L. EULER
1707-1783

109

MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1983
22e ANNÉE

MATH-ECOLE 109

22e ANNÉE Paraît cinq fois par an SEPTEMBRE 1983

Editorial

Du temps pour penser

Certains se demanderont peut-être si la revue Math-Ecole, au gré de la mode, est entrée dans sa phase rétro en commémorant le bicentenaire de la mort d'Euler. Notre propos n'est pas de justifier cette entreprise, car les lecteurs ne manqueront pas de découvrir eux-mêmes les multiples raisons qui rendent si attachant le célèbre mathématicien bâlois.

Il y a d'abord Euler dans son temps, avec son caractère, sa personnalité, son existence traversée d'épreuves, son activité scientifique inépuisable. Nous sommes extrêmement reconnaissants à M. Alfred Berchtold d'avoir bien voulu l'écrire tout exprès pour Math-Ecole. Il y a ensuite toute cette partie de l'œuvre d'Euler qui est accessible à ceux qui, sans être spécialistes, ont quelque intérêt pour les mathématiques. M. Pierre Bolli nous en entretient à l'aide d'exemples variés qui méritent une attention approfondie. Et, puisque Math-Ecole n'aurait pas sa raison d'être sans les élèves et les enseignants, il était naturel de placer au cœur de ce numéro les expériences vécues en classe et présentées par M. Roger Délez.

Des pages à lire, à relire en y consacrant un peu de ce temps que les enseignants, en début d'année scolaire, se promettent bien de réserver à la réflexion. Car les mathématiques sont avant tout une science spéculative qui exige du temps, de la disponibilité et qui se conçoit mal dans la précipitation.

Il s'agirait là d'évidences et de banalités si nous ne vivions dans un temps et dans une société qui valorisent l'action rapide, l'esprit de décision et l'aptitude à la réaction. Il est certainement indispensable de pouvoir disposer dans toute situation de crise d'un état-major apte à prendre des mesures adéquates, de pouvoir compter sur des subordonnés prêts à réagir conformément à des scénarios exercés d'avance. De la chute de l'alpiniste dans une crevasse à l'accident dans une centrale nucléaire, tout est prévu pour sauver des vies, limiter les dommages et réparer les dégâts. Il faut s'en féliciter d'autant plus que c'est le lieu de solidarités effectives et efficaces. Mais à trop exalter ce type de comportement, on risque à coup sûr de confondre réflexe et réflexion, imitation et imagination. Et la vie n'est heureusement pas faite seulement d'états de crise.

Voilà pourquoi un temps consacré à la réflexion, à la méditation à partir de tel travail d'Euler me paraît être un temps bénéfique «pour l'honneur de l'esprit humain» comme dirait Dieudonné. Sans oublier, comme le souligne Christian Houzel, que «les motivations pour enseigner les mathématiques et la manière dont on les enseigne sont conditionnées par l'idée qu'on se fait de cette science» [1].

André Calame

[1] Cité par A. Bouvier en exergue de son ouvrage «La mystification mathématique» Hermann 1981.

Léonard Euler
Un mathématicien dans son temps

par Alfred Berchtold

... un des hommes les plus grands et les plus extraordinaires que la nature ait jamais produits(...) dont la tête fut toujours occupée et l'âme toujours calme.
Condorcet

... un de ces hommes destinés à recommencer à zéro, même s'ils disposent des plus riches moissons de leurs prédécesseurs.
Goethe

1691: Un Fatio (Jean) est exécuté à Bâle comme séditieux. – 1707: Un autre Fatio (Pierre) est exécuté à Genève pour la même raison, cependant qu'à Londres un troisième Fatio (Nicolas) est exposé au pilori. C'est lui qui, déclarant hautement qu'il reconnaissait en Newton le premier inventeur du calcul différentiel, déchaîne le combat homérique entre les partisans du physicien anglais et ceux de Leibnitz. Or, dans ce combat, un Bâlois se signale, tenant tête, «nouvel Horatius Coclès», à toute une armée d'adversaires: c'est le génial et irascible Jean Bernoulli, qui, jaloux de toute concurrence, surtout si elle s'élève de sa propre famille, s'inclinera devant le seul Léonard Euler, son disciple dont il reconnaîtra sans réticences la rayonnante supériorité.

Euler, d'une vingtaine d'années plus jeune que Bach, Haendel et Scarlatti, est né à Bâle en 1707, contemporain de Goldoni, de Buffon, de Linné et, à un an près, de Franklin. De quelques années l'aîné de Rousseau, Diderot et d'Alembert, il voit le jour trois ans après l'**Optique** de Newton, quatre ans après les **Nouveaux essais sur l'entendement humain** de Leibnitz. L'année de sa naissance, Neuchâtel se confie à la tutelle lointaine de la dynastie de Prusse qui jouera un rôle non négligeable dans la carrière du mathématicien, cependant qu'en Russie l'architecte tessinois Domenico Trezzini édifie à partir de 1703 la Ville de Pierre le Grand qui sera pour Euler plus importante peut-être encore que Berlin. Mais l'amiral genevois François Le Fort est mort il y a quelques années déjà, lui qui créa cette flotte russe dans laquelle Euler, à une heure de découragement, rêvera de prendre du service et pour laquelle il effectuera d'importants calculs.

Le petit Léonard est fils de pasteur, comme tant de personnalités éminentes nées en terres réformées. Si son père dessert la paroisse de Saint-Jacques, ce prénom apostolique évoque une autre présence tutélaire, celle de Jacques Bernoulli, premier de la lignée des mathématiciens, frère aîné de Jean qui fut son élève avant de devenir son rival. Or Jacques, ministre du Verbe avant de devenir celui de la reine des sciences, inocula le virus mathématique au pasteur Euler. Celui-ci se chargea de l'éducation de son fils avant de l'envoyer au collège, peu reluisant à l'époque, qui devait le préparer à des études de théologie. Léonard, «converti» par les leçons particulières de Jean Bernoulli, qui compensait par son seul génie les lacunes de toute une Université, quitta la théologie pour les sciences. Sa vocation scientifique, d'ailleurs, était précoce. Ne l'avait-on pas surpris à l'âge de quatre ans, bien des générations avant Konrad Lorenz, à couver patiemment des œufs dans le poulailler? La famille en effet avait déménagé dans le presbytère agreste de Riehen. Les biographes d'Euler retiendront l'influence bénéfique d'une enfance campagnarde, génératrice de vertus de simplicité, de frugalité, de parfait naturel que le grand homme devait conserver jusqu'à la fin de ses jours, comme il conserva intacte la foi de son enfance. Ses convictions religieuses devaient s'affirmer aussi bien dans son foyer (pratique du culte familial) que dans ses contacts avec certains des plus illustres «esprits forts» de son temps. Qu'on relise, à ce propos, ses **Lettres à une Princesse d'Allemagne!**

Le premier discours public de l'étudiant compare entre elles les philosophies de Descartes et de Newton. Il n'a pas vingt ans lorsqu'il traite un sujet mis au concours par l'Académie des Sciences de Paris et pour son coup d'essai remporte un accessit. Il s'agit de préciser la place optimale où planter un mât dans un navire. La dernière des cent thèses de son mémoire vaut la peine d'être citée. Elle situe d'emblée un homme, une forme de pensée, une méthode: «Je n'ai pas jugé nécessaire de confirmer ma théorie par l'expérience; elle est déduite des principes les plus sûrs, les plus incontestables de la mécanique, de sorte qu'il n'y a pas à douter de son application pratique.» Optimisme rationaliste, foi inconditionnelle dans la méthode mathématique qui, remarque Otto Spiess, contribue à expliquer l'incroyable fécondité de ses fidèles! Notons ici le nombre étonnant de mémoires de mathématiciens bâlois consacrés à des problèmes de navigation. Leurs titres juxtaposés composeraient à eux seuls un poème digne de Blaise Cendrars! [1]

Suit un mémoire sur le son, première de nombreuses études consacrées à des problèmes d'acoustique, voire de théorie musicale. Ces problèmes font vibrer en Euler une corde sensible. Il parlera dans ses **Lettres à une Princesse** de «ce plaisir dont une belle musique frappe les oreilles intelligentes», célèbrera la beauté des proportions musicales avec la même conviction qu'un siècle plus tard ses compatriotes J. Burckhardt et Wölfflin celle des proportions architecturales; il insistera sur le parallèle son et lumière, verra dans la voix humaine un chef-d'œuvre du Créateur et rêvera, avant Jules Verne, d'une machine parlante.

Bâle n'offrant point de débouchés immédiats au savant, il répond à l'appel de la jeune Académie de Saint-Pétersbourg et, âgé de vingt ans, franchit le 17 mai 1727 la frontière russe. Deux fils de Jean Bernoulli l'ont précédé, lui ont ouvert la voie. Lorsque Daniel retournera à Bâle, Euler lui succèdera en tant que professeur de mathématiques. A signaler ici que si les Bernoulli, après leurs absences, reviennent en général au bercail bâlois, tout en pestant contre son étroitesse, Euler ne reverra plus jamais sa patrie. Ses descendants non plus.

---

[1] Celui-ci cite Euler parmi ses ancêtres maternels.

Mais il restera fidèle aux souvenirs d'enfance et au dialecte bâlois dont il se plaira jusqu'au bout à savourer les particularités [1]. Il tiendra à ce que son épouse, fille d'un père saint-gallois, acquière la bourgeoisie bâloise. Il soutiendra toujours ses compatriotes à l'étranger.

Le voici collaborant, sur les bords de la Neva, à l'œuvre immense du développement intellectuel, scientifique et technique de la Russie voulu par le tsar Pierre. Les tâches sont multiples: activités de contrôle pédagogique, collaboration au département géographique comme à la commission des poids et mesures, rédaction d'un manuel scolaire, communications aux séances de l'Académie; il faut que les calculs servent à l'essor de la navigation comme à celui de la cartographie. L'immense empire est en train de se découvrir lui-même (expédition du Kamtchatka!). C'est sur tous les fronts de la science que la bataille est engagée. On sait que la perte d'un œil par Euler a été attribuée à un abcès consécutif à une concentration trop intense sur des cartes géographiques. Paradoxe ou logique insondable, ce savant qui, dans chacun de ses deux séjours en Russie perdra l'usage d'un œil, est aussi le croyant pour qui la merveille de l'œil humain est une des plus belles preuves de l'existence du Créateur. «Tout ce qui regarde la vision, écrira-t-il dans ses **Lettres à une Princesse,** est sans contredit l'objet le plus digne de notre connaissance, la chose la plus merveilleuse que l'esprit humain ait pu pénétrer.» La contemplation mène à l'adoration, mais aussi au souci de faciliter la découverte, l'observation des merveilles du monde par l'amélioration des instruments d'optique. On sait l'incitation que ses calculs donnèrent à l'opticien anglais Dollond réalisant (à la suite de données qu'il croyait pourtant ridiculiser!) en 1757 un objectif achromatique pour télescope. Recherches «sérieuses». Recherches «badines» aussi. Dans ses **Lettres**, Euler propose des types nouveaux de lanternes magiques offrant des spectacles en mouvement, à grande dimension. Il mentionne avec sympathie l'idée du «clavecin oculaire» d'un certain père Castel.

Sollicité pour les activités les plus diverses, Euler eut la prudence de ne pas établir l'horoscope du petit tsar Ivan VI. Bien lui en prit. Exilé puis incarcéré, l'enfant royal devait mourir plus tard au cachot.

La situation en Russie n'étant plus de tout repos, Euler accepta avec joie l'invitation de l'Académie de Berlin, fille de Leibnitz, tombée en léthargie mais que Frédéric le Grand, arrivé au pouvoir en 1740, désirait ranimer. La reine-mère s'étonnant du laconisme du nouvel académicien, celui-ci lui répondit: «Madame, je viens d'un pays où lorsqu'on parle on est pendu!» Euler, en 1741, n'arrivait pas les mains vides. N'avait-il pas, entre autres, publié en 1736 sa fameuse **Mécanique** issue, selon Jean Bernoulli «du plus profond du cœur des mathématiques»? Frédéric II se rendait compte de l'importance, en son siècle, des mathématiques nouvelles. Mais il avait beau faire et questionner

---

[1] A en croire Rudolf Fueter, telle tournure dialectale s'est introduite jusque dans le latin dont usait le savant!

son entourage, la signification véritable du calcul infinitésimal lui échappait. A parler franc, il préférait les beaux esprits aux calculateurs savants. De sorte que la situation à Berlin du «Géomètre borgne», du «Cyclope» Euler ne fut jamais exempte d'un certain malaise. Sa «bonhomie helvétique» n'était pas faite pour Sans-Souci. Eût-il réussi dans l'aménagement des jets d'eau du parc que son prestige s'en fût trouvé accru. Mais il semble avoir échoué en pratique, en dépit de ses théories, ce qui confirma le prince dans ses réserves.

C'est à Berlin que furent écrites l'**Introduction à l'analyse infinitésimale** (publiée à Lausanne en 1746), l'**Institution du calcul différentiel** et l'**Institution du calcul intégral** (publiée à Saint-Petersbourg de 1768 à 1770), aussi remarquables par leur clarté souveraine que par leur richesse en exemples stimulants pour l'esprit. Moritz Cantor parlera de l'**Introduction** comme d'un des livres «les plus riches, les plus beaux et les plus féconds qui soient jamais sortis de presse». – «J'ai cultivé les mathématiques supérieures, disait encore Jean Bernoulli, dans leur état d'enfance, mais toi, tu nous les présentes à l'âge adulte.»

A côté des grands ouvrages, les mémoires succédaient aux mémoires. Personne – sinon Daniel Bernoulli – ne remportait autant qu'Euler de prix de l'Académie des Sciences de Paris.

Malgré les conseils du bon Daniel de s'en tenir à ses découvertes «sublimes» dans le champ des mathématiques, Euler se croyait tenu de descendre dans l'arène, d'affronter – nous l'avons dit – les esprits forts, de défendre la Révolution et de combattre la monadologie leibnitzienne. Comme si – Otto Spiess le laisse entendre – le sang de ses ancêtres théologiens bouillonnait par moments dans ses veines. D'où des appréciations parfois sévères portées sur sa personne par un certain parti: «Il est incroyable, écrivait d'Alembert à Lagrange, qu'un aussi grand génie que lui sur la géométrie et l'analyse soit en métaphysique si inférieur au plus petit écolier, pour ne pas dire si plat et si absurde, et c'est bien le cas de le dire: **non omnia eidem Dii dedere** [1] » D'où encore les attaques à l'occasion cinglantes d'un Voltaire qui, par ailleurs, ne lui pardonne pas la formule: «Nous devons nous fier davantage au calcul qu'à notre raison». L'auteur de **Candide** voit en Euler l'homme qui remplit soixante pages de calculs pour un résultat qu'on pourrait avec un peu de réflexion atteindre en dix lignes. Pourquoi manier les chiffres pendant trois jours et trois nuits quand un quart d'heure de concentration vous indiquerait quels principes s'imposent? Mais Euler n'est-il pas – avant Lagrange – un des rares hommes qui ont su offrir à leur époque, précisément par une simplification élégante des formules, un instrument de travail nouveau, débouchant sur des perspectives insoupçonnées?

Un mot d'Euler est significatif. A un collègue désirant utiliser ses formules de dioptrique pour construire une longue-vue, il propose d'attendre un de ses nouveaux mémoires. Le premier en effet ne conduirait pas aux résultats

---

[1] «Les dieux n'ont pas tout donné à la même personne».

escomptés. Pourquoi donc l'avoir publié? Parce qu'il contient des calculs qui, indépendamment de leur objet, peuvent servir de modèle! De tels calculs d'un genre nouveau ne sont jamais inutiles!

A ce propos, les esprits utilitaires pourront mettre en question la valeur pratique des réflexions d'Euler sur le problème fameux des sept ponts de Königsberg [1] (aujourd'hui Kaliningrad), impossibles à franchir sans repasser deux fois sur l'un d'eux, ils pourront sourire du problème du cavalier devant – et pouvant – parcourir les 64 cases de l'échiquier sans s'arrêter deux fois sur la même case. En revanche ils ne pourront que s'incliner devant **la Théorie (...) des machines (...) mises en mouvement par la réaction de l'eau** (publiée en 1756). En 1943, l'entreprise Escher-Wyss a construit une turbine «eulérienne» sur les indications précises du professeur Ackeret. L'effet fut concluant!

Arago a dit un jour: «Euler calculait comme d'autres respirent.» Au fort des années berlinoises, Spiess parle d'une production annuelle de 800 pages in-quarto. Les thèmes traités: mécanique, théorie des nombres, équations différentielles, musique, dioptrique, astronomie, calcul des probabilités, voire magnétisme... Le savant ne se laissait nullement troubler par la conversation des siens autour de lui. «Un enfant sur les genoux, un chat sur le dos, c'est ainsi, relate un témoin, qu'il composait ses œuvres immortelles.» Servi par une mémoire prodigieuse, il était capable de réciter par cœur l'**Enéide** entière (en indiquant les débuts et les fins de pages de son édition). D'ailleurs un vers de l'Enéide l'avait lancé sur la piste de nouveaux calculs [2].

Ses rapports avec ses jeunes collègues – ses concurrents – étaient empreints le plus souvent d'une grande sérénité. A Lagrange qui lui soumettait ses découvertes, il écrivait qu'il attendrait lui-même de publier ses propres travaux sur la question pour éviter toute vaine dispute de préséance. A un adversaire britannique, disciple de Newton, qui l'avait attaqué brutalement, il répondit (plus tard) en traduisant une de ses œuvres, et en lui assurant par ses compléments personnels une valeur nouvelle. Tout ceci, bien sûr, n'empêchant pas des frictions occasionnelles, des malentendus, des dissensions passagères, comme en témoigne la correspondance. Voir notamment ses relations avec d'Alembert.

Ving-cinq ans à Berlin suffisaient. D'ailleurs le mathématicien avait maintenu ses liens avec l'Académie de Saint-Pétersbourg. Il continuait de la ravitailler en mémoires savants, il ouvrait l'œil sur les publications d'Europe occidentale pouvant être utiles à la Russie, il hébergeait dans sa maison de jeunes pensionnaires russes. Même la guerre opposant les deux pays n'altéra pas

---

[1] Voir croquis sur la couverture de Math-Ecole (note de la rédaction).

[2] *«L'ancre tombe; aussitôt la quille qui fend l'onde s'immobilise.* Cela suffit, écrit F. le Lionnais, pour qu'Euler s'absorbe dans le problème du freinage des navires, lequel l'amène à l'examen du mouvement des corps rigides dans les fluides résistants, et le voilà de nouveau qui retombe de l'hydro-dynamique dans la théorie des équations différentielles.»

l'excellence de ses relations avec l'empire des tsars. Sa demeure ayant souffert de l'occupation étrangère, les autorités russes s'empressèrent de le dédommager largement. On souhaitait son retour à Saint-Pétersbourg. Euler le désirait malgré certains souvenirs pénibles, malgré aussi son âge dont il lui était arrivé de faire état déjà avant la cinquantaine. Toutes les grandes découvertes mathématiques, écrivait-il, sont le fait d'hommes jeunes... Mais la situation à l'Académie de Berlin et ses rapports avec le roi le satisfaisant de moins en moins, il finit par obtenir un congé, d'abord refusé, et finalement accordé le plus sèchement qu'il était possible: «Je vous permets, se bornait à écrire Frédéric, sur votre lettre du 30 avril dernier, de quitter pour aller en Russie.» Euler, accompagné des siens – dix-huit personnes en tout – quitta donc la Prusse pour un nouveau et dernier séjour à Saint-Pétersbourg. C'était en 1766, quatre ans après l'accession au trône de l'impératrice Catherine II.

A peine arrivé, la cataracte lui enleva l'usage de son œil valide. Une opération tentée ne fit que lui donner de faux espoirs et d'atroces douleurs. Mais cette épreuve, loin de le détourner de son œuvre, accrut encore ses facultés de concentration. Selon Spiess, sur les 800 publications d'Euler connues en 1929 la moitié proviendrait des dix-sept dernières années passées à Saint-Pétersbourg dans la quasi-cécité.[1] C'est ici qu'il dicta à un ancien compagnon tailleur son manuel classique d'**Algèbre**, à la clarté, à la limpidité proverbiale, qui mit le secrétaire improvisé en état de résoudre seul les problèmes les plus difficiles.

C'est ici encore qu'un autre artisan modeste, Bâlois comme lui, le tira des flammes lors de l'incendie de 1771 qui réduisit en cendres cinq cents maisons de la capitale.

En dépit de telles épreuves, et de deuils successifs [2], la fin de cette vie apparaît sereine. De ses 13 enfants, seuls trois lui survécurent, mais le bon patriarche pouvait s'enorgueillir de 26 petits-enfants. L'impératrice lui témoignait des égards. Les dernières découvertes scientifiques (celle de la planète Uranus par Herschel en 1781) le passionnent, comme le captivent les premiers exploits des montgolfières, qui lui donnent l'occasion de réaliser une intégration difficile.

Ecoutons Condorcet, au terme de son **Eloge** de Léonard Euler: «Le 18 septembre 1783, après s'être amusé à calculer sur une ardoise les lois du mouvement ascensionnel des machines aérostatiques dont la découverte occupait alors toute l'Europe, il dîna (...) avec sa famille, parla de la planète d'Herschel et des calculs qui en déterminent l'orbite; peu de temps après il fit venir son petit-fils avec lequel il badinait en prenant quelques tasses de thé, lorsque tout à coup la pipe qu'il tenait à la main lui échappa, et il cessa de calculer et de vivre.»

---

[1] Le langage du XVIIIe siècle formulait ainsi son admiration: «Privé de la lumière du jour, ce nouveau Tirésias a percé mieux que jamais jusqu'au fond des abîmes qu'offre l'immensité de la nature à ceux qui veulent la soumettre aux lois du calcul.»

[2] En 1773 il perdit sa femme. Il épousa la demi-sœur de celle-ci trois ans plus tard.

A l'intention de tous les praticiens – modestes ou sublimes – des mathématiques, nous ne résistons pas à la tentation de terminer cet article par une page de F. le Lionnais:

«S'il fallait admettre, avec Baudelaire, que le génie se reconnaît à la création de nouveaux poncifs, Euler mériterait d'être inscrit en tête du palmarès des mathématiciens. (...) C'est à lui que les étudiants doivent l'usage de désigner les sommets des triangles par les majuscules: *A, B, C,* et les côtés opposés par les minuscules correspondantes: *a, b, c.* C'est lui qui, avec Simpson, introduisit les abréviations courantes: *sin, cos, tg,* qui servent à désigner les fonctions trigonométriques: sinus, cosinus, tangente. C'est lui qui, en 1734, eut l'idée d'exprimer, à l'aide du symbole: $f(x)$, la relation qui établit une correspondance fonctionnelle, parfois bien mystérieuse, entre deux variables y et x, dont la première dépend de la seconde: $y = f(x)$. C'est lui qui a, pour la première fois, employé l'expression: «Analyse infinitésimale» qui évoque cette discipline plus clairement que les termes techniques de «Calcul différentiel et intégral». C'est lui qui, en 1731, dans une lettre à Goldbach, a baptisé le nombre **e**. Et, si ce n'est pas Euler lui-même qui a donné son nom au nombre π, il a, en tout cas, adopté cette notation et l'a fait triompher dans le monde entier. Il est aussi le premier qui ait employé le terme «élimination» dans la théorie des équations algébriques simultanées. Aussi, n'est-il pas possible de faire des mathématiques, élémentaires ou supérieures, sans rencontrer à chaque tournant le nom de cet homme étonnant. *Identité d'Euler, Constante d'Euler, Formule sommatoire d'Euler, Théorème d'Euler, Equations d'Euler, Méthode d'Euler, Transformation d'Euler, Intégrales eulériennes, Droite d'Euler, Cercle d'Euler, Angles d'Euler,* on n'en finirait pas si l'on voulait énumérer toutes les citadelles auxquelles ce conquérant a laissé son nom.»

Publications consultées

Euler, Léonard: *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie. Opera omnia,* 3e série, t. 11-12. Zurich 1960.

Euler, Léonard: *Correspondance* avec A.C. Clairaut, J. d'Alembert et J.L. Lagrange... *Opera omnia,* 4e série A, t. 5. Bâle 1980.

Fuss, Nicolas: *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler* (23. Oktober 1783 – publ. Bâle 1786). Repris ds *Opera omnia,* 1re série, t. 1. Leipzig-Berlin 1911.

Condorcet, Antoine-Nicolas de: *Eloge de M. Euler* (Paris 1786). Repris dans *Opera omnia,* 3e série, t. 12, Zurich 1960.

Spiess, Otto: *Leonhard Euler. Ein Beitrag zur Geistesgeschichte des XVIII. Jahrhunderts.* Huber, Frauenfeld 1929. Coll. Die Schweiz im deutschen Geistesleben 63/64.

Speiser, Andreas: *Die Basler Mathematiker.* 117. Neujahrsblatt, Ges. zur Beförderung des Guten u. Gemeinnützigen. Basel 1939.

Le Lionnais, F.: *Euler mathématicien-protée.* Ds *Images de la Suisse.* «Les Cahiers du Sud», 3e éd. Marseille 1943, p. 139-153.

Fueter, Rudolf: *Leonhard Euler. Kurze Mathematiker-Biographien.* Suppl. no 3 à la «Revue de mathématiques élémentaires». Birkhäuser Basel, janv. 1948.

Ackeret, Jakob: *Eulers Arbeiten über Turbinen und Pumpen.* Vorrede *Opera omnia*, 2e série, t. 15. Zurich 1957.
Winter, E. etc.: *Die deutsch-russische Begegnung und Leonhard Euler. Beiträge zu den Beziehungen zwischen der deutschen und der russischen Wissenschaft und Kultur im 18. Jahrhundert.* Akademie-Verlag Berlin 1958.

A lire en français:

Du Pasquier, L.G.: *Léonard Euler et ses amis,* Paris 1927.

L'œuvre d'Euler en chiffres

La publication des œuvres complètes d'Euler fut décidée en 1907 sous la responsabilité de la Société helvétique des Sciences naturelles. Il aura fallu trois quarts de ce XXe siècle pour que paraissent les 79 volumes in-quarto de cette édition:

Series Prima	*Opera mathematica*	30 volumes
Series Secunda	*Opera mechanica et astronomica*	32 volumes
Series Tertia	*Opera physica, miscellanea*	12 volumes
Commercium Epistolicum		5 volumes

Une anecdote sur Euler et Diderot

Invité par la Grande Catherine à visiter sa cour, Diderot consacrait ses loisirs à essayer de convertir les courtisans à l'athéisme. Avertie, l'impératrice chargea Euler de museler le philosophe. De Morgan raconte: «Diderot fut avisé qu'un mathématicien de talent possédait une démonstration algébrique de l'existence de Dieu et l'exposerait devant la cour, s'il désirait l'entendre; Diderot accepta avec plaisir. Euler s'avança vers Diderot et lui dit gravement, sur un ton de parfaite conviction: «Monsieur, $\frac{A+b^n}{n} = x$; donc Dieu existe: répondez!» Humilié du fou rire qui salua son silence embarrassé, Diderot demanda la permission à Catherine de retourner en France.»

D'après E.T. Bell – Les grands mathématiciens
De Morgan – Sac de paradoxes

Léonard Euler est-il connu à l'école primaire?

par Roger Délez, SRP - Genève

Dans quel but ai-je pris la plume pour parler de Léonard Euler?

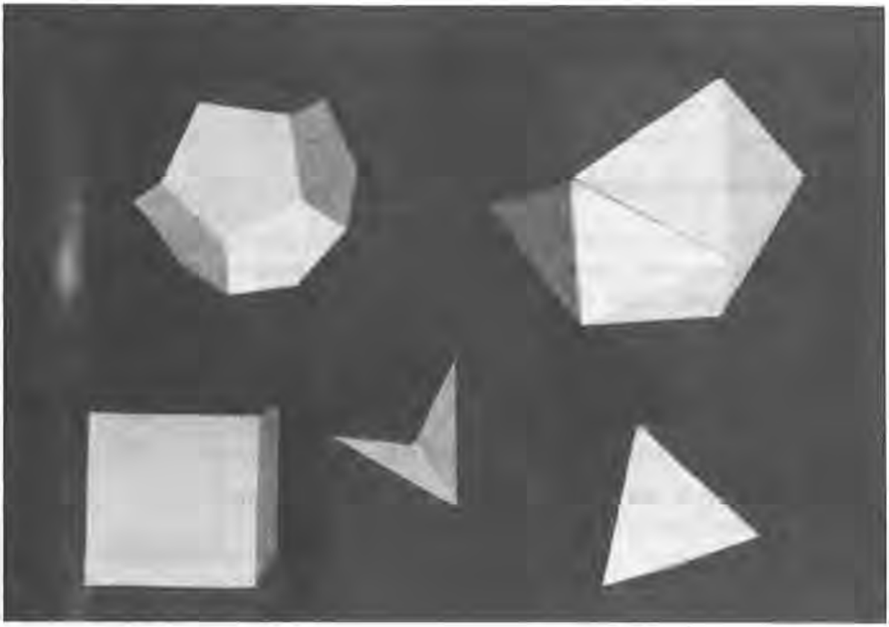
- Serait-ce pour chanter: «Y'en a point, y'en a point comme nous»?
- Non, évidemment.

C'est tout simplement pour montrer combien ce mathématicien de génie a marqué son époque et influence encore la nôtre.

Sur la base de deux activités mathématiques que j'ai menées dans des classes, j'ai pu appréhender la joie des enfants qaund ils trouvent un raisonnement, une idée, une généralisation qui porte le nom d'un grand savant.

Pour prouver une fois de plus l'impact laissé par Euler et ses découvertes, je me suis permis d'illustrer mon propos d'une série d'articles qui sont à la fois historiques, mathématiques et de vulgarisation.

Pour ceux qui seraient tentés de lancer en classe les activités proposées dans cet article, je souhaite pouvoir répondre à leur souhait d'en savoir davantage grâce à la documentation proposée.

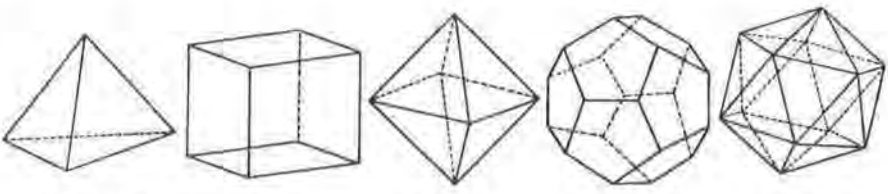


Jetons d'abord un premier regard sur les solides platoniciens et imprégnons-nous de la prose de Platon dans le Timée, 54c - 55d.

... la première espèce a pour élément le triangle, dont l'hypothénuse est deux fois plus longue que le plus petit côté. Si l'on accouple une paire de ces triangles par la diagonale et qu'on fasse trois fois cette opération, de manière que les diagonales et les petits côtés coïncident en un même point comme centre, ces triangles, qui sont au nombre de six, donnent naissance à un seul triangle, qui est équilatéral. Quatre de ces triangles équilatéraux réunis selon trois angles plans forment un seul angle solide, qui vient immédiatement après le plus obtus des angles plans. Si l'on compose quatre angles solides, on a la première forme de solide, qui a la propriété de diviser la sphère dans laquelle il est inscrit en parties égales et semblables. La seconde espèce est composée des mêmes triangles. Quand ils ont été combinés pour former huit triangles équilatéraux, ils composent un angle solide unique, fait de quatre angles plans. Quand on a construit six de ces angles solides, le deuxième corps se trouve achevé. Le troisième est formé de la combinaison de deux fois soixante triangles élémentaires, c'est-à-dire de douze angles solides, dont chacun est enclos par cinq triangles plans équilatéraux, et il y a vingt faces qui sont des triangles équilatéraux. Après avoir engendré ces solides, l'un des triangles élémentaires a été déchargé de sa fonction, et c'est le triangle isocèle qui a engendré la nature du quatrième corps. Groupés par quatre, avec leurs angles droits se rencontrant au centre, ces isocèles ont formé un quadrangle unique équilatéral. Six de ces quadrangles, en s'accolant, ont donné naissance à huit angles solides, composés chacun de trois angles plans droits, et la figure obtenue par cet assemblage est le cube, qui a pour faces six tétragones de côtés égaux. Il restait encore une cinquième combinaison. Dieu s'en est servi pour achever le dessin de l'univers.

Histoire des mathématiques
Cf. Routes et Dédales - Sciences - Axes - Etudes Vivantes p. 48.

Reprenons ces polyèdres réguliers et analysons ce qu'en dit André Warusfel dans «Les nombres et leurs mystères» Editions Seuil, Points p. 115 à 118.



TETRAEDRE CUBE OCTAEDRE DODECAEDRE ICOSAEDRE

«Il était naturel de se demander si n'existaient pas dans l'espace des polyèdres réguliers analogues aux polygones du plan. Il y en a, mais en nombre limité: cinq seulement. Là encore, les Grecs avaient fait de nombreuses recherches à ce sujet et, très frappés par le fait qu'il n'y en avait que cinq, leur avaient supposé des propriétés magiques. En particulier, ils bâtirent sur eux tout leur système du monde planétaire, système qui reste admis comme vérité fondamentale jusqu'à Kepler.

Le tableau suivant résume leurs caractéristiques»:

Symbole	Noms	Nombre de faces F	Nombre d'arêtes A	Nombre de sommets S	Nature des faces
T	Tétraèdre	4	6	4	P_3 = triangle équilatéral
C	Cube	6	12	8	P_4 = carré
O	Octaèdre	8	12	6	P_3 = triangle équilatéral
D	Dodécaèdre	12	30	20	P_5 = pentagone
I	Icosaèdre	20	30	12	P_3 = triangle équilatéral

Remarquons que l'on a toujours, entre les nombres entiers F, A et S, la relation connue sous le nom de relation d'*Euler*, valable pour tout polyèdre convexe:

$$F + S = A + 2,$$

(nombre de faces + nombre de sommets = nombre d'arêtes + 2). Par exemple, pour le cube, on a 8 + 6 = 12 + 2.

Nous donnons, dans la page ci-contre plusieurs vues de ces polyèdres, surtout du dodécaèdre et de l'icosaèdre, moins connus. Dans ces schémas, des sections et des rectangles d'or pullulent, ainsi que des propriétés géométriques remarquables. Pour ne prendre qu'un exemple, le dodécaèdre posé sur une arête est tout à fait intéressant.

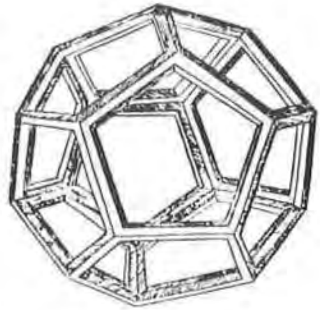
Les polyèdres réguliers convexes jouissent d'une propriété remarquable. Le polyèdre dont les sommets sont les centres des faces d'un polyèdre régulier est lui-même régulier.

Ainsi, les centres des faces d'un T sont les sommets d'un T
» » C » » O
» » O » » C
» » D » » I
» » I » » D

et l'on voit que les polyèdres peuvent être rassemblés en trois familles: le tétraèdre T, le couple (cube-octaèdre) CO, et le couple (dodécaèdre-isosaèdre) DI.

«Dans une même famille, on passe par cette méthode de l'un à l'autre polyèdre.

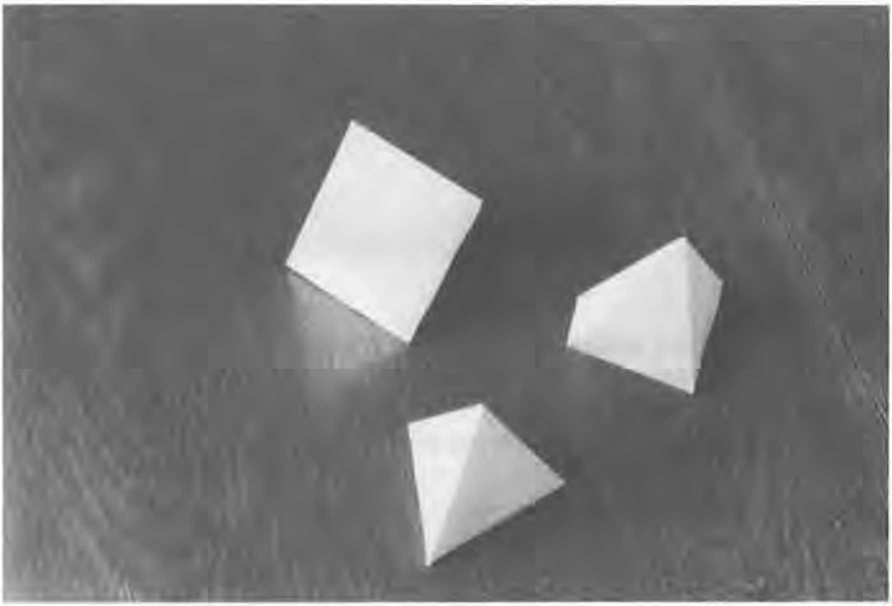
Notons rapidement que les relations entre familles différentes sont bien plus complexes. Par exemple, un cube arbitraire est inscriptible dans un dodécaèdre, etc... Enfin disons qu'il existe des polyèdres semi-réguliers beaucoup plus complexes. Léonard de Vinci s'en est préoccupé. Nous illustrons par un remarquable dessin de sa main, représentant un dodécaèdre creusé.»



Grâce à l'article d'André Warusfel, profitons d'exposer succintement une «situation mathématique» nous permettant de déboucher sur «La Relation d'Euler».

Cette activité se pratique aisément en 5e et 6e années primaires.

Les polyèdres



Collection à compléter...

Consigne:

Construire d'autres polyèdres convexes formés uniquement de faces triangulaires équilatérales.

a) Recherche et expérimentation

Seul le tâtonnement fait prendre conscience de la nécessité d'avoir quatre faces au moins pour fermer le solide.

Dans une première phase la majorité des élèves réalise un tétraèdre.

Après quelques constructions de polyèdres, les élèves émettent l'hypothèse que le nombre de faces triangulaires sera toujours un nombre pair.

Pour l'élève, la démonstration à l'aide du matériel est satisfaisante; il constate qu'il reste un vide correspondant à une face lorsqu'on assemble un nombre impair de faces.

Est-ce toujours vrai?

Au cours d'une autre séance, Florence qui a construit le décaèdre, déduit qu'il est nécessaire d'ajouter deux faces (pas n'importe comment) pour créer le polyèdre suivant; elle poursuit par analogie.

Parallèlement, la mise en évidence des propriétés de chaque polyèdre permet d'élaborer le tableau suivant:

Nom du polyèdre	Nombre de faces	Nombre de sommets	Nombre d'arêtes
tétraèdre	4	4	6
hexaèdre	6	5	9
octaèdre	8	6	12
décaèdre	10	7	15
⋮	⋮	⋮	⋮

Sur la base de ce tableau, nombreux sont les élèves qui constatent les relations qui existent entre Faces - Sommets - Arêtes, ce qui est l'occasion de découvrir la Relation d'Euler et de faire connaissance avec ce mathématicien suisse mondialement connu.

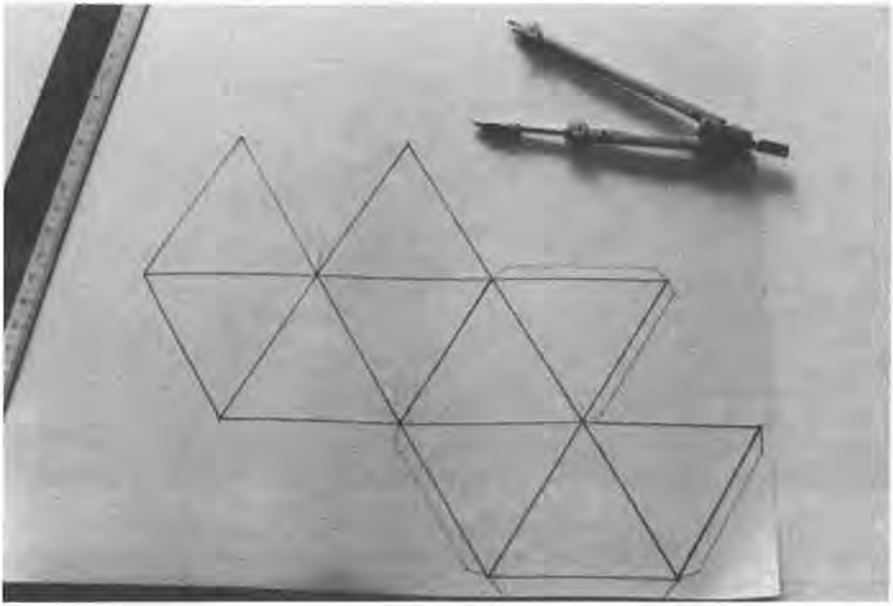
Il ne suffit pas de continuer ce tableau selon les régularités observables.

La confrontation du modèle au réel est indispensable et doit passer par la construction. Dans ce cas, le modèle, plus riche que le réel, nous réserve des surprises.

L'étonnement fait partie de l'apprentissage!

Une nouvelle piste de travail consiste à dessiner le développement de chaque polyèdre avec le nombre minimum d'onglets.

Ce nombre est-il le même pour chaque développement?



b) Mise en ordre

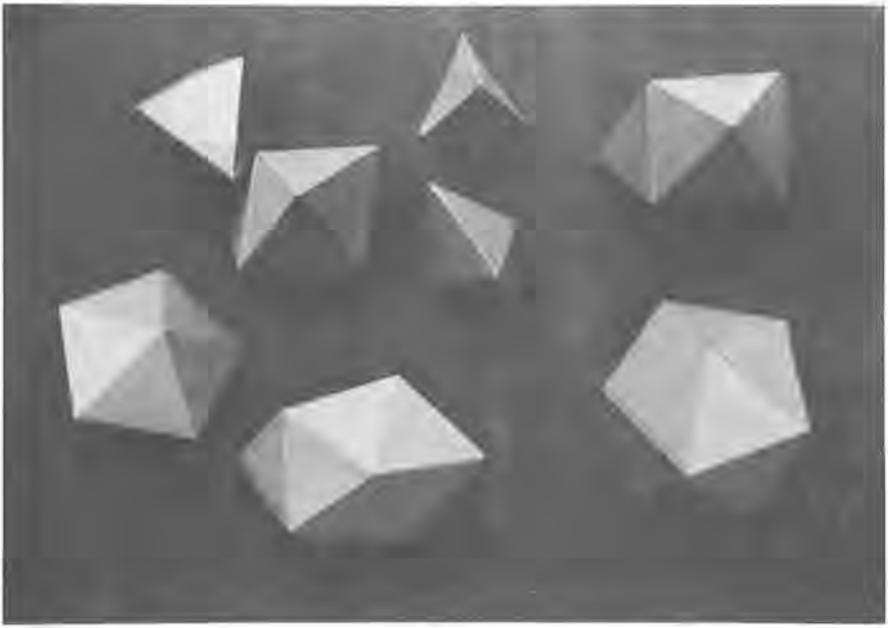
Cette activité est caractérisée par une démarche qui fait intervenir en priorité le travail de la main et qui exige une observation soutenue.

A partir de la construction de solides, cette faculté d'observation donne l'occasion de vérifier, confirmer ou réfuter les hypothèses qui ont précédé la production.

Les comparaisons, les mises en relation des objets entre eux ont contribué à mettre en évidence des propriétés et leur rôle fondamental, par exemple: notions d'angle, de sommet, d'arête, de convexité, de régularité des volumes.

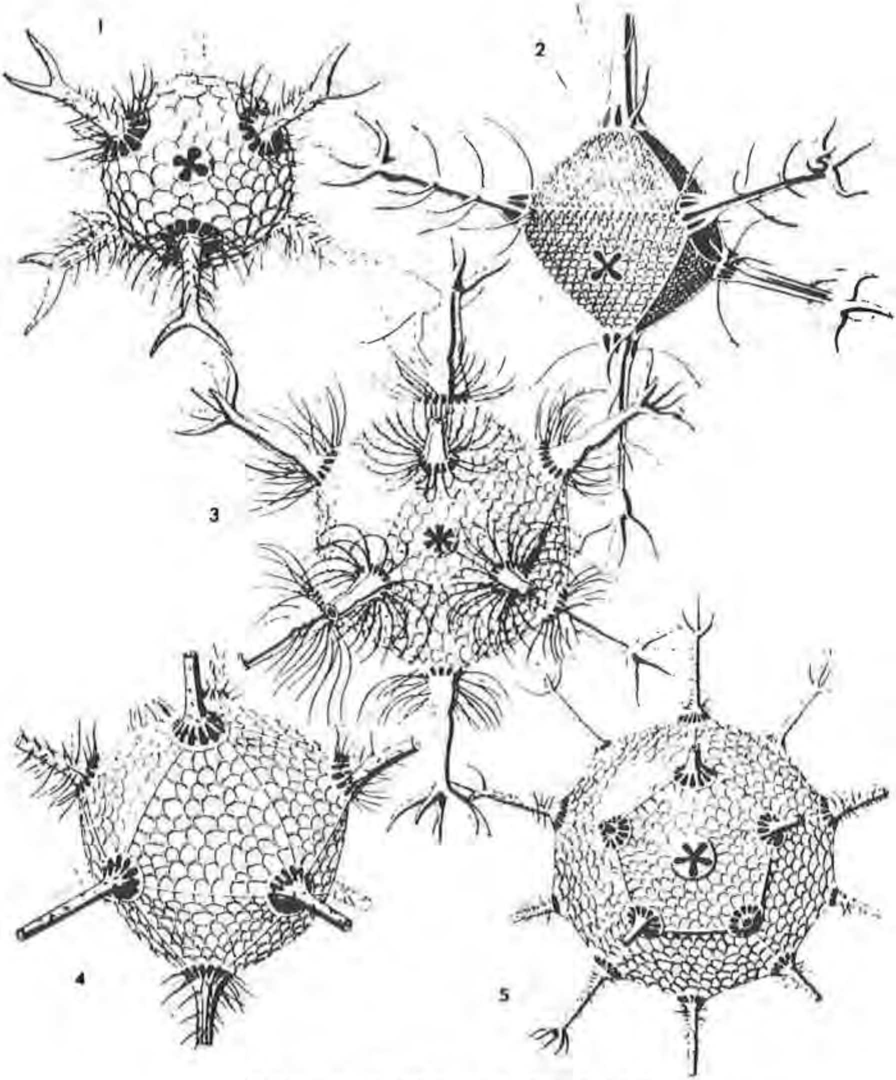
Ce travail de longue haleine a favorisé une maîtrise dans les domaines du volumes, du plan, de la construction géométrique, de l'utilisation des instruments.

Après le temps réservé à l'expérimentation, les enfants sont prêts à structurer un certain nombre de notions importantes. Ces notions pouvant faire l'objet d'une ou de plusieurs leçons systématiques.



Dans un article intitulé «**Un zoo mathématique peuplé d'extravagantes créatures, réelles ou imaginaires**» (Cf. Jeux mathématiques par Martin Gardner, Pour la Science 1977-79), nous pouvons retenir quelques passages importants qui nous remettent en présence de Leonhard Euler. Ces passages nous permettent aussi de décloisonner un peu l'enseignement des mathématiques vers le domaine de la biologie.

On n'a jamais pensé à consacrer un zoo aux animaux présentant des caractéristiques intéressantes pour les mathématiciens amateurs. Pourtant, un tel zoo serait à la fois amusant et instructif. dans mon esprit, il serait divisé en deux galeries: l'une consacrée aux animaux vivants, l'autre aux créatures imaginaires. Les directeurs de ce «zoo mathématique» seraient informés des nouvelles acquisitions par une publication appelée



1. Squelettes de radiolaires, par Ernst Haeckel

ZOONOOZ avec la permission de la Société Zoologique de San Diego qui publie un bulletin périodique sous ce titre, un titre qui se lit non seulement dans les deux sens mais également renversé.

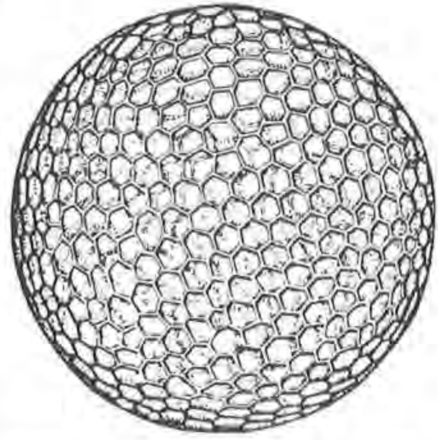
Dans l'une des salles de la galerie des animaux vivants, des microscopes permettraient d'observer les organismes trop petits pour être vus à l'œil nu. On y découvrirait les étonnantes symétries géométriques des radiolaires, ces êtres unicellulaires qui peuplent la mer. Leur squelette de silice imbriqué est, dans le monde biologique, ce qui se rapproche le plus des formes des cristaux de neige. Dans sa *Monograph of the Challenger Radiolaria* (Monographie des radiolaires de l'expédition du Challenger), le biologiste allemand Ernst Haeckel décrit des centaines d'espèces de radiolaires qu'il a découvertes durant l'expédition du Challenger entre 1872 et 1876. Ce livre contient 140 planches de dessins où la qualité de reproduction des détails géométriques de ces magnifiques formes imbriquées reste inégalée.

La figure 1, extraite du livre de Haeckel, est d'un grand intérêt pour les mathématiciens. Le premier radiolaire est sphérique mais ses six protubérances forment les sommets d'un octaèdre régulier. Le deuxième squelette contient le même solide en son centre. Le troisième est un icosaèdre régulier (20 faces). Le cinquième est un dodécaèdre (12 faces). D'autres planches du livre de Haeckel montrent des radiolaires de formes approximativement cubiques et tétraédriques.

Il est bien connu qu'il n'existe que cinq solides platoniciens dont trois ont des faces constituées par des triangles équilatéraux. Ce qui est moins connu c'est l'infinité de solides semi-réguliers dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Ils sont appelés «deltaèdres» car leurs faces ressemblent à la lettre grecque delta. Huit seulement de ces deltaèdres sont convexes: ce sont ceux à 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 et 20 faces. L'absence du deltaèdre convexe à 18 faces est mystérieuse. Si l'on peut presque démontrer qu'il devrait exister, il n'est pas facile, en revanche, de montrer pourquoi il ne peut exister. Aussi incroyable que cela paraisse, le fait qu'il n'existe que huit deltaèdres convexes n'est connu que depuis 1947, date à laquelle B. L. van der Waerden et Hans Freudenthal en publièrent la démonstration.

Le deltaèdre à quatre faces est le tétraèdre régulier, le plus simple des solides platoniciens. Le deltaèdre à six faces est constitué de deux tétraèdres ayant une face commune. Regardez le quatrième radiolaire de la planche de Haeckel. C'est un deltaèdre à dix faces ou plutôt un deltaèdre légèrement dilaté vers une forme sphérique. **Vous serez peut-être surpris d'apprendre qu'il existe deux deltaèdres à huit faces topologiquement distincts. L'un d'eux est l'octaèdre régulier bien connu. Pourrez-vous construire l'autre (il n'est pas convexe)** avant de regarder la solution en fin de chapitre.

Bien souvent, il semblerait que la surface des radiolaires soit recouverte d'un réseau d'hexagones réguliers. Cette régularité est particulièrement frappante chez l'*Aulonia hexagona (voir figure 2).* Ces réseaux sont appelés «cartes régulières» lorsque chaque cellule du réseau possède le même nombre de côtés et quand le même nombre de côtés se rejoignent à chaque nœud. Imaginez que l'on gonfle, comme un ballon, un tétraèdre, un octaèdre ou un icosaèdre, mais que leurs arêtes restent des lignes inscrites sur la sphère obtenue. Le tétraèdre forme alors une carte régulière de triangles où trois côtés concourent en chaque nœud; l'octaèdre forme une carte composée de triangles où quatre côtés concourent en chaque nœud.



2. *Un radiolaire «hexagonal»*, L'Aulonia Hexagona

L'Aulonia hexagona pose une question intéressante: est-il possible de recouvrir une sphère avec une carte régulière d'hexagones où trois côtés concourraient en chaque nœud? Seules nous intéressent les propriétés topologiques de la carte: les hexagones n'ont pas besoin d'être réguliers ni même convexes; vous pouvez leur donner n'importe quelle taille et n'importe quelle forme; leurs côtés peuvent être tordus ou courbés à votre guise, aux seules conditions qu'ils ne se recoupent pas et qu'il n'y en ait que trois qui soient concourants en chaque nœud.

La réponse est non et il n'est pas difficile de démontrer cette impossibilité grâce à la célèbre formule découverte par Leonhard Euler et applicable aux squelettes de tous les polyèdres simplement connexes (sans trous). Cette formules s'écrit $F + S - A = 2$ où les lettres représentent dans l'ordre le nombre des faces, le nombre des sommets et le nombre des arêtes. Tous ces polyèdres pouvant être gonflés pour former une sphère, la formule s'applique aux cartes régulières de la sphère. Dans le chapitre 13 de *Enjoyment of Mathematics* (Plaisir des mathématiques), de Hans Rademacher et Otto Toeplitz, vous verrez comment on peut utiliser la formule d'Euler pour démontrer qu'il est impossible de dessiner plus de quatre cartes régulières sur une sphère et que, par conséquent, il ne peut exister plus de cinq polyèdres réguliers convexes. La deuxième question, à laquelle je répondrai en fin de chapitre, est la suivante: **pouvez-vous démontrer, à l'aide de la formule d'Euler, qu'il est impossible de dessiner sur la sphère une carte régulière d'hexagones?**

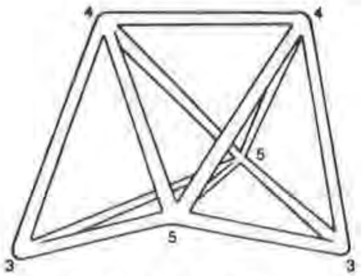
D'Arcy Wentworth Thompson, dont le livre classique *On Growth and Form* (Forme et Croissance) comporte un excellent chapitre sur les radiolaires, aimait à raconter l'histoire du biologiste qui prétendait avoir vu un radiolaire sphérique recouvert d'une carte régulière d'hexagones. «Mais, avait objecté Thompson, Euler a démontré que c'est impossible». Et le biologiste de répliquer: «Cela démontre la supériorité de Dieu sur les mathématiques».

Dans un essai dont j'ai extrait cette ânecdote, Warren S. McCulloch écrit: «Il s'avère que la démonstration d'Euler était correcte et que l'observation était erronée. Auraient-elles été toutes deux correctes, loin de prouver la supérioté de Dieu sur la logique, elles auraient troublé son esprit en l'enfermant dans une contradiction.» Si vous examinez soigneusement la figure représentant l'*Auliona hexagona,* vous remarquerez que beaucoup de cellules comportent plus, ou moins, de six côtés.

Dans la salle de notre zoo consacrée au monde microscopique, le microscope électronique révélerait de nombreux virus dont on a découvert récemment qu'ils cristallisaient en macromolécules en forme d'icosaèdres réguliers: le virus de la rougeole, le virus de l'herpès, le triola iridescent et bien d'autres virus peu sympathiques. Il se peut qu'il existe des dodécaèdres, mais autant que je sache, cela n'est pas encore confirmé.

Solutions

La figure 3 illustre la réponse au premier problème de ce chapitre: un deltaèdre à huit faces (toutes étant des triangles équilatéraux), qui ne soit pas un octaèdre régulier. Dans l'octaèdre régulier, chaque sommet est à l'intersection de quatre arêtes; en revanche dans ce solide, deux sommets sont à l'intersection de trois arêtes, deux à l'intersection de quatre arêtes et deux à l'intersection de cinq arêtes.



3. L'«autre» deltaèdre à huit faces

Le deuxième problème concernait l'utilisation de la formule d'Euler $F + S - A = 2$ pour démontrer qu'aucune sphère ne pouvait être recouverte d'une «carte régulière» formée d'hexagones, chaque sommet étant à l'intersection de trois arêtes. Supposons qu'une telle carte existe. Chaque hexagone possède six sommets et six arêtes; par conséquent, si les hexagones n'avaient en commun aucun sommet ni aucune arête, il y aurait six fois plus d'arêtes que de faces. Comme chaque sommet est commun à trois faces, le nombre de sommets S doit être $6\,F\,/\,3$ (F étant le nombre de faces). De même chaque arête est commune à deux faces; donc le nombre d'arêtes A dans une telle carte doit être $6\,F\,/\,2$. Introduisons ces valeurs dans la formule d'Euler, ce qui donne l'équation

$$F + 6\,F\,/\,3 - 6\,F\,/\,2 = 2,$$

qui se simplifie en:

$$F + 2F - 3F = 2,$$

c'est-à-dire $0 = 2$. Cette contradiction démontre que l'hypothèse initiale était fausse.

A tout polyèdre régulier, nous pouvons faire correspondre une carte régulière. Précédemment, nous avons montré qu'une sphère ne pouvait être recouverte avec une carte régulière formée d'hexagones; que se passe-t-il si nous appliquons ce même raisonnement avec des cartes formées de triangles, de carrés et de pentagones réguliers? Avec une carte formée de triangles, il existe trois possibilités selon que chaque sommet est à l'intersection de 3, 4, ou de 5 arêtes; les valeurs respectives de F sont alors 4, 8 et 20 correspondant au tétraèdre, à l'octaèdre et à l'isocaèdre. Avec une carte formée de carrés il n'existe qu'une seule possibilité (F est égal à 6, ce qui correspond au cube) et de même pour une carte formée de pentagones réguliers (F est égal à 12, correspondant au dodécaèdre). Ainsi nous avons démontré qu'il n'existe pas plus de cinq polyèdres réguliers.

A l'école primaire, nous avons déjà fait une première fois connaissance avec Leonhard Euler grâce aux polyèdres. Nous pouvons l'approcher dans une autre activité: LE PAYS DE COCAGNE.

CARTE DU PAYS DE COCAGNE

Consigne

Parcourir successivement les 7 régions du Pays de Cocagne en ne passant qu'une seule fois sur chaque pont.

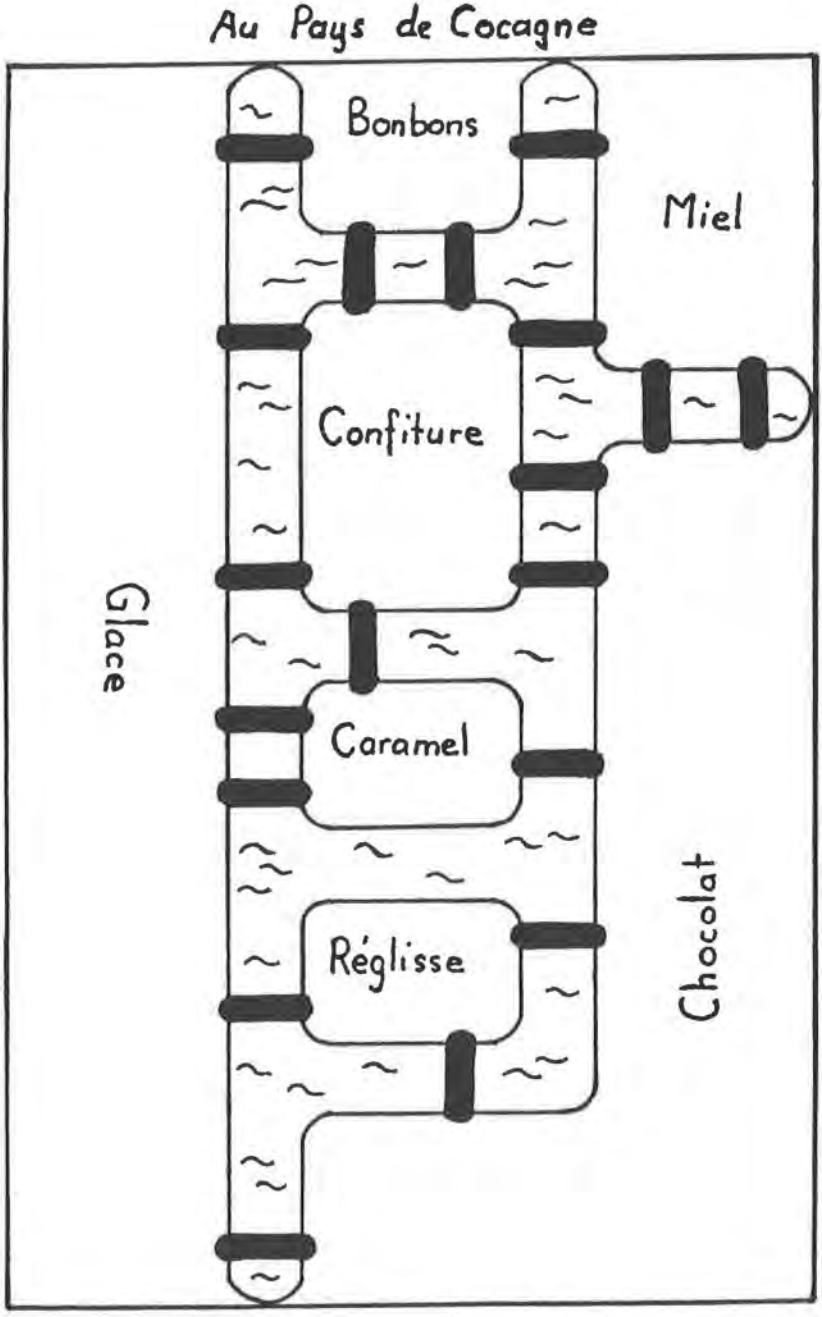
Organisation du jeu

Matériel: une carte du Pays des allumettes.

Mettre les 19 ponts (allumettes) en place et les enlever un par un au fur et à mesure qu'ils sont franchis:

à la fin du parcours gagnant, il ne doit pas rester un seul pont sur le jeu.

SRP - Genève - Août 1980


Au Pays de Cocagne
Bonbons
Miel
Confiture
Glace
Caramel
Réglisse
Chocolat

– Cette activité est en relation étroite avec les ponts de Königsberg qui illustrent notre publication Math-Ecole depuis le numéro 102.

  Voir aussi Méthodologie romande (nouvelles éditions):

  3P Réseau eulériens
  DE Act. 1 p. 276 à 282

  4P Réseaux eulériens
  DE Act. 1 p. 245 à 248

Historiquement, quelle relation existe entre Leonhard Euler et les ponts de Königsberg? Nous laissons la plume à Harry R. Lewis et Christos H. Papadimitriou dans un remarquable article publié dans «Les progrès des mathématiques», pour La Science, diffusion Belin.

L'efficacité des algorithmes

Certains problèmes de mathématiques ne peuvent être résolus que par des méthodes trop lentes pour les ordinateurs, même les plus rapides. On n'a pas trouvé jusqu'ici des méthodes plus efficaces, ce qui ne veut pas dire, toutefois, qu'il n'en existe pas.

Plusieurs algorithmes peuvent conduire à la solution d'un problème donné. Aux Etats-Unis, par exemple, les enfants ont une méthode de soustraction légèrement différente de celle enseignée en France et pourtant les deux algorithmes de soustraction donnent le même résultat dans le même temps. Ce n'est pas toujours le cas: il existe un problème célèbre, qu'on peut résoudre avec un algorithme «rapide» ou avec un algorithme «lent»: c'est le problème des ponts de Könisgberg.

Au 18e siècle, dans la ville allemande de Königsberg (devenue la ville soviétique de Kaliningrad), on a aménagé un parc sur les rives du Pregolia et sur deux îles de ce fleuve. Dans l'enceinte de ce parc, sept ponts reliaient entre elles les îles et les rives de la rivière. Cette structure avait permis, à l'époque d'Euler, de poser un problème amusant: quel itinéraire choisir pour traverser le parc en empruntant chacun des pont une fois et une seule?

La surface ou la forme des îles et la longueur des ponts importaient peu pour résoudre ce problème; ce qu'il était nécessaire de connaître, c'était la disposition des ponts relativement aux îles et aux berges. Cette information est représentée de façon condensée dans ce que les mathématiciens appellent un graphe, c'est-à-dire un simple ensemble de points reliés entre eux par des lignes. Dans le cas du parc de Königsberg, les rives et les îles sont représentées par des points et les ponts par des lignes reliant les points. Le graphe comprend donc quatre points et sept lignes. Si on désigne les lignes par des lettres, un chemin à travers le graphe est caractérisé par une suite de lettres.

La méthode évidente pour résoudre le problème consiste à dresser la liste des chemins passant par tous les ponts et à éliminer ceux qui traversent un pont plus d'une fois. C'est la technique de la recherche exhaustive, semblable à celle appliquée au problème du voyageur de commerce. Le mathématicien Leonhard Euler, quand il fut confronté au problème des ponts de Königsberg, perçut le caractère limité de cette méthode bestiale et en trouva une autre. Pour commémorer la contribution d'Euler à ce problème, on désigne maintenant par chemin eulérien un chemin qui passe par chaque ligne d'un graphe, une fois et une seule.

Comme l'écrivit Euler, «pour résoudre le problème particulier des sept ponts de Königsberg, on dresse un tableau de tous les chemins possibles et on relève alors par simple inspection, celui, s'il existe, qui satisfait aux conditions imposées. Cette méthode est cependant trop fastidieuse et trop difficile, en raison du grand nombre de combinaisons possibles, sans compter qu'elle deviendrait inapplicable dans le cas où il y aurait davantage de ponts.»

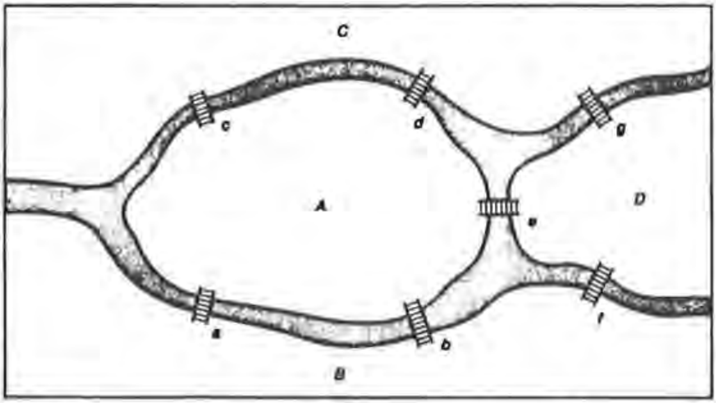
La méthode proposée par Euler est beaucoup plus simple. Il démontre qu'un itinéraire ayant les propriétés requises existe, à condition que le graphe remplisse deux critères. En premier lieu, il doit être possible d'aller d'un point du graphe à un autre en suivant les lignes du graphe; en d'autres termes, le graphe ne doit pas présenter de rupture. En deuxième lieu, tous les points du graphe, sauf deux au plus, doivent se trouver à la jonction d'un nombre pair de lignes.

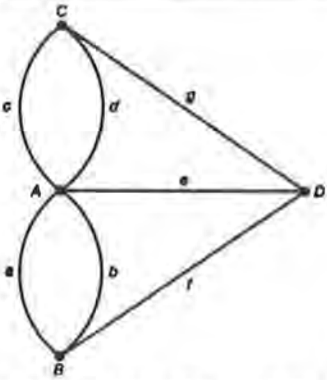
Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi un graphe ne satisfaisant pas à ces conditions ne peut comporter de chemin eulérien. Toutes les parties du graphe doivent être reliées entre elles pour qu'il puisse exister un chemin passant par toutes les lignes. Un nombre pair de lignes doit se joindre en chaque point: en effet, la moitié des lignes est nécessaire pour arriver à ce point et l'autre moitié pour en repartir. Il peut y avoir deux points où se croisent un nombre impair de lignes à condition que ceux-ci soient les points de départ et d'arrivée de l'itinéraire. Pour prouver qu'un graphe remplissant ces deux conditions comporte effectivement un chemin eulérien, il faudrait recourir à une démonstration plus compliquée. Euler l'a fait de façon rigoureuse, mais nous ne nous y attarderons pas ici.

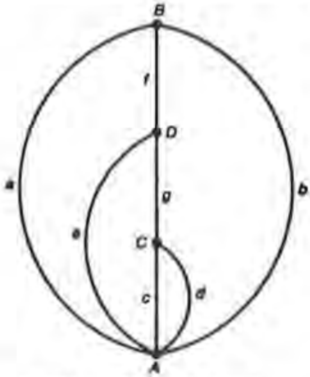
Il est facile d'exprimer la solution d'Euler à ce problème par un algorithme qui peut être traité par ordinateur. La première condition, la connexité, est remplie si l'on commence par marquer un point du graphe, puis les autres points reliés à lui par des lignes, puis tous les points reliés aux points nouvellement marqués, etc. Le graphe est connexe si, à la fin de l'opération, tous les points sont marqués. La deuxième condition est tout aussi facilement vérifiable: on demande à l'ordinateur de considérer chaque point du graphe et de compter le nombre de lignes se terminant en ce point. S'il n'y a pas plus de deux points présentant un nombre impair de telles lignes, on peut dire qu'il existe un chemin eulérien dans le graphe. Le parc de Königsberg satisfait à la première condition, mais pas à la seconde; il n'y a donc pas de chemin eulérien reliant les sept ponts.

La méthode d'Euler est incontestablement la façon la plus efficace d'aborder le problème des ponts de Königsberg; il suffit en effet de noter les points et les lignes du graphe une seule fois; au contraire, la méthode de recherche exhaustive nécessite de répertorier tous les chemins possibles. Or, le nombre de ces chemins est beaucoup plus grand que celui des points et des lignes du graphe. Dans ce sens, c'est la méthode d'Euler qui propose le meilleur algorithme.

(voir page suivante)







abcdef	*abcdeg*	*abcged*	*abcgf*	*abdcef*	*abdceg*	*abdgec*	*abdgf*	*A: abcde*	*= 5*
acdbfe	*acdbfg*	*acdefb*	*acdeg*	*acgebf*	*acged*	*acgfbd*	*acgfbe*	*B: abf*	*= 3*
adceg	*adgebf*	*adgec*	*adgfbc*	*adgfbe*	*aefbcd*	*aefbcg*	*aefbdc*	*C: cdg*	*= 3*
aegdbf	*aegdc*	*abegcd*	*abegdc*	*abef*	*adcbfe*	*adcbfg*	*adcefb*	*D: efg*	*= 3*
aefbdg	*aegcbf*	*aegcd*							

Le problème d'Euler consiste à déterminer si, dans un graphe donné, il existe un chemin ne passant qu'une fois par chaque ligne. Dans ce contexte, un graphe est un ensemble de points reliés entre eux par des lignes. Le problème initial revenait à déterminer un chemin traversant le parc de Königsberg *(croquis du haut)*. Il fallait que ce chemin passe par chaque pont une fois et une seule. Il existe au moins deux façons équivalentes de représenter ce parc par un graphe. L'une consiste à dresser la liste de tous les chemins du graphe en s'arrêtant dès qu'on rencontre une ligne déjà traversée. Même pour un graphe comportant peu de points, il existe un grand nombre de chemins possibles; la liste qui figure ci-dessus à titre d'exemple ne comprend que les chemins commençant par la ligne *a*. Leonhard Euler a découvert un algorithme beaucoup plus efficace. Il a montré qu'un chemin ne passant qu'une fois par chaque ligne ne peut exister que si en tous points du graphe (excepté deux aux maximum) convergent un nombre pair de lignes. Ce chemin s'appelle maintenant un chemin eulérien. En comptant le nombre de lignes qui concourent en chaque point, on s'aperçoit qu'il ne peut y avoir de chemin eulérien dans le parc de Königsberg.

J'espère vivement avoir pu vous montrer que Leonhard Euler avait sa place dans les classes primaires de Romandie car on peut faire sa connaissance dans de nombreuses activités mathématiques.

Les extraits d'articles présentés dans ce propos n'avaient pour but que de fournir des éléments d'études, de réflexion, de documentation permettant d'approfondir nos connaissances afin de pouvoir en tirer le maximum de profit pour nos élèves.

Les nombres premiers de Mersenne
Jusqu'au début de cette année, le plus grand nombre premier connu était:

$$2^{44497} - 1$$

trouvé par Slowinsky. Depuis janvier 1983, le même auteur a découvert un nouveau nombre premier:

$$2^{86243} - 1$$

qui s'écrit (si vraiment on voulait l'écrire) avec 25962 chiffres.

Ces deux nombres sont des nombres de Mersenne. En 1644, le Père Mersenne avait étudié les nombres de la forme:

$$M_p = 2^p - 1$$

où p est un nombre premier.

Pour $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17$, on obtient les nombres suivants:

$M_p = 3, 7, 31, 127, 8191, 131071$ qui sont tous premiers.

En revanche, pour $p = 11$, on a $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$

C'est à Euler qu'on doit la démonstration que $2^{31} - 1$ est premier.

Euler et la musique
Euler s'est aussi intéressé à la musique. Il propose de fabriquer des gammes dont les sons auraient pour fréquences des multiples simples d'un son fondamental (de fréquence choisie comme unité). Une tonalité comprendrait des sons de fréquences $2^m \cdot 3^n \cdot 5^p$; une autre des sons de fréquences $2^m \cdot 3^n \cdot 7^q$, etc.

En mai 1957, lors de la célébration du 250e anniversaire de la naissance d'Euler à Bâle, les participants ont pu entendre de la musique composée tout exprès par des musiciens hollandais et jouée sur un orgue construit selon les principes d'Euler par le prof. A.D. Fokker. Certains participants se souviennent encore de l'effet très moderne du «style caméléon» obtenu par la présence de deux sons de fréquences très voisines:

$$2^{10} = 1024 \text{ et } 3 \cdot 7^3 = 1029.$$

Quelques aspects du génie de Léonard Euler

par Pierre Bolli

Marquer le bicentenaire de la mort de Léonard Euler, ce n'est pas seulement accomplir un geste pieux, c'est surtout aller à la rencontre d'une personnalité vraiment exceptionnelle.

L'œuvre de ce génial mathématicien impressionne par son ampleur et son étendue: en 866 mémoires, traités et manuels, Euler a notablement enrichi toutes les disciplines mathématiques de son époque, tandis qu'il ouvrait la voie à leur application à tous les domaines de la science et de la technique de son temps.

De nos jours, une fraîcheur inattendue se dégage encore de toute cette immense production datant du XVIIIe siècle. Cela est dû, en partie au moins, à la grande simplicité dont Euler a su faire preuve tout au long de sa vie, en dépit de l'éclat pourtant très réel de son succès. C'est ainsi qu'il a fréquemment dévoilé, parfois avec une certaine candeur, les cheminements originaux qui ont guidé sa pensée vers ses innombrables découvertes.

Bel exemple de modestie et de générosité... mais aussi, quelle mine pour l'enseignant d'aujourd'hui, à l'heure où une pédagogie, qui se veut libératrice, met de plus en plus l'accent sur les méthodes heuristiques!

Après quelques témoignages, anciens ou plus récents, sur la formation, la vie et le rayonnement de Léonard Euler, nous saisirons mieux, à l'aide de quelques exemples, les raisons de sa remarquable présence.

Témoignages

Léonard Euler naquit le 15 avril 1707, à Saint-Jacques sur la Birse, près de Bâle. Son père, le pasteur Paul Euler,

...avoit étudié les Mathématiques sous Jacques Bernoulli; on sait que cet homme illustre joignoit à un grand génie pour les Sciences une Philosophie profonde qui n'accompagne pas toujours ce génie, mais qui sert à lui donner plus d'étendue et à le rendre plus utile: dans ses leçons, il faisoit sentir à ses disciples que la Géométrie (entendez: les mathématiques) *n'est pas une Science isolée, et il la leur présentoit comme la base et la clé de toutes les connoissances humaines, comme la Science où l'on peut le mieux observer la marche de l'esprit, celle dont la culture exerce le plus utilement nos facultés puisqu'elle donne à l'entendement de la force et de la justesse à la fois; enfin, comme une étude également précieuse par le nombre ou la variété de ses applications, et par l'avantage de faire contracter l'habitude de raisonner, qui peut s'employer ensuite à la recherche des vérités de tous les genres, et nous guider dans la conduite de la vie.*[1]

L'enseignement paternel porta des fruits aussi précoces qu'excellents car, au cours de sa quatorzième année déjà, le jeune Léonard s'immatriculait à la faculté de théologie de l'Université de Bâle, où

...son application, ses dispositions heureuses lui méritèrent bientôt l'amitié de Daniel et de Nicolas Bernoulli, disciples et déjà rivaux de leur père; il eut même le bonheur d'obtenir celle du sévère Jean Bernoulli, qui voulut bien lui donner, une fois par semaine, une leçon particulière, destinée à éclaircir les difficultés qui se présentoient à lui dans le cours de ses lectures et de ses travaux: les autres jours étoient employés par M. Euler à se mettre en état de profiter de cette faveur signalée.

Cette méthode excellente empêchoit son génie naissant de s'épuiser contre des obstacles invincibles, de s'égarer dans les routes nouvelles qu'il cherchoit à s'ouvrir; elle guidoit et secondoit ses efforts: mais en même temps, elle l'obligeoit de déployer toutes ses forces, qu'il augmentoit encore par un exercice proportionné à son âge et à l'étendue de ses connoissances.[2]

A vingt ans, Léonard Euler quitte la Suisse. Il n'y reviendra plus jamais, mais n'abandonnera pas son identité helvétique: jusqu'à la fin de sa vie, il était resté capable de s'exprimer dans le plus pur dialecte bâlois!

L'activité inlassable déployée durant plus de 56 ans par Euler, la force pénétrante de son génie et aussi les qualités didactiques remarquables de ses traités et de son enseignement, ont exercé une influence décisive sur toute la mathématique du XVIIIe siècle:

Tous les mathématiciens célèbres qui existent aujourd'hui sont ses élèves; il n'en est aucun qui ne se soit formé par la lecture de ses Ouvrages, qui n'ait reçu de lui les formules, la méthode qu'il emploie, qui, dans ses découvertes, ne soit guidé et soutenu par le génie d'Euler. Il doit cet honneur à la révolution qu'il a produite dans les Sciences Mathématiques, en les soumettant toutes à l'analyse; à sa force pour le travail, qui lui a permis d'embrasser toute l'étendue de ces Sciences; à l'ordre qu'il a su mettre dans ses grands Ouvrages; à la simplicité, à l'élégance de ses formules; à la clarté de ses méthodes et de ses démonstrations qu'augmentent encore la multiplicité et le choix de ses exemples.[3]

Un éminent Genevois apporte son témoignage: Louis Bertrand (1731-1812), membre du Conseil des Deux Cents, géomètre distingué, élève et ami d'Euler qui, selon le D.H.B.S.*, fut associé à l'Académie de Berlin depuis 1754, occupa dès 1761 et durant plus de 30 ans la chaire de mathématiques à Genève – avec un zèle infatigable et un grand succès – et fut recteur de l'Académie en 1783.

Dans la préface à ses «Elémens de Géométrie», parus en 1812, Louis Bertrand remarque à propos de son «Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques prise dans toute son étendue» – publié en 1778 «aux dépens de l'Auteur par Isaac Bardin, libraire au bas de la Cité» – que

---

* Dictionnaire historique et biographie de la Suisse.

J'aurois désiré faire une seconde édition de tout l'ouvrage dont je viens de parler, mais ni le temps ni mes forces ne me l'ont permis. Cet ouvrage contient des propositions de Trigonométrie, tant plane que sphérique, que quelques personnes m'ont attribuées, parce que M. Euler, qui en est l'inventeur, ne les a mises au jour qu'après moi; mais je les tiens de lui, je les ai recueillies de ses leçons, avec plusieurs condisciples. M. Euler faisoit paroître dans les Mémoires de plus d'une Académie, dans les recueils de divers journaux, et dans ses propres recueils d'opuscules, un grand nombre de théorèmes et de problèmes, les uns supérieurs, les autres inférieurs aux propositions dont il s'agit; pouvois-je imaginer qu'il ne les eût pas publiées, lorsque vingt-cinq ans après en avoir eu connoissance, je les insérai dans le «Développement nouveau, etc»? Je croyois alors l'inventeur si bien connu, que je n'avois nul besoin de le nommer; je me trompois: c'est pourquoi je saisis cette occasion, non pas de rendre à César ce qui est à César, parce que je ne me suis pas approprié ce que m'attribue une erreur que je n'ai pu prévenir n'ayant pu la prévoir; mais je saisis cette occasion de redresser cette erreur.[4]

Le lecteur se doutait-il que ses ancêtres reçurent un enseignement de mathématiques si directement inspiré par le grand Euler?

Les Mémoires de la princesse Daschkoff, dame d'honneur de Catherine II, à qui l'impératrice confia la direction de son Académie des sciences, nous apportent une preuve supplémentaire de la notoriété dont jouissait Léonard Euler et de l'intense activité qu'il déployait encore à la fin de sa vie.

Je fis connaissance aussi avec les noms des membres les plus distingués de l'Académie; et le lendemain, avant de me transporter au siège des séances, j'allai voir le célèbre Euler que j'avais connu bien des années auparavant et qui m'avait toujours traitée avec bonté et considération.

Ce savant était sans aucun doute un des premiers mathématiciens du siècle. Il était en outre versé dans toutes les branches des autres sciences; et telle était la vigueur de son esprit et son activité habituelle, que même après avoir perdu la vue il n'interrompit nullement ses travaux intellectuels, mais qu'avec l'aide de M. Fuss, le mari de sa petite-fille, qui lui faisait la lecture et écrivait sous sa dictée, il préparait une quantité de matériaux qui servirent à enrichir les publications de l'Académie plusieurs années encore après sa mort (qui survint quelques mois après ces événements).

Dès que je fus entrée dans la salle des séances, m'adressant aux professeurs et aux membres qui y étaient assemblés, je déplorai mon insuffisance en fait de connaissances scientifiques, mais je parlai du profond respect que je ressentais pour la science. La preuve la plus solennelle que je pusse en offrir était la présence parmi eux de M. Euler, sous les auspices duquel j'avais demandé à paraître dans l'Académie.[5]

Laissons au Professeur Andreas Speiser, un éminent Bâlois, le soin de situer Euler dans le contexte de son époque et dans la perspective plus vaste de l'histoire des mathématiques.

Il y a des époques de l'histoire des arts et des sciences qui nous donnent l'impression que «les temps étaient accomplis», que, grâce au travail des siècles, il s'était créé un état de choses dans lequel des possibilités encore insoupçonnées ne demandaient plus qu'à être découvertes. Si le destin est bienveillant, il survient, en ces temps-là, un homme à qui il est donné d'accomplir la tâche prévue (...). Il arrive alors que cet homme heureux redécouvre par lui-même l'univers entier et qu'il témoigne, dans son œuvre, d'une fécondité qui semble dépasser la mesure humaine.

La science des mathématiques n'a connu, à part l'époque sans rivale des Grecs, aucune constellation plus favorable que celle sous laquelle naquit Léonard Euler. Il lui était réservé de transformer complètement l'aspect des mathématiques, et d'en faire le puissant édifice qu'elles représentent aujourd'hui. Il sut tirer parti au maximum de l'élan que lui imprimèrent beaucoup d'heureuses découvertes et il lui fut permis de jeter un regard sur des régions qui, jadis, restaient fermées à l'esprit humain. Goethe a traduit l'impression qu'il faisait, en le définissant comme l'un de ces hommes «qui sont destinés à tout reprendre par le commencement, si riche que puisse être la moisson laissée par leurs prédécesseurs».[6]

Mais Léonard Euler n'est pas seulement pour nous ce monument historique dont l'œuvre force le respect et l'admiration. Sa pensée, son dynamisme et ses méthodes sont encore bien vivaces. Georges Pólya, dont l'enseignement exceptionnel à l'Ecole polytechnique fédérale de Zürich – de 1914 à 1940 – a éveillé plus d'une vocation pédagogique, exprime parfaitement l'intérêt que nous pouvons, aujourd'hui encore, trouver dans certains mémoires d'Euler.

Of all mathematicians with whose work I am somewhat acquainted, Euler seems to be by far most important for our inquiry. A master of inductive research in mathematics, he made important discoveries (on infinite series, in the Theory of Numbers, and in other branches of mathematics) by induction, that is, by observation, daring guess, and shrewd verification. In this respect, however, Euler is not unique; other mathematicians, great and small, used induction extensively in their work.

Yet Euler seems to me almost unique in one respect: he takes pains to present the relevant inductive evidence carefully, in detail in good order. He presents it convincingly but honestly, as a genuine scientist should do. His presentation is «the candid exposition of the ideas that led him to those discoveries» and has a distinctive charm. Naturally enough, as any other author, he tries to impress his readers, but, as a really good author, he tries to impress his readers only by such things as have genuinely impressed himself.[7]

Une constation que chacun peut aisément vérifier: dans l'index d'un livre, même récent, de théorie des nombres, de combinatoire, pour ne pas parler d'histoire des mathématiques, le nom d'Euler est en général celui qui est cité le plus fréquemment. cf [8, 9, 10]

Exemples

Pour commencer l'analyse plus détaillée de quelques questions résolues par Euler, proposées par lui ou traitées selon ses méthodes, ouvrons ensemble un de ses nombreux mémoires:

Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse [11]

Je me trouvai un jour dans une compagnie où, à l'occasion du jeu d'échecs, quelqu'un proposa cette question:

De parcourir avec un cavalier toutes les cases d'un échiquier, sans parvenir jamais deux fois à la même, et en commençant par une case donnée.

On mettait pour cette fin des jettons sur toutes les 64 cases de l'échiquier, à l'exception de celle où le cavalier devoit commencer sa route; et de chaque case où le cavalier passoit conformément à sa marche on ôtoit le jetton, de sorte qu'il s'agissait d'enlever de cette façon successivement tous les jettons. Il faloit donc éviter d'un côté que le cavalier ne revînt jamais à une case vide, et d'un autre côté il faloit diriger en sorte sa course, qu'il parcourût enfin toutes les cases.

Ceux qui croyoient cette question assez aisée firent plusieurs essais inutiles sans pouvoir atteindre au but; après quoi celui qui avoit proposé la question, ayant commencé par une case donnée, a sçu si bien diriger la route, qu'il a heureusement enlevé tous les jettons. Cependant, la multitude des cases ne permettoit pas qu'on ait pu imprimer à la mémoire la route qu'il avoit suivie; et ce n'étoit qu'après plusieurs essais, que j'ai enfin rencontré une telle route qui satisfait à la question; encore ne valoit-elle que pour une certaine case initiale. Je ne me souviens plus, si on lui a laissé la liberté de la choisir lui-même; mais il a très positivement assuré qu'il étoit en état de l'exécuter, quelle que soit la case où l'on voulût qu'il commençât.

Pour éclaircir mieux cette question, j'ajouterai ici une route où, en commençant par un coin de l'échiquier, on parcourt toutes les cases:

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	43	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

J'ai marqué ici les cases par l'ordre des nombres suivant lequel elles sont successivement parcourues. Ainsi, le cavalier ayant été posé dans la case 1 saute en 2, de là en 3, et depuis en 4, 5, 6 etc., jusqu'à ce que, venant enfin dans la case 64, il aura passé toutes les cases. Il est évident que cette route satisfait également, quand on veut commencer par quelqu'un des autres angles.

En retournant par la même route on pourra aussi commencer par la case 64 et de là, en passant successivement par les cases 63, 62, 61 etc., on parviendra enfin, après avoir parcouru toutes les cases, à celle du coin 1. Mais cette route ne servira de rien, quand on doit commencer par quelque autre case; et alors on sera obligé de chercher par des essais une nouvelle route, dont le commencement soit dans la case donnée. Or, on reconnoîtra aisément qu'une telle solution du problème proposé seroit trop pénible, et ne conviendroit pas au but en vue, où il s'agit de trouver prompte-mérite aucune attention, à moins qu'elle ne soit fondée sur quelques principes, ou qu'on ne la puisse soumettre à quelque espece d'Analyse qui en dirige les opérations.

Ce n'est aussi que dans cette vue que j'ose proposer mes recherches sur cette question, auxquelles j'ai été conduit par une idée toute particulière que M. Bertrand de Genève m'a fournie; car, quoiqu'elle soit légère en elle-même et tout à fait étrangère à la Géométrie, elle doit être regardée comme très remarquable, dès qu'on aura trouvé moyen d'y appliquer l'Analyse. Or, je ferai voir qu'elle est susceptible d'une analyse toute particulière, qui doit mériter d'autant plus d'attention que cette analyse demande des raisonnemens peu usités ailleurs. On convient aisément de l'excellence de l'Analyse, mais on la croit communément bornée à de certaines recherches qu'on rapporte aux Mathématiques; et partant, il sera toujours fort important d'en faire usage dans des matières qui lui semblent refuser tout accès, puisqu'il est certain qu'elle renferme l'art de raisonner dans le plus haut degré. On ne sauroit donc étendre les bornes de l'Analyse sans qu'on ait raison de s'en promettre de très grands avantages.

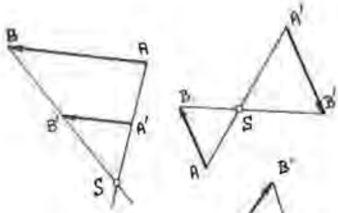
Le mémoire cité se prolonge sur une trentaine de pages, pour se terminer par une généralisation envisagée pour des échiquiers en forme de croix, par exemple:

		14	19		
		7	12		
6	13	20	15	18	11
1	8	5	10	3	16
		2	17		
		9	4		

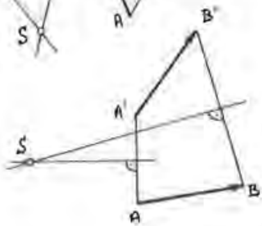
Construction du centre d'une similitude
De centro similitudinis [12]

<u>*Problème:*</u>

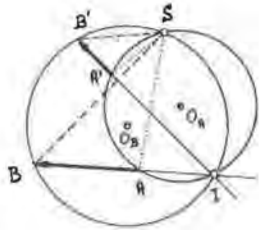
trouver le centre S de la similitude qui envoie A sur A' et B sur B'.



1) Dans le cas particulier où les segments (orientés) AB et A'B' sont parallèles, la similitude se réduit à une homothétie, dont le centre S est facile à trouver.



2) Dans le cas particulier où les segments (orientés) AB et A'B' ont même longueur, la similitude se réduit à une rotation, dont le centre S est facile à construire.

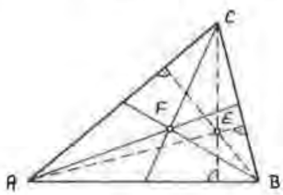


3) Dans le cas général, Euler a proposé une construction très simple, qui ne semble pas avoir été remarquée avant lui: par l'intersection I des droites AB, A'B', on mène les cercles passant aussi par A, A' et par B, B'; leur seconde intersection est le centre S cherché.

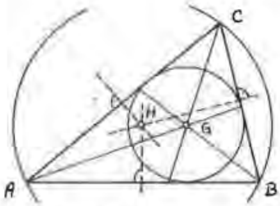
En effet, selon les propriétés des angles inscrits, les triangles SAB, SA'B' sont semblables et de même orientation.»

La droite d'Euler
Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum [13]

Dans ce mémoire, daté de 1765, Euler détermine les coordonnées (origine A, l'un des axes étant sur AB)



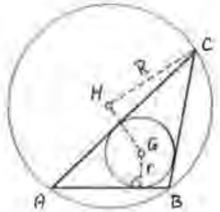
de l'orthocentre E,
du centre de gravité F,



du centre du cercle inscrit G,
du centre du cercle circonscrit H.

Il constate facilement que les points E, F et H sont alignés.

Euler calcule aussi les carrés des distances des 6 paires formées par ces 4 points remarquables.

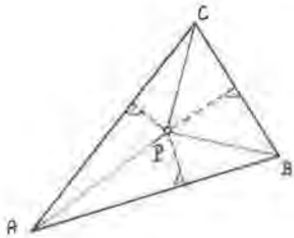


De l'expression qu'il donne pour la distance GH, on déduit sans peine

$$GH^2 = R \cdot (R - 2r),$$

d'où l'on tire immédiatement le **corollaire:** dans tout triangle, le rayon du cercle circonscrit est au moins le double du rayon du cercle inscrit

$$R \geqslant 2r.$$



Il n'est pas impossible que ce résultat ait inspiré le mathématicien hongrois Paul Erdös qui, en 1935, conjectura que:

pour tout point P d'un triangle ABC, la somme des distances de P aux trois sommets vaut au moins le double de la somme des distances de P aux 3 côtés.[14]

La démonstration fut donnée deux ans plus tard par L. J. Mordell, comme solution d'un problème posé dans la revue American Mathematical Monthly.

Même en géométrie élémentaire, l'œuvre d'Euler recèle d'amples thèmes d'exercices, voire des sujets de réflexion que ne dédaignent pas de grands mathématiciens.

Géométrie combinatoire

Sans insister sur la fameuse relation concernant les polyèdres, conjecturée par Descartes (1596-1650) et démontrée par Euler en 1750,

$$S + F = A + 2$$

dont il est d'ailleurs question dans un autre article, Euler s'est aussi intéressé à d'autres situations de géométrie combinatoire.

Voici un problème qu'il a proposé vers 1758:

de combien de manières peut-on partager un polygone convexe de n côtés en n – 2 triangles, par n – 3 diagonales qui ne se coupent pas?

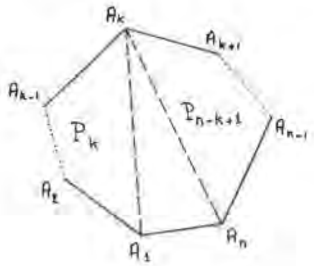
En présentant le travail de A. de Segner, Euler donne une table énumérant les partitions de tous les polygones de 3 à 25 côtés dont voici un extrait.[15]

Numerus laterum	*Numerus resolutionum*
3	*1*
4	*2*
5	*5*
6	*14*
10	*1 430*
15	*742 900*
20	*477 638 700*
25	*343 059 613 650*

montrant avec quelle rapidité croît ce nombre de partitions.

Cette tabelle permet aussi de rappeler avec quelle incroyable facilité Euler exécutait d'énormes calculs numériques, de tête, très rapidement et avec une parfaite sécurité. De nombreuses anecdotes en témoignent.

Saisissons cette occasion de présenter une méthode qu'Euler utilisa très fréquemment, celle des fonctions génératrices.[16]



A cet effet, désignons par P_n le nombre des partitions d'un polygone à n côtés et posons $P_2 = 1$. Dans toute partition de ce polygone, A_1A_n sera le côté d'un triangle dont le troisième sommet sera A_k, avec k allant de 2 à n-1; il en résulte la relation de récurrence

$$P_n = \sum_{k=2}^{n-1} P_k \cdot P_{n-k+1}$$

Avec les coefficients P_k, formons la fonction génératrice

$$g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k \cdot x^k \ ;$$

la relation de récurrence suggère de multiplier g(x) par elle-même; après quelques calculs, on trouve

$$g^2(x) = x \cdot g(x) - x^3$$

et, en résolvant cette équation du second degré,

$$g(x) = (x/2)\ (1 - (1 - 4x)^{1/2}).$$

Les P_n s'obtiennent alors par comparaison avec les coefficients du développement en série de cette dernière expression:

$$P_n = \frac{2}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \cdot \frac{18}{6} \cdot \frac{22}{7} \cdots\cdots \frac{4n-10}{n-1}$$

ou, avec la notation plus moderne des coefficients binomiaux,

$$P_n = C_{n-1}^{2n-3} \ / \ (2n-3)$$

dont on comparera facilement les valeurs avec celles de la tabelle calculé par Euler

La fonction exponentielle et le nombre e

La partie des mathématiques que l'on qualifie aujourd'hui d'analyse – et au développement de laquelle Léonard Euler apporta une contribution essentielle – se traitait au XVIIIe siècle sous l'étiquette de calcul infinitésimal.

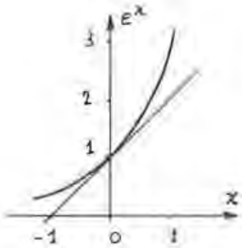
Montrons, sur l'exemple de la fonction exponentielle, comment Euler utilisait les «infiniment petits» et les «infiniment grands». En d'autres termes, les propriétés des puissances étant admises, comment déterminer e^x pour un x (réel) quelconque?

En divisant x par l'infiniment grand n, on obtient un infiniment petit

$$w = x/n;$$

ainsi

$$e^x = e^{nw} = (e^w)^n.$$



Or, pour l'infiniment petit w, le remplacement de la courbe par sa tangente à l'origine permet d'écrire

$$e^w = 1 + w$$

et, par suite,

$$e^x = (1 + w)^n = (1 + x/n)^n$$

En développant cette dernière puissance selon la formule binomiale (comme si l'infiniment grand n était un entier ordinaire)

$$e^x = 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^3 +$$

$$+ \ \dots + \frac{n(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^k + \dots$$

Comme n est infiniment grand, 1/n est donc infiniment petit et, en conséquence,

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} = (1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) = 1$$

Ainsi, le développement bien connu

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

a été obtenu par une méthode qui, jusque vers les années 70, s'attira les plus grandes réserves, si ce n'est l'ire des puristes.

En effet, placées dans le contexte de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres dits réels, les notions d'infiniment petit et d'infiniment grand présentaient manifestement des relents de contradiction.

Or, en 1966, par le biais de l'analyse non-standard, Abraham Robinson est parvenu à donner un fondement tout à fait rigoureux à ces notions controversées.

Ces faits récents, non seulement réhabilitent les méthodes utilisées avec beaucoup d'à-propos par Euler, mais renforcent encore toute l'admiration que suscitent la profondeur et la subtilité de l'intuition de ce grand génie.

En posant x = 1 dans ce développement, Euler en tire d'emblée quelques conséquences intéressantes pour le fameux nombre e, la base des logarithmes naturels:

1°) La valeur numérique, avec 14 décimales

$$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 04\dots$$

2°) L'irrationnalité du nombre e, en un élégant raisonnement par l'absurde: si l'on pouvait écrire $e = m/n$ avec des entiers m et n ($n \geqslant 2$), on aurait alors

$$m(n-1)! = (n! + n! + n!/2! + \dots + n + 1) + 1/(n+1) + 1/(n+1)(n+2) + \dots$$

où le membre de gauche et le premier terme du membre de droite sont des entiers, alors que

$$0 < 1/(n+1) + 1/(n+1)\,(n+2) + \dots < 1/3 + 1/3^2 + 1/3^3 + \dots = 1/2$$

ce qui établit la contradiction!

3°) Découverte d'un développement en fraction continue[17]

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

$$= [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots] ,$$

un autre domaine auquel Euler apporta une impulsion décisive.

Un curieux polynôme

Euler n'a jamais cessé de s'intéresser à la théorie des nombres et, en particulier, aux nombres premiers.

Les Mathématiciens ont taché jusqu'ici en vain à découvrir quelque ordre dans la progression des nombres premiers, et on a lieu de croire que c'est un mystère auquel l'esprit humain ne sauroit jamais pénétrer. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à jetter les yeux sur les tables des nombres premiers que quelques-uns se sont donné la peine de continuer au-delà de cent mille et on s'apercervera d'abord qu'il n'y regne aucun ordre ni règle. Cette circonstance est d'autant plus surprenante, que l'Arithmétique nous fournit des règles sures, par le moyen desquelles on est en état de continuer la progression de ces nombres aussi loin qu'on souhaite, sans pourtant nous y laisser la moindre marque de quelque ordre.[18]

Chemin faisant, Euler a découvert en 1772 un bien curieux polynôme:

$$p(n) = n^2 + n + 41,$$

dont la valeur est un nombre premier pour $n = 0, 1, 2, \dots, 39$.

En revanche, $p(40) = (40+1)^2 = 41^2$ n'est plus un nombre premier!

Remarquons que

$$p(n-1) = (n-1)^2 + (n-1) + 41 = n^2 - n + 41 = p(-n),$$

ce qui signifie que le polynôme considéré prend des valeurs premières pour les 80 entiers consécutifs

$$n = -40, -39, \dots, -1, 0, 1, \dots, 39$$

ou encore que le polynôme

$$q(n) = p(n-40) = n^2 - 79n + 1601$$

est premier pour $n = 0, 1, 2, \dots, 79$.

A nouveau, l'intuition d'Euler a fait merveille, car des recherches plus modernes ont montré qu'il n'y avait pas d'entier A supérieur à 41 pour lequel

$$n^2 + n + A$$

serait premier pour n = 0, 1, 2, ..., A-2! [19]

L'indicateur d'Euler

Pour ses recherches en théorie des nombres, Euler a été fort bien servi par sa virtuosité en calcul mental et son excellente faculté de mémorisation. La plupart des découvertes qu'il a faites dans ce domaine ont été obtenues par une expérimentation poussée et une observation attentive, la mémoire permettant alors d'opérer, au moment propice, les associations heureuses.

Examinons, à l'aide d'une table numérique [20] ou d'une calculatrice de poche, les puissances successives d'entiers a qui sont premiers avec 10, ce qu'on écrit

$$(a,10) = 1,$$

où, selon l'habitude, (a,b) désigne le p.g.c.d. des entiers a, b.

Par exemple,

3	9	27	81	243	729	...
7	49	343	2 401	16 807	117 749	...
9	81	729	6 561	59 049	531 441	...
11	121	1 331	14 641	161 051	1 771 561	...

Dans de telles suites de nombres, on constate que le chiffre des unités peut prendre 1, 2 ou 4 valeurs distinctes, mais jamais 3. Pourquoi?

C'est un théorème établi en 1760 par Euler qui en fournit une explication. Pour mieux en comprendre la signification, expliquons quelques notations.

Depuis Gauss (1777-1855), on utilise la notation des congruences

$$a \equiv b \pmod{m}$$

pour exprimer que les entiers a et b laissent le même reste à la division par m, ce dernier nombre étant alors appelé le module.

Par exemple,

$$88 \equiv 3 \pmod{17}\ ,\ 8^{10} \equiv 1 \pmod{11}\ ,\ 7^4 \equiv 1 \pmod{10},$$
$$26^n \equiv 76 \pmod{100} \text{ pour } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Dans une lettre adressée le 18 octobre 1640 à son ami Frénicle de Bessy, Pierre de Fermat (1601-1665) signale qu'il a découvert une propriété intéressante des nombres premiers:

«si p est premier et si (a,p) = 1, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$»

et dont il ne lui donne pas de démonstration, *car elle est trop longue!*

$$\text{Par exemple, } 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023 = 93 \cdot 11.$$

Remarquons toutefois que $p - 1$ n'est pas nécessairement le plus petit exposant n pour lequel $a^n \equiv 1 \pmod p$, mais alors n est un diviseur de $p - 1$. Par exemple,

$$2^6 \equiv 1 \pmod 7\text{, mais déjà } 2^3 \equiv 1 \pmod 7.$$

Si la réciproque du théorème de Fermat était vraie, c'est-à-dire si

« $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ entraînait n premier »,

on disposerait d'un critère de primalité très commode. Il suffirait en effet de contrôler que $2^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ pour s'assurer que l'entier impair n est un nombre premier. Malheureusement, ce n'est pas le cas, car on a notamment

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341} \text{ et } 341 = 11 \cdot 31\,!$$

Il n'en reste pas moins vrai que, sous sa forme contraposée:

« si $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod n$, alors n est non premier »

le théorème de Fermat permet d'éliminer de nombreux prétendants au titre de nombre premier! Par exemple, $4096 = 91 \cdot 45 + 1$, c'est-à-dire $2^{12} \equiv 1 \pmod{91}$, permet de calculer

$$2^{90} = 2^{7 \cdot 12 + 6} = 64 \cdot (2^{12})^7 \equiv 64 \pmod{91}$$

ce qui montre que 91 n'est pas un nombre premier; on sait bien que $91 = 7.13$!

Signalons, en passant, que les recherches sur les grands nombres premiers ne présentent pas qu'un intérêt académique. En cryptographie, la sécurité des codages à clé publique – dont peut dépendre l'équilibre entre les deux supergrands de la planète – est directement liée à la quasi-impossibilité – même pour les ordinateurs les plus modernes – de factoriser un entier qui est le produit de deux nombres premiers assez grands, mais inconnus.[21, 22]

Il a fallu attendre près d'un siècle pour que le théorème de Fermat reçoive une démonstration; c'est en effet Euler qui en a donné la première en 1736.

Mais, remarquant que l'exposant $p - 1$ représentait le nombre, désigné par la suite par $\varphi(p)$, des entiers positifs inférieurs à p et premiers avec lui, Euler a pu généraliser le théorème de Fermat en établissant, 24 ans après sa première démonstration, que

$$\text{si } (a,n) = 1, \text{ alors } a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n.$$

Les valeurs prises par la fonction φ – appelée maintenant l'indicateur d'Euler – se calculent par

$$\varphi(n) = n \cdot (1 - 1/p_1) \cdot (1 - 1/p_2) \cdots (1 - 1/p_r),$$

où les p_k sont les nombres premiers qui interviennent dans la factorisation de l'entier n. Par exemple,

$\underline{1}$, 2, $\underline{3}$, 4, 5, 6, $\underline{7}$, 8, $\underline{9}$; 10: $\varphi(10) = 4 = 10 \cdot (1/2)\ (4/5)$
$\underline{1}$, $\underline{2}$, ..., $\underline{p-1}$; p: $\varphi(p) = p-1 = p \cdot (1-1/p)$, p premier.

$$\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = 100 \cdot (1/2) \cdot (4/5) = 40$$

Revenons maintenant à la question considérée plus haut du chiffre des unités dans une suite de puissances d'un entier a premier avec 10.

Le chiffre des unités est tout simplement le reste de la division du nombre envisagé par 10. Comme $\varphi(10) = 4$, le théorème d'Euler-Fermat montre que

$$\text{si } (a,10) = 1, \text{ alors } a^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

ce qui signifie précisément que a^4 se termine par le chiffre 1.

Par suite, on retrouvera tous les quatre termes la même séquence des chiffres des unités. Si on devait déjà retrouver le chiffre 1 tous les m termes – avec m la plus petite valeur possible – on aurait donc

$$a^m \equiv 1 \pmod{10}.$$

Mais en divisant 4 par m, c'est-à-dire si

$$4 = q \cdot m + r,\ 0 \leqslant r < m,$$

on aurait

$$a^4 = a^{q \cdot m + r} = a^r \cdot (a^m)^q \equiv a^r \pmod{10},$$

soit

$$a^r \equiv 1 \pmod{10}$$

avec un exposant inférieur à l'exposant minimal, ce qui entraîne

$$r = 0 \text{ et donc } q \cdot m = 4.$$

Le nombre m est bien un diviseur de 4; c'est le cas de 1 et de 2, mais pas celui de 3, l'explication est donc complète.

Le théorème d'Euler-Fermat est un outil très précieux en théorie des nombres; combiné avec les règles de calcul sur les congruences – qu'il est facile de dégager, même à l'école primaire, à l'occasion d'exercices sur la division, comme en témoigne le recueil «Mathématique / cinquième année» en usage dans les cantons romands – il permet de réduire à peu de choses des calculs qui prendraient autrement des proportions exagérées. C'est l'immense supériorité du raisonnement mathématique sur le calcul brut – comme celui qu'effectuent les ordinateurs, par exemple – qui se trouve dévoilée d'un seul coup!

A titre d'exemple très simple, montrons comment on peut obtenir le résultat

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$$

qui a été évoqué plus haut. Comme

$(2,341) = 1$ et que $\varphi(341) = 341 \cdot (10/11) \cdot (30/31) = 300$, le théorème d'Euler-Fermat montre que

$$2^{300} \equiv 1 \pmod{341}.$$

Ainsi, étant donné que $1024 = 3 \cdot 341 + 1$, on a bien

$$2^{340} = 2^{40} \cdot 2^{300} \equiv 2^{40} = (2^{10})^4 = 1024^4 \equiv 1 \pmod{341}!$$

Les applications des mathématiques

On ne saurait terminer cette évocation du génie d'Euler sans faire au moins une allusion aux aptitudes exceptionnelles dont il a fait preuve dans les innombrables problèmes scientifiques ou questions techniques où il a pu appliquer les mathématiques.

Dans ce domaine, Euler a véritablement fait œuvre de pionnier. Sa façon d'analyser les éléments d'un problème, la perspicacité avec laquelle il parvenait à saisir l'essence des relations entre les divers composants d'un système, devraient être citées en exemple à tous ceux qui sont concernés, de près ou de loin, par les applications des mathématiques. Et, à l'heure des ordinateurs et de l'informatique, on peut penser qu'ils sont particulièrement nombreux...

En observant les roues à eau de son époque, Euler a jeté les bases de la théorie moderne des turbines. Il a suggéré l'adjonction d'un distributeur – élément essentiel des turbines, à eau ou à gaz, actuelles – et prévu le phénomène de la cavitation – évaporation de l'eau en certains points d'un écoulement où la pression devient trop faible – qui est, aujourd'hui encore, la bête noire des hydrauliciens.

Son besoin de comprendre et d'expliquer les phénomènes les plus variés par les mathématiques ne s'est tari qu'au moment de sa mort.

M. Euler ne put être instruit que peu de temps avant sa mort, de la découverte de M. Montgolfier. L'idée de chercher les loix du mouvement vertical d'un globe qui s'élève dans un air calme, en vertu de la force ascensionnelle qu'il doit à sa légèreté, a été la première qui se soit présentée à son esprit; il essaya sur le champ d'appliquer le calcul à cette question; et lorsqu'il fut surpris par la mort, la planche noire sur laquelle il écrivoit avec de la craie, depuis qu'il étoit presque privé de vue, étoit chargée de ces calculs, les derniers qui aient été faits par ce grand homme, aussi singulier peut-être par le nombre incroyable de ses travaux, que par la profondeur et la force de son génie. [23]

Références

1. *Eloge de M. Euler par le Marquis de Condorcet in Opera Omnia,* Série III, Vol. 12, p. 287.
2. Ibid., p. 288.
3. Ibid., p. 308.
4. LOUIS BERTRAND. *Elémens de Géométrie.* Genève 1812, p. VII.
5. *Mémoires de la princesse Daschkoff, Dame d'honneur de Catherine II, impératrice de toutes les Russies.* Mercure de France 1966, p. 179.
6. ANDREAS SPEISER. *Léonard Euler in Grands hommes de la Suisse.* Payot Lausanne 1945, p. 130.
7. GEORGES POLYA. *Induction and Analogy in Mathematics.* Princeton 1954, p. 90.
8. G.H. HARDY – E.M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford 1979, p. 423.
9. D.M. BURTON. *Elementary Number Theory.* Allyn and Bacon 1980, p. 387.
10. DANIEL I.A. COHEN. *Basic Techniques of Combinatorial Theory.* Wiley 1978, p. 295.
11. *Opera Omnia,* Série I, Vol. 7, pp. 26-56.
12. *Opera Omnia,* Série I, Vol. 26, pp. 276-285.
13 *Opera Omnia,* Série I, Vol. 26, pp. 139-157.
14. NICHOLAS D. KAZARINOFF. *Geometric Inequalities.* New Mathematical Library 1961, pp. 78-88.
15. *Opera Omnia,* Série I, Vol. 26, pp. XVI-XVIII.
16. GEORGES POLYA. Ibid., p. 102.
17. *Opera Omnia,* Série I, Vol. 14, p. 203.
18. *Opera Omnia,* Série I, Vol. 2, p. 241.
19. ROSS HONSBERGER. *Mathematical Gems II.* Dolciani Mathematical Expositions 1976, pp. 29-30.
20. COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUES. *Tables numériques et formulaires 1974*, pp. 22-23.
21. HENRI COHEN. *A nous les grands nombres premiers* in La Recherche, nº 135, juillet-août 1982, pp. 914-915.
22. MARTIN E. HELLMANN. *The Mathematics of Public-Key Cryptography* in Scientific American, Vol. 241, nº 2, août 1979, pp. 130-139.
23. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris 1784 in Opera Omnia, Série II, Vol. 16, p. 165.

Une généralisation audacieuse et féconde

par André Calame

Nous voudrions montrer dans cet article comment Euler s'est servi astucieusement d'un résultat d'algèbre pour résoudre un problème d'analyse. Nous suivrons, dans les grandes lignes et sur un cas particulier, le mémoire d'Euler intitulé «De summis serierum reciprocarum» [1] (1734-35).

1) Un problème d'analyse

Euler désire calculer la somme suivante:

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

où les dénominateurs sont les carrés des nombres naturels.

Jacques Bernoulli avait démontré que la série ci-dessus était convergente, c'est-à-dire que si l'on prend de plus en plus de termes, la somme tend vers une limite s. Pour y parvenir, J. Bernoulli avait commencé par étudier une autre série:

$$(1') \quad 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \ldots$$

Si l'on désigne par s'_n la somme des n premiers termes, on remarque qu'on peut facilement exprimer s'_n en fonction de n. En effet, chaque fraction peut être remplacée par la différence de deux fractions:

$$s'_n = 1 + (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) + \ldots + (\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n})$$

$$s'_n = 1 + 1 + (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}) + (-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + \ldots + (-\tfrac{1}{n-1} + \tfrac{1}{n-1}) - \tfrac{1}{n}$$

d'où, après simplifications: $s'_n = 2 - \frac{1}{n}$

Ainsi, lorsqu'on prend de plus en plus de termes, s'_n croît et tend vers la valeur limite $s' = 2$.

Puisque la série (1') converge vers 2, on peut affirmer que la série (1) converge aussi et vers un nombre s plus petit que 2. En effet, chaque fraction de la série (1) est inférieur à la fraction de même rang dans la série (1'):

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{(n-1) \cdot n} \quad \text{dès que } n \geqslant 2$$

Mais J. Bernoulli, tout en ayant prouvé l'existence d'un nombre s tel que

$$s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

n'avait pas pu le calculer effectivement. C'est ce travail qu'Euler entreprend.

2) Une relation de l'algèbre des polynômes

Collégiens et gymnasiens se souviennent sans doute des relations dites de Viète. Envisageons l'équation du deuxième degré:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si cette équation admet les solutions x_1 et x_2, alors on a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

On en déduit une relation pour la somme des inverses des solutions:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = -\frac{b}{c}$$

Cette relation est vraie pour autant que c soit non nul. En divisant par c les deux membres de l'équation du deuxième degré proposée, on obtient:

$$\frac{a}{c} x^2 + \frac{b}{c} x + 1 = 0$$

et on peut affirmer que la somme des inverses des solutions est égale au coefficient de x changé de signe.

On voit sans peine que cette relation peut se généraliser au cas d'une équation polynomiale de degré n quelconque. Limitons-nous au cas $n = 3$.

Supposons qu'un polynôme de degré 3 s'annule pour les trois valeurs x_1, x_2 et x_3. On peut écrire ce polynôme sous la forme:

$$k\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) = 0$$

En divisant les deux membres par k et en effectuant les produits, on a:

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)\,x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)\,x - x_1x_2x_3 = 0$$

En supposant que les trois solutions x_1, x_2, x_3 sont non nulles, on peut diviser tous les termes par le produit $x_1x_2x_3$, ce qui donne après changement de signe:

$$-\frac{1}{x_1x_2x_3} x^3 + \left(\frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_1x_2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) x + 1 = 0$$

Ici aussi, la somme des inverses des solutions est égale au coefficient de x changé de signe.

Dans le cas général de l'équation polynomiale:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 1 = 0$$

où le terme constant est égal à 1, on peut affirmer que les n solutions satisfont la relation:

$$(2) \quad \boxed{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n} = -a_1}$$

Ce résultat s'exprime ainsi:

Si une équation polynomiale a pour terme constant 1, la somme des inverses des n solutions est égale au coefficient du terme du premier degré changé de signe.

C'est cette relation qui sera le pivot de la démonstration d'Euler.

3) Le développement en série de la fonction sinus

Euler va utiliser le développement de la fonction sinus en série de puissances:

$$(3) \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} + \ldots$$

Nous ne rappelons pas comment on établit ce développement dans le cadre du calcul différentiel. Il nous suffira de souligner qu'en prenant un seul terme du développement, on a l'approximation:

$$\sin t \approx t$$

souvent utilisée par les physiciens (par exemple dans l'étude des oscillations d'un pendule simple pour les angles de faible amplitude). L'approximation

$$\sin t \approx t - \frac{t^3}{6}$$

est déjà bien meilleure. Pour les angles inférieurs à 10° (c'est-à-dire à $\frac{\pi}{18}$ radians), la différence entre la valeur exacte du sinus et la valeur fournie par le polynôme est inférieure à 10^{-5}:

$$\sin \frac{\pi}{18} = \sin 10° = 0{,}1736482$$

$$\frac{\pi}{18} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0{,}1736468$$

Divisons maintenant par t les deux membres de (**3**):

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} - \frac{t^6}{5040} + ...$$

et posons:

$$(\mathbf{4}) \quad t^2 = x \qquad \text{ou} \qquad t = \sqrt{x} > 0$$

On a alors:

$$(\mathbf{5}) \quad \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{120}x^2 - \frac{1}{5040}x^3 + ...$$

Euler porte toute son attention à «l'équation» suivante:

$$(\mathbf{5'}) \quad \boxed{\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{120}x^2 - \frac{1}{5040}x^3 + ... = 0}$$

Il lui applique la relation (**2**) comme s'il s'agissait d'une équation polynomiale. Faut-il blâmer cette généralisation audacieuse? Au contraire, faut-il y voir la confiance d'Euler sur la permanence des relations en passant à l'infini? Notre but n'est pas de trancher, mais de relever combien cette généralisation est féconde et mène rapidement au résultat.

4) Dénouement

Ainsi donc, pour Euler, l'équation (**5'**) se comporte comme une équation polynomiale (de degré infini) dont le terme constant est bien égal à 1. Il peut affirmer dès lors que la somme des inverses des solutions de (**5'**) va donner le coefficient de x changé de signe, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$:

$$(\mathbf{6}) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n} + ... = \frac{1}{6}$$

Il ne reste plus qu'à trouver les solutions de l'équation:

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sin t}{t} = 0 \qquad \text{où } t = \sqrt{x} > 0$$

Les valeurs positives de t qui annulent la fonction sinus sont:

$$t_1 = \pi\ ,\ t_2 = 2\pi\ ,\ t_3 = 3\pi\ ,...\ ,\ t_n = n\pi\ ,\ ...$$

soit:

$$x_1 = \pi^2\ ,\ x_2 = 4\pi^2\ ,\ x_3 = 9\pi^2\ ,...\ ,\ x_n = n^2\pi^2\ ,\ ...$$

On en tire:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\pi^2}\ ,\ \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4\pi^2}\ ,\ \frac{1}{x_3} = \frac{1}{9\pi^2}\ ,\ \ldots,\ \frac{1}{x_n} = \frac{1}{n^2\pi^2}\ ,\ \ldots$$

En revenant à la relation (**6**), on a:

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \ldots + \frac{1}{n^2\pi^2} + \ldots = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}}$$

Et dans son mémoire, Euler donne la somme avec 20 chiffres:

$$s = 1{,}644\,934\,066\,848\,226\,436\,4$$

En 1743, Euler revient sur ce travail dans le «Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord»:

«La méthode que j'ai donnée dans les Commentaires de l'Académie de Pétersbourg pour trouver la somme de cette suite (...) a quelque chose d'extraordinaire, parce qu'elle est tirée d'un principe dont on n'a pas encore fait beaucoup usage dans les recherches de cette nature (...).

Plusieurs Géomètres ont honoré cette découverte de leur attention (...). Le cas leur sembloit d'abord d'autant plus remarquable que Feu Mr. Jacques Bernoulli, après l'avoir cherché long tems en vain, l'avoit jugé d'une très grande conséquence pour perfectionner la Théorie des séries infinies.»[2]

La nature du raisonnement suivi par Euler frappera sans doute d'autant plus les lecteurs de la fin du XXe siècle, habitués depuis Cauchy à un type de rigueur en analyse souvent riche en «epsilon».[3]

[1] L. Euler - Opera omnia - Série I - Vol. 14 pp. 73-86.
[2] Idem - p. 177.
[3] Who gave you the epsilon? - Cauchy and the origins of rigorous calculus - J.V. Grabiner - Amer. Math. Monthly. Vol. 90. Nb. 3. March 1983.

Ces symboles que nous avons tous les jours (ou presque) entre les mains

Le billet de 10 francs suisses, en circulation depuis quelques années, a pour sujet le mathématicien Leonhard Euler. Ce billet fait partie d'une série qui est l'œuvre des graphistes zurichois Ernst et Ursula Hiestand.

Le sujet principal du recto est bien entendu un portrait d'Euler imprimé en taille-douce d'après un pastel très connu d'Emanuel Handmann datant de 1753 (Euler avait 46 ans). (a)

A gauche du portrait, une figure gravée au burin nous rappelle que le savant bâlois s'est aussi intéressé à la technique: profil idéal des dents de roues d'engrenage. (b)

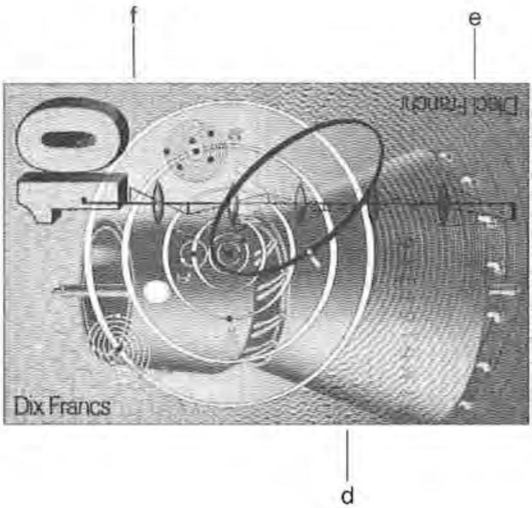
N'oublions pas le fond polychrome en offset! Il est formé de diagrammes (bien connus?) dont Euler illustra des problèmes de logique. (c)

Les trois motifs du verso évoquent les contributions essentielles et nombreuses d'Euler à l'hydrodynamique, à l'optique et à l'astronomie:

- Son projet de turbine hydraulique à rendement élevé qui ne fut techniquement réalisable que longtemps après sa mort. (d)
- Tiré d'un mémoire intitulé «Recherche pour servir à la perfection des lunettes», un schéma de propagation de rayons lumineux au travers d'une série de lentilles. (e)
- Un schéma de notre système solaire, extrait des «Lettres à une princesse d'Allemagne». (f)

G. Charrière


b
a
10
10
c


f
e
Dix Francs
d

J. A. 1211 GENEVE 6

TABLE DES MATIÈRES

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:
Mlle F. Waridel, MM. Th. Bernet, F. Brunelli, A. Calame, R. Dénervaud, R. Délez, Ch. Félix, M. Ferrario, F. Jaquet, F. Oberson.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 14.—, Etranger F 16.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie Fiorina & Burgener, 1950 Sion