à-dire d'activités portant sur un matériel réel). Les connaissances de l'enfant peuvent et doivent se développer naturellement à partir du réel et de l'action au sein de situations multiples, ainsi qu'à partir d'échanges entre camarades, ou avec le maître, des découvertes faites et des connaissances qu'on en extrait. Pour être précis disons que même les feuilles de travail individuel, les problèmes «préparés» et les représentations graphiques, quelle qu'en soit la qualité, ne peuvent remplacer en aucun cas les activités réelles et concrètes ainsi que l'expérience et la connaissance que l'enfant en retire. Celui-ci doit manipuler des objets réels, dans un espace réel, l'espace dans lequel nous vivons et non celui d'une feuille de papier. Tentons donc d'éviter la simplification didactique traditionnelle.

3. Nous croyons qu'un tel mode d'approche se justifie à la fois par les enseignements de la psychologie du développement et par les quelques expériences pédagogiques et scolaires que les mathématiques nouvelles nous ont permis de faire au niveau de l'enseignement élémentaire.

Insistons cependant sur le fait qu'il serait regrettable (et certaines tendances nous rendent attentifs à une telle possibilité) que l'enseignement nouveau des activités mathématiques élémentaires ou que l'apprentissage propédeutique de la géométrie ne glissent à nouveau vers la transmission de connaissances toutes-faites, de théorèmes ou de mode emplois, comme c'était le cas dans le passé quand l'arithmétique semblait consister essentiellement en un apprentissage de règles et de recettes. Ni les mathématiques nouvelles ni une propédeutique géométrique ne se justifient par leurs contenus (il serait, en effet, à la fois plus efficace et plus facile de les enseigner à un niveau formel quelques années plus tard); elles ne se justifient que par de nouveaux styles pédagogiques, méthodologiques et didactiques, et par la nouvelle compréhension de l'enfant qu'elles nous apportent.

Notes et références

¹ ODENBACH K. *Raumleben im Unterricht*. Braunschweig, 1968. P. 33.

² KLEIN F. *Zur nichteuklidischen Geometrie*. Math. Ann. 37 (1890), p. 381.

³ KLEIN F. Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Verleihung des Lobatschewskypreises. P. 386.

⁴ FLADT K. Die Rätsel «Raum» und «Geometrie». in: *Der Mathematikunterricht* 15,2, 1969. Pp. 15-28. Les citations (2) et (3) sont rapportées d'après ce texte.

⁵ HILBERT D. *Grundlagen der Geometrie* (1899).

⁶ FLADT K. op. cit. p. 23

⁷ Cf. p. ex.: PIAGET J. et INHELDER B. La représentation de l'espace chez l'enfant. Paris, 1948 et PIAGET J., INHELDER et SZEMINSKA A. La géométrie spontanée de l'enfant. Paris, 1948; ou PIAGET J. et INHELDER B. L'image mentale chez l'enfant. Paris, 1966.

⁸ PIAGET J. Logique et connaissance scientifique. Paris, 1967. Pp. 417-418.

⁹ PIAGET J. La construction du réel chez l'enfant. Neuchâtel et Paris, 1938.

¹⁰ PIAGET J. op. cit. (8) p. 419.

¹¹ PIAGET J. et INHELDER. La représentation de l'espace, etc. (cf. (7), p. 105.

¹² PIAGET et al. La géométrie spontanée, etc. (cf. (7), chap. I.

PIAGET J. et INHELDER B. La représentation de l'espace, etc. chap. VIII.

INHELDER B. La représentation de l'espace, etc. chap. VIII.

¹³ PIAGET J. et al. L'image mentale, etc. (cf. (7), chap. III.

¹⁴ PIAGET J. et INHELDER B. La genèse des structures logiques élémentaires, classifications et sériations. Neuchâtel et Paris, 1959. cf. également (13).

¹⁵ Rappelons cependant à ce propos un texte extrait de FREY G. Grundlagen der Mathematik. Hannover, 1968: «Ce sont essentiellement des raisons religieuses qui ont poussé I. Newton à considérer qu'il existait un temps et un espace absolus. L'espace absolu signifie l'omniprésence de Dieu, le temps absolu, Son éternité...»

¹⁶ MARTIUS H. C. Der Raum. München, 1958 (cité d'après (4)).

¹⁷ EINSTEIN A. Préface à JAMMER M. Concepts of Space. Cambridge, 1954 (La version originale de ce texte est en allemand, avec un seul mot («container») en anglais).

¹⁸ BAUERSFELD H. Die Grundlegung und Vorbereitung geometrischen Denkens in der Grundschule. in: Erziehung zum produktiven Denken (Hrsg. RUPRECHT H.). Freiburg i. B., 1967, p. 39.

¹⁹ Signalons à propos de cette tentative de classification qu'elle est ni exhaustive, ni que les catégories obtenues sont mutuellement exclusives. Nous nous sommes consciemment distancés, aussi bien d'une terminologie «mathématique» que d'une terminologie «piagétienne». Le but pour nous était d'énumérer et de discuter quelques notions qui nous paraissent importantes dans le contexte d'une propédeutique géométrique.

²⁰ BAUERSFELD H. op. cit. p. 44.

²¹ SINCLAIR H. Langage et opérations. Paris, 1967.

²² PIAGET J. Le jugement et le raisonnement chez l'enfant. Neuchâtel et Paris, 1923.

²³ cf. (7).

²⁴ PIAGET J. et INHELDER B. Mémoire et intelligence. Paris, 1968.

²⁵ cf. (7).

²⁶ BAUERSFELD H. op. cit. (18). cf. également: BAUERSFELD H. et al. alef I, Wege zur Mathematik. Hannover, 1970, dans le passage cité, Bauersfeld se réfère aux ouvrages suivants: METZGER W. Gesetze des Sehens. Frankfurt, 1936. BACHMANN F. Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin, 1959. BREIDENBACH W. Raumlehre in der Volksschule. Hannover, 1964 (8e éd.).

²⁷ GRECO P. «I-VHR», étude génétique d'un système de représentations imagées concernant un groupe de transformations spatiales. in: Etudes d'épistémologie génétique (éd. J. Piaget), Vol. XVIII. Paris, 1964, pp. 203-255.

Notes sur la notation

par Walter Senft et Rémy Droz

Nous croyons que l'éducation mathématique première de l'enfant doit être centrée bien davantage sur la stimulation et l'encouragement que sur le processus de la transmission. La transmission des contenus mathématiques s'effectue essentiellement au niveau de la pensée formelle ou logique; elle est, par conséquent, affaire de l'enseignement secondaire ou supérieur. Au niveau élémentaire (enseignants pré-scolaire et primaire inférieur) il s'agit surtout de créer les conditions préliminaires et les champs d'expérience

propices à l'activité mathématique formelle ultérieure. Les mathématiques — si on veut bien les comprendre comme activités intellectuelles — sont ancrées dans les procédures générales de l'analyse cognitive du monde qui nous entoure. Ces activités s'étendent de manière continue des premières conduites intelligentes du jeune enfant aux théories formelles des sciences mathématiques. Symétriquement, l'enseignement des mathématiques va de la stimulation des fonctions cognitives les plus élémentaires au développement déductif d'une structure fondée sur des axiomes. Cet enseignement apparaît ainsi comme un vaste champ sur lequel se développent nos efforts pédagogiques.

Au centre de ces efforts se trouvent toujours les questions portant sur la représentation ou la notation. En plus des activités mathématiques élémentaires proprement dites, telles que la classification (formation d'ensembles), la comparaison (découverte de relations) ou la réflexion sur les actions et la combinaison de celles-ci (opérations), on rencontre toujours les multiples formes qui concernent la désignation, la dénomination ou encore la représentation. On peut dire que le fait de vouer un soin délicat aux activités sémiotiques ou symboliques (qui consistent à «désigner» des choses ou des activités) doit être partie intégrante de tout enseignement des mathématiques. L'éducation première devrait accorder une attention toute particulière au développement de ces moyens. Nous courons continuellement le danger de présupposer chez l'enfant la connaissance des formes de représentation dont nous faisons usage; nous croyons que nos formes de représentation seront interprétées par lui comme nous l'entendons. En fait nous modifions continuellement le contenu de nos signes; une ligne dessinée sert, par exemple, à séparer des domaines (exercices topologiques: «extérieur» et «intérieur»), puis elle sert de ligne directrice d'une progression (exercices de classification sur un schéma en «arbre»), pour devenir partie d'un objet-symbole qui doit être pris comme un tout (chiffre, lettre, notation symbolique des propriétés de blocs logiques).

C'est précisément dans le contexte de l'enseignement des mathématiques modernes que se sont développées, en bien des endroits, de multiples conventions relatives à la notation. Ces conventions doivent être introduites et développées avec soin dans le contexte scolaire; il faut aussi savoir les fonder et en justifier l'existence. On ne peut ni ignorer, ni simplement négliger le fait que ces signes sont contestables, comme est contestable tout ce qui est fixé par convention. L'enfant ne doit pas être rapidement mis sous la contrainte de signes imposés; il devrait pouvoir comprendre dans la mesure du possible (et il a sans doute le droit de comprendre) que la notation et les signes sont convention pure d'une part (c'est-à-dire qu'on peut les fixer de cas en cas et qu'on peut les interpréter en toute liberté), mais qu'on peut les unifier ou normaliser pour faciliter leur rappel ou leur mémorisation et surtout pour assurer une certaine communicabilité.

Le psychologue parlera, dans ce contexte, de la représentation et des fonctions symboliques ou sémiotiques. La notation (fixation d'un contenu par l'écriture ou par d'autres graphismes) fait partie de ces fonctions, mais on pourrait énumérer également le langage, les représentations intérieures ou images mentales et l'imitation. Il faut comprendre cette notion des fonc-

tions sémiotiques au sens le plus large et l'appliquer en toute circonstance, chaque fois qu'un objet (matériel ou intellectuel) doit être «représenté» ou «désigné». On rencontre les moyens de désignation les plus élémentaires dans le geste qui va vers un objet et dans la présentation de l'objet lui-même. Nous pouvons ensuite imiter un objet ou le dessiner (à l'échelle naturelle et aussi semblable que possible, ou en représentation similaire ou analogue avec une modification de l'échelle). Finalement nous tentons souvent de saisir l'objet que nous voulons désigner au moyen d'une représentation symbolique, par des graphismes (écritures) ou par des phonèmes (langages). Les signes que nous choisissons ont parfois une certaine ressemblance avec l'objet désigné, mais, parfois aussi, le signe est choisi d'une façon apparemment tout arbitraire.

Les symboles permettent de communiquer entre êtres humains: un objet qui n'est pas immédiatement accessible est désigné ou représenté sous une forme appropriée afin que le partenaire puisse savoir de quoi il s'agit. En partant d'un ensemble d'objets (univers convenu) on caractérise un élément (on le décrit, on le désigne) de façon qu'on puisse savoir de quel élément on parle. Notre culture se fonde, très essentiellement sur des systèmes sémiotiques qui utilisent d'une part des représentations analogues (graphismes, graphiques, mimiques, expressions gestuelles), et d'autre part également — et dans une très large mesure — sur des systèmes qui sont purement conventionnels et arbitraires.

Dans la vie du très jeune enfant on observe déjà à des stades précoces la possibilité de prendre connaissance de certains signaux ou de certains indices. Dans les premiers mois de sa vie, l'enfant réagit aux pas de sa mère qui annoncent un repas ou une autre situation ressentie comme agréable. Le développement spontané de l'imitation montre comment l'enfant crée certaines fonctions sémiotiques: il imite des mouvements, des personnes entières et même des objets. Et lorsque l'enfant a atteint un certain niveau de développement, à l'âge de deux ans environ, il devient même capable d'imiter des objets qui ne sont plus physiquement présents (imitation différée). A ce moment se développe également le langage; on peut alors observer certaines formes simples de représentation intérieure dans le jeu symbolique: un bâton devient tour à tour fusil, canne, longue-vue ou flûte.

A l'âge de trois ans environ, l'enfant est souvent capable d'observer et d'imiter avec quelque précision des objets, de comprendre et de suivre des consignes verbales et d'interpréter des images simples. Mais ces débuts de compréhension des systèmes symboliques propres aux adultes ne doivent pas nous tromper: l'enfant rencontrera encore de nombreuses difficultés dans son évolution. L'observation précise et exacte de données graphiques, par exemple, demande un long développement (que l'on pense à la disposition de d, b, p, q), et les formes de notation graphique de l'enfant sont souvent encore fort insuffisantes. Les formes de représentation enfantines sont parfois tellement limitées encore qu'elles n'ont que très partiellement le caractère d'instruments de communication (question-type «dis-moi ce que tu as dessiné ici, c'est bien joli»). Il est pourtant possible de faire apprendre aux enfants des

systèmes conventionnels (lecture, écriture) à un âge très précoce. Mais, dans ces cas, il s'agit la plupart du temps non pas de comprendre le caractère et la fonction des symboles, mais bien davantage de dresser l'enfant à des conduites ou à des réponses bien précises en réaction à des situations-signaux (stimuli) tout aussi précises et limitées. L'efficacité et le sens de ces dressages sont d'ailleurs fréquemment mis en doute.

Nous croyons que l'introduction et le développement des systèmes de symboles est un objectif pédagogique essentiel qui doit être poursuivi avec attention et une très grande connaissance des buts à atteindre. Mentionnons, en particulier, les aspects suivants:

1. Liberté de la notation. Comment on note et ce qu'on note n'a aucune importance. L'essentiel, c'est qu'on puisse réutiliser (c'est-à-dire comprendre) plus tard ce qu'on a noté. Le souvenir de la situation notée peut d'ailleurs soutenir (du moins au début) une notation encore défaillante.
2. Précision de la notation. Il doit être possible de différencier un modèle noté d'autres données graphiques de façon que l'on puisse re-construire la situation que l'auteur de la note avait construite auparavant, ou qu'il avait en tête. Une notation doit être univoque (ou du moins elle devrait tendre à le devenir).
3. La transmission et la communication des notations. Une description doit être précise et appropriée de façon que le partenaire puisse identifier de quoi il s'agit. Des explications supplémentaires peuvent aider (et on constate qu'elles sont toujours à nouveau nécessaires), mais il faudrait tendre à en diminuer le nombre.
4. Le caractère arbitraire et conventionnel de la notation. Pour son usage personnel on use de cette liberté de notation mentionnée au point 1. Mais lorsqu'on veut transmettre une information, la communiquer, il est indispensable d'établir certaines conventions pour s'assurer de la communicabilité du message.

Une tentative de traduire ces principes didactiques en situations exploitables à l'école paraîtra prochainement sous le titre «MATHEMATIK IN GRUNDFORMEN»¹. Ces cahiers de travail se centrent sur l'éducation mathématique première; les formes de notation les plus diverses y sont traitées avec un soin particulier. Dans le premier cahier (titre: «Grunderfahrungen I / Vorschulstufe») l'introduction de la notation est soigneusement préparée et thématisée. Ainsi l'enfant peut, dans une première phase, librement créer et utiliser des signes et des symboles: il désigne des objets en les coloriant, en les entourant d'un trait, en y mettant une petite croix, en y collant une pastille gommée. Par des exercices clairement définis, l'enfant est encouragé à faire attention aux données graphiques et à les respecter, les imiter et les transporter (poser des objets selon un modèle, dessiner selon un modèle). L'enfant doit comprendre et effectuer les instructions avec une certaine précision et avec clarté (l'interprétation de ce qui est fait étant au moins aussi importante que l'activité effectuée elle-même: en effet, il ne s'agit pas de faire — plus ou moins aveuglément — ce qu'il faut faire, mais de savoir, c'est-à-dire de comprendre, pourquoi on a fait telle chose ou choisit telle solution

parmi d'autres). Une autre phase est consacrée à la tâche de fixer, à l'aide de moyens graphiques, une situation concrète que l'enfant a créée. L'enfant fait un protocole: il pose des objets (réglettes, plots, etc.) sur son papier selon une disposition librement choisie, puis il la fixe (en suivant, par exemple, les contours à l'aide d'un crayon) graphiquement, afin d'être en état de reproduire la même situation plus tard ou pour un camarade qui pourra construire une disposition isomorphe à l'aide du message graphique. Un prochain pas consiste à faire des plans qui ne sont plus à l'échelle (où l'on ne peut plus simplement poser les objets dessus), mais qui sont des reproductions similaires mais réduites (représentation iconique analogue-isomorphe). Ce faisant certains aspects peuvent être particulièrement accentués: les couleurs et les formes des objets doivent être respectées, identifiées et fixées par des signes; ou encore il s'agit d'identifier des instructions spécifiques et de les exploiter. Les objets sont articulés selon leurs propriétés. Et lentement on voit apparaître les schémas d'articulation ou d'organisation dont se servent les adultes: lignes, colonnes, diagrammes, matrices, etc.

Dans tous ces exercices, il ne s'agit pas de toute évidence, de faire apprendre des signes conventionnels. Il s'agit d'une propédeutique qui ne débouche que plus tard sur les formes de notation normalisées. Les enfants doivent trouver dans ces exercices — du moins nous le croyons — le moyen d'une compréhension des divers aspects de la notation; il s'agit en quelque sorte pour eux de se construire un horizon d'expériences en vue de la notation. L'apprentissage des systèmes «obligatoires» conventionnels ne sera plus alors une simple contrainte sous l'autorité de la convention, mais apparaîtra comme une nécessité en vue de la simplification des notations personnelles et surtout en vue de l'unification des moyens de communication verbaux et écrits (linguistiques et graphiques).

¹ Editeurs: Schubiger (Winterthour) et E. Klett (Stuttgart).

POUR VOTRE BIBLIOTHEQUE

● Madeleine Goutard. «**Mathématiques sur mesure**», *Pédagogies pour notre temps*. Classiques Hachette, Paris, 1970, Hachette, 190 × 240 mm.; 80 pages; ill.

En décembre 1962 (*Bulletin Cuisenaire*, *Les nombres en couleurs*, no 5), nous donnions, pour la première fois, la parole à Madeleine Goutard en publiant d'elle un extrait de son ouvrage, à paraître, «*Les Mathématiques et les enfants*». Nous avons eu, ensuite, maintes fois l'occasion de nous enrichir de la pensée de l'auteur. Depuis quelques années sa voix s'était tue. Nous étions privés. Voici, heureusement, que cette voix se refait entendre et d'une manière à la fois neuve et ancienne. Neuve en ce sens que Madeleine Goutard qui avait longtemps travaillé avec les réglettes Cuisenaire se situe désormais «au-delà» des matériels. Avec la force qu'on lui connaît, elle dénonce la paresse de ceux qui, croyant bien faire, multiplient les matériels autour des enfants oubliant une chose, mais essentielle, à savoir que ce qui importe, ce n'est pas le matériel, mais l'activité d'esprit suscitée par lui. A quoi

bon, dit-elle, répéter la même opération avec dix matériels différents? On ne fait alors que dresser les esprits à acquérir des habitudes stéréotypées. On ne les libère pas.

Si Madeleine Goutard dit aussi des choses anciennes c'est qu'elle se situe dans la lignée des prophètes qui, si anciens qu'ils soient, demeurent éternellement jeunes. Elle nous redit — et tente de nous convaincre — que programmes, méthodes et matériels ne sont que peu de chose en regard de l'attitude confiante, réceptrice et libératrice de l'éducateur qui, laissant son disciple trotter devant lui (Montaigne), se laisse instruire par lui afin de le mieux diriger, de le mieux aider à trouver sa propre voie. Tel est le véritable enseignement sur mesure qui est, en définitive, un enseignement personnalisé en ce sens que l'élève s'épanouit et se mûrit, non point dans la solitude où pouvait le maintenir l'enseignement individualisé de jadis, mais dans l'activité communautaire où chacun enrichit chacun.

Madeleine Goutard cependant ne se borne pas à nous exhorter. Elle nous relate comment elle s'y est prise pour réaliser cet enseignement sur mesure. Six expériences, vécues, oh combien intensément, dans des classes de New-York nous montrent que ce qui paraît encore aux yeux de plusieurs d'entre nous comme une utopie, est susceptible de devenir réalité chaude, vivante, heureuse. Ces expériences: des mesures à l'aune de la conscience; une rencontre avec de grands nombres; une table de Pythagore rajeunie; de la richesse graphique à l'abstraction cartésienne; la géométrie d'un problème topographique; genèse d'une classification.

Une lecture roborative à ne pas manquer.

S. R.

● L. Duvert et al. **«Mathématiques en 5e»**. Expérimentations et nouveaux programmes. Coll. «Recherches pédagogiques», brochure no 42 RP Paris, Institut Pédagogique National, Département de la Recherche pédagogique, 1970.

Cette nouvelle brochure de plus de 100 pages fournit le compte rendu des expériences qui se sont déroulées en France pendant l'année scolaire 68-69 au niveau de la 5e (la 7e année à Genève, élèves de 12-13 ans) pour mettre en place l'enseignement nouveau de la mathématique. Six centres régionaux relatent leurs expériences: Bordeaux, Lyon, Marseillevy, Toulon, Paris et Poitiers. Trois thèmes proprement mathématiques sont explorés en profondeur: Relations, Exploration de l'espace, Z en sixième et en cinquième. Deux nouveautés: Enseignement mathématique et linguistique (la langue maternelle peut fournir de multiples occasions d'utiliser certaines notions mathématiques; lesquelles pourraient sans doute lui rendre la politesse en éclairant la langue française d'un jour nouveau) et la Programmation (premier pas en programmation pour des enfants de 10 à 12 ans et leur maître).

S. R.

● Lire aussi le numéro spécial de «l'Ecole et la Nation» (195, janvier 1971, Paris 9e; 19, r. St-Georges) consacré aux **maths modernes**:

1. Eduquer, c'est conquérir constamment, par André Lichnérowicz;
2. Il faut payer le prix, par G. Poitou et J. P. Kahane;

3. *Mathématiques et forces productives*, par J. Metzger;
4. *Une culture mathématique donnée à tout le monde*, par A. Revuz et J. Beauvais;
5. *Permettre aux enfants de se fabriquer un outillage mental*, par Nicole Picard;
6. *L'effort accompli par la grande majorité des maîtres*, par A. M. Touyarot;
7. *Le bon sens ne tient pas lieu de formation de base*, par Gérard Vergnaud;
8. *De la théorie à la pratique*, par D. David.

● Nicole Picard, *Journal de Mathématique II CM 1 et CM 2, fascicules 1 et 2. «Commentaires pour le maître»*. Coll. «Activité mathématiques à l'école élémentaire», Paris 5e, O.C.D.L., 65, r. Claude-Bernard; 1970. Ce «Livre du maître» complète les deux ouvrages «*Journal de mathématique II*», fascicule 1 et fascicule 2, dont *Math-Ecole* a rendu compte dans le numéro 45, novembre 1970, p. 25. De l'avant-propos de Nicole Picard: «*Mathématiser*» ou la notion de modèle:

«Des situations sont proposées qui donneront aux enfants l'occasion de fabriquer des modèles mathématiques rendant compte de ces situations diverses. On s'apercevra alors que bien des situations issues de la vie de la classe, des activités d'éveil seront des occasions de mathématiser. En effet la mathématique doit apparaître, non pas comme une discipline en marge des autres, mais bien comme un outil permettant d'organiser, de mettre en relation, finalement de tirer parti et d'exploiter des situations trop complexes pour être directement traitées.

» Cette activité de mathématisation est extrêmement importante, l'expérience montrant en effet que des enfants — et même des adultes — pourtant habiles en calcul sont incapables de résoudre des problèmes qui leur sont proposés. Une solution pourrait être de fournir un recueil de solutions types de problèmes types mais il est bien évident que cette solution est purement utopique, car il est impossible d'établir le catalogue de tous les problèmes qui peuvent se poser. Au contraire, la solution semble bien plutôt être de donner des problèmes ouverts, c'est-à-dire sans rien indiquer quant aux modes de résolution possibles. L'activité de mathématisation prendra alors toute son importance. Elle permettra aux enfants de prendre l'habitude de traiter des situations nouvelles.»

S. R.

Erratum

Math-Ecole, 46, p. 32, 2e ligne, lire «La méthode **clinique...**» et non classique.

Comité de rédaction:

Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame, D. Froidcœur, G. Guélat, F. Ober-son, L. Pauli, S. Roller, rédac-teur.

Abonnements:

Suisse F 7.—, Etranger F 8.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43 fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel (038 / 24 41 91).