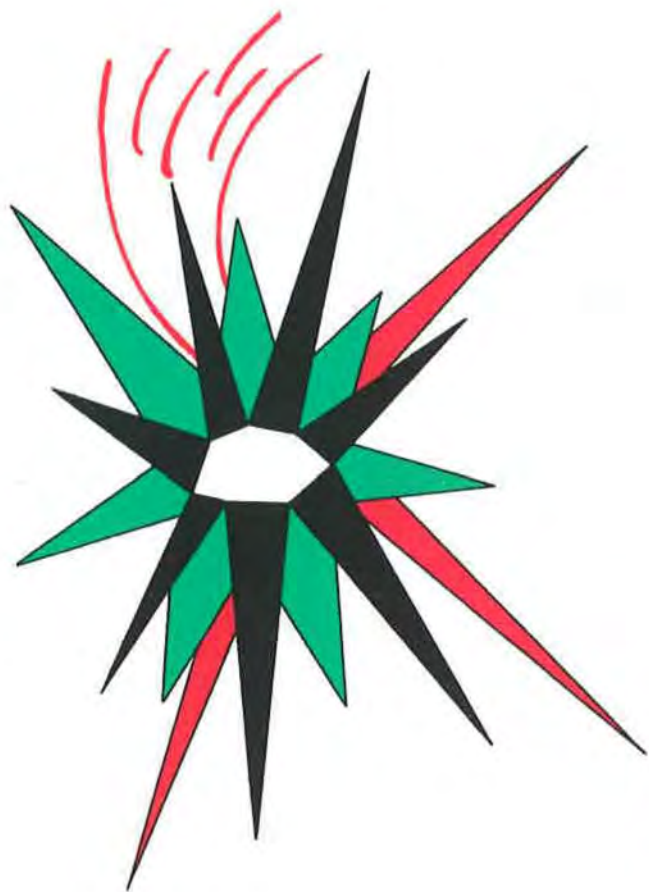


121



MATH ECOLE

JANVIER 1986
25^e ANNÉE

Editorial

Jadis, la géométrie n'apparaissait que tardivement dans les programmes scolaires, en général dans le degré secondaire. Elle y faisait une entrée assez solennelle, accompagnée des « instruments divins » hérités de la tradition grecque : la règle et le compas. Les figures soigneusement dessinées étaient ensuite repassées au tire-ligne et à l'encre de Chine. Je me souviens de la photo de famille des droites dans le triangle : la hauteur et la médiatrice bien d'aplomb sur la base ; la médiane avec son petit air penché ; la bissectrice qui partage l'angle en deux (parties égales) – la parenthèse étant omise par ceux que troublaient son arrivée sur la base. A cette époque, on apprenait des démonstrations à l'aide d'éléments « égaux chacun à chacun » et la pureté du raisonnement voulait que l'on ne déplaçât les figures que par la pensée.

Aujourd'hui, à l'époque du cinéma et de la télévision, il est devenu naturel de ne plus considérer des figures fixes, mais des transformations. Le mouvement a acquis droit de cité pour rejoindre, après plus d'un siècle, les thèses du mathématicien Félix Klein (1872) : La géométrie est l'étude des groupes de transformations. L'expérimentation menée dès les premières classes primaires permet d'aborder dans les meilleures conditions les isométries à l'âge où les élèves ont acquis la notion de conservation des distances. On trouvera dans ce numéro même des illustrations convaincantes sur ce sujet.

Lorsque l'on demande à l'école obligatoire de préparer les élèves à exécuter avec soin des tâches précises, de leur inculquer des méthodes de travail, mais aussi de les rendre capables d'adaptation, d'initiative et de mobilité d'esprit, il ne s'agit que d'objectifs abstraits tant que l'on ne dit pas où et quand les élèves peuvent acquérir ces qualités. L'étude des transformations géométriques pourrait être un de ces moments. On y rencontre d'une part des contraintes à respecter : on se limite au plan, espace à deux dimensions ; on s'oblige, par exemple, à n'utiliser que des isométries. Voilà pour les exigences d'ordre, le respect de certaines règles dans un cadre sécurisant. D'autre part, voici pour la capacité d'invention, l'imagination : il y a bien des façons de réaliser des pavages, des frises, des mosaïques. Les règles imposées ne briment pas l'imagination, mais elles la stimulent. Et ne serait-ce pas l'occasion de découvrir une poésie des mathématiques ?

André Calame

Coup d'œil sur les pavages

par D. Poncet, Porrentruy

Un pavage régulier et son réseau

L'illustration de la figure 1 a été réalisée à partir de l'«Etude d'un remplissage périodique d'un plan avec des poissons et des oiseaux» du graveur néerlandais M.C. Escher.

C'est un pavage régulier du plan c'est-à-dire un dessin qui peut s'obtenir en faisant agir sur un de ses morceaux (par exemple ici un bloc oiseau-poisson) toutes les translations de la forme $a\vec{V} + b\vec{W}$ où $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs adéquats de directions différentes, a et b parcourant l'ensemble des entiers relatifs. Evidemment, plus le morceau choisi est important plus les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ doivent être grands car les translatés ne doivent pas se chevaucher. De plus, chaque morceau ne peut convenir: il faut éviter la propagation de trous.



Figure 1

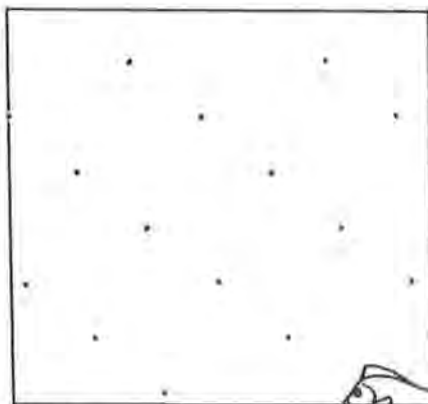


Figure 2

Une translation qui fait coïncider deux yeux de poisson laisse le dessin (infini) inchangé. Toutes les translations qui possèdent cette vertu forment un groupe : 1) la composée de deux translations vertueuses est vertueuse, 2) la translation nulle est évidemment vertueuse, etc. Visiblement comme aucune autre isométrie, positive (rotation) ou négative (symétrie axiale ou symétrie glissée) ne laisse le dessin inchangé, le groupe des isométries qui le conservent est réduit à sa plus simple expression: un groupe de translations.

Pour le remplacer on peut choisir par exemple l'œil du poisson en bas à droite, et lui infliger toutes les translations du groupe: on obtient alors le «réseau» de parallélogrammes de la figure 2. En partant d'un autre point, l'extrémité d'un bec d'oiseau, on obtient un réseau égal.

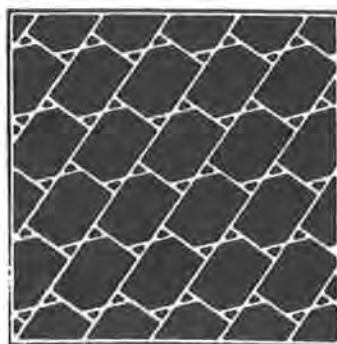
De par son existence, un pavage régulier, aussi pauvre en isométries soit-il, possède toujours un groupe de translations qui le conservent. Suivant les cas, son réseau peut être un parallélogramme, un losange quelconque, un losange avec un angle de 60° , un rectangle ou même un carré (voir des exemples figure 4).

Des pavages avec des centres de rotation

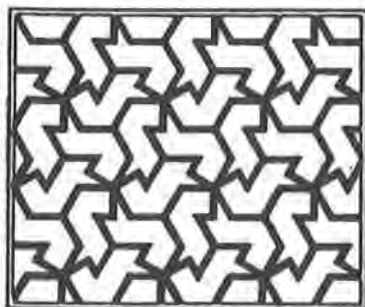
Les quatre pavages de la figure 3 ont été réalisés à partir de treillis chinois d'un article de D. Schattenschneider qui s'est aussi intéressée à l'œuvre de Escher. En plus des translations, le groupe d'isométries de chaque pavage contient cette fois des rotations mais pas d'isométries négatives:



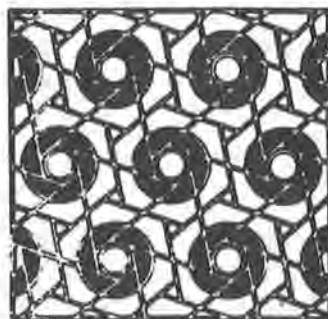
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 3

- (a) montre des centres de rotation d'un quart de tour (qui sont en même temps des centres de rotation d'un demi-tour). Ces points sont appelés des centres de rotation d'ordre 4. On distingue aussi des points unique-

ment des centres de rotation d'un demi-tour: ce sont des centres de rotation d'ordre 2.

- (b) ne possède que des centres de rotation d'ordre 2.
- (c) ne contient que des centres de rotation d'ordre 3 (centres de rotation d'un tiers de tour mais non d'un sixième de tour).
- (d) a des centres de rotation d'ordre 6, des centres de rotation d'ordre 3 et des centres de rotation d'ordre 2.

La figure 4 montre pour chacun de ces pavages l'agrandissement d'une « cellule » du réseau obtenu en choisissant comme point de départ un centre de rotation le plus élevé et l'emplacement des divers centres de rotation.

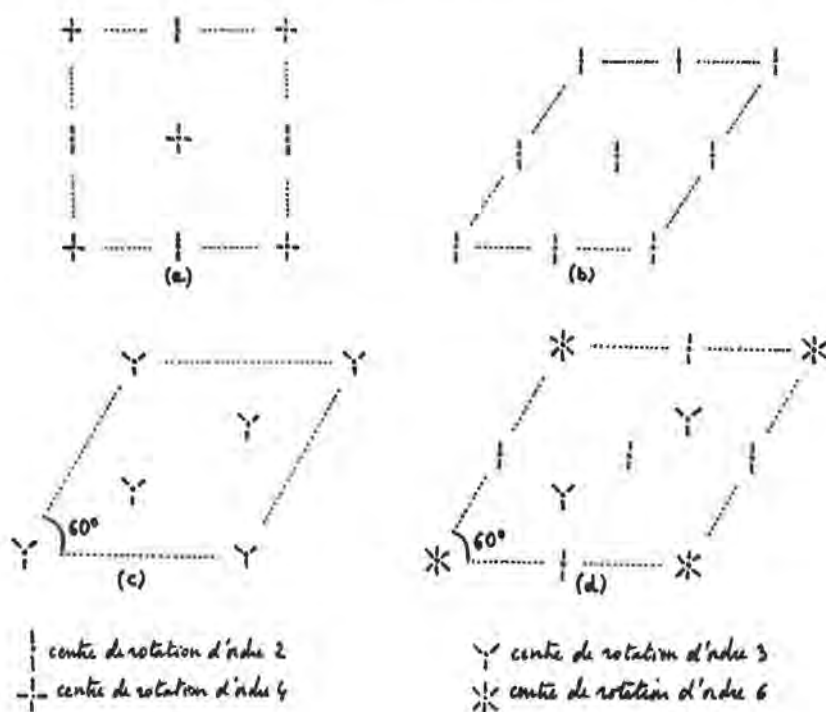


Figure 4

Le théorème des « translations tournées »

En observant les figures 3 et 4, on remarque que la présence d'une translation et d'une rotation d'angle α dans le groupe d'isométries du pavage se traduit automatiquement par la présence de la « même » translation mais « tournée » de α .

Plus précisément, si nous appelons t la translation gauche-droite définie par le côté horizontal d'une cellule, on constate :

- en (a) la présence de rotation d'ordre 2 donc de la translation t^{-1} ($\alpha = 180^\circ$) et la présence de rotations d'ordre 4 donc d'une translation verticale de même grandeur que t ($\alpha = 90^\circ$).
- en (b) la présence de rotations d'ordre 2 donc de la translation t^{-1} ($\alpha = 180^\circ$).
- en (c) la présence de rotations d'ordre 3 donc d'une translation à 120° de même grandeur que t .
- en (d) la présence de rotations d'ordre 2, 3, 6, donc de la translation t^{-1} et de translations à 120° et à 60° de même grandeur que t .

Cette propriété que nous appellerons le théorème des « translations tournées » se démontre ainsi :

Supposons qu'un pavage régulier soit conservé par la translation t et par la rotation r (centre A, angle α) ; alors il est conservé par la rotation r^{-1} (centre A, angle $-\alpha$) et aussi par rt^{-1} (les isométries qui conservent un pavage forment un groupe). Or cette dernière isométrie fait tourner le dessin de $-\alpha$, le translate puis le tourne de α . Comme finalement le dessin n'a pas tourné c'est une translation, t' . Appliquée à A (figure 5) elle le transforme en A' par l'intermédiaire de B. C'est donc que t' est la « translation t tournée de α ».

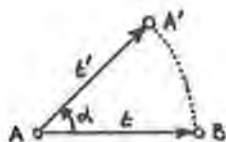


Figure 5

La restriction cristallographique

Les cinq pavages que nous avons rencontrés sont, malgré la particularité de leurs motifs, représentatifs de tous les pavages réguliers que l'on peut imaginer.

En effet, on peut montrer qu'un pavage régulier n'est rien d'autre qu'un habillage plus ou moins ingénieux d'un des cinq squelettes présentés sur les figures 2 et 4. Pour notre part, nous nous contenterons de démontrer que les rotations présentes dans un pavage régulier ne peuvent être que d'ordre 2, 3, 4 ou 6 : c'est la restriction cristallographique, conséquence à la fois du fait que les translations du pavage forment un réseau et du théorème des « translations tournées ».

Supposons donc qu'un pavage régulier contienne un centre de rotation d'ordre n (rotation r de centre A et d'angle $2\pi : n$) et soit t la plus petite des translations qui conserve le pavage : elle amène A en B (figure 6) tandis que r transforme B en B'. D'après le théorème des « translations tournées » la translation t' qui envoie A en B' appartient au groupe des isométries du pavage et il en est donc de

même de la translation $t^{-1} \circ t'$ qui transforme B en B'. Comme, par hypothèse, t est la plus petite des translations du groupe, on doit nécessairement avoir $BB' \geq AB$ ce qui implique que $\angle BAB' = 2\pi : n \geq 2\pi : 6$ c'est-à-dire $n \leq 6$ (voir figure 7).

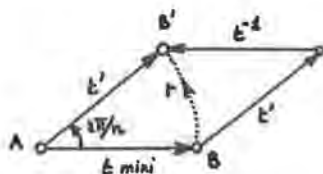


Figure 6

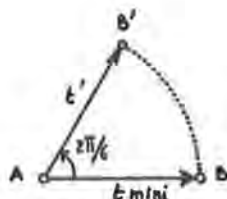


Figure 7

On ne peut donc avoir que des centres de rotations d'ordre $n = 2, 3, 4, 5$ ou 6 . Mais le cas $n = 5$ doit être exclu. En effet si A était centre de rotation d'ordre 5 (rotation r d'angle $2\pi : 5$) le groupe des isométries du pavage contiendrait la rotation $r \circ r$ (centre A, angle $4\pi : 5$) qui enverrait B en B'' (voir figure 8). D'après le théorème des «translations tournées» le groupe contiendrait aussi la translation t'' qui enverrait A en B'' et donc aussi la translation $t \circ t''$ qui amènerait A en C. Comme $AC < AB$ cela contredirait la définition de la translation t . Finalement on a démontré la restriction cristallographique: les rotations d'un pavage régulier ne peuvent être que d'ordre 2, 3, 4 ou 6.

On voit en outre qu'il n'y a pas de cohabitation possible entre centres de rotation d'ordre 4 et centres de rotation d'ordre 3 ou 6 car alors $r(120^\circ) \circ r(-90^\circ) = r(2 \times 60^\circ) \circ r(-90^\circ) = r(30^\circ)$ serait aussi une rotation du groupe; or la restriction cristallographique exclut ce type de rotation. Une étude plus détaillée permettrait de montrer aussi que la disposition des centres de rotation est nécessairement l'une de celles de la figure 4.

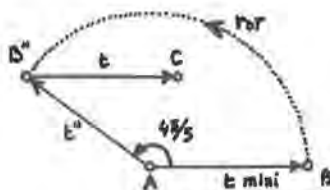


Figure 8

En guise de conclusion

Si l'on ignore, comme nous l'avons fait, les pavages réguliers avec isométries négatives (symétries axiales ou symétries glissées) on peut classer les pavages en 5 catégories, repérées par la rotation de plus grand ordre qui y figure:

- ordre 1: il n'y a que des translations (figures 1 et 2);
- ordre 2: il n'y a que des centres de rotation d'ordre 2 (fig. 3 et 4b);

- ordre 3: il n'y a que des centres de rotation 3 (fig. 3 et 4c);
- ordre 4: il y a des centres de rotation d'ordre 4 (fig. 3 et 4a);
- ordre 6: il y a des centres de rotation d'ordre 6 (fig. 3 et 4d).

Lorsque l'on étudie les pavages réguliers admettant des isométries négatives (comme celui de la figure 9) on s'aperçoit que les 5 catégories précédentes s'enrichissent respectivement de 3, 4, 2, 2 et 1 classes, soit en tout 17 sortes de pavages réguliers.

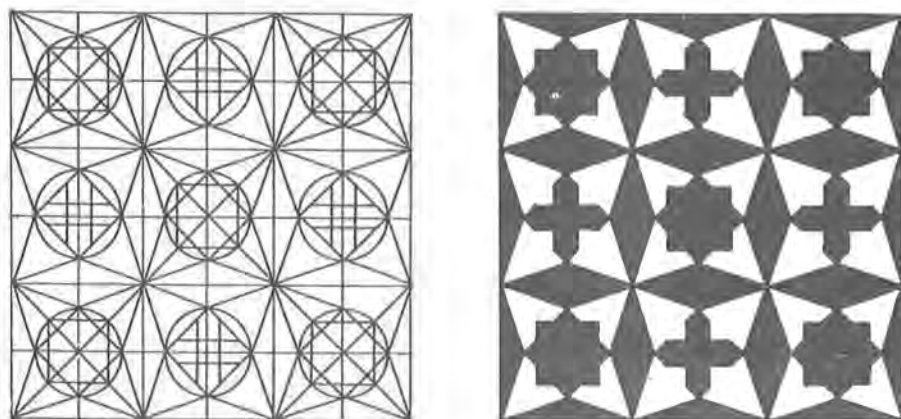


Figure 9. Un des deux pavages comprenant à la fois des centres de rotation d'ordre 4 et des isométries négatives: motif en « feuilles de nacre » tiré du livre d'André Paccard (voir ci-dessous).

Cette étude est faite par exemple dans l'ouvrage de George E. Martin: *Transformation Geometry*. Pour des précisions sur les pavages à isométries positives on pourra aussi consulter: *Geometry and the imagination* de D. Hilbert et S. Cohn-Vossen.

Un bon résumé se trouve dans l'article de D. Schattenschneider: *The plane symmetry groups: their recognition and notation*, paru dans *American Mathematical Monthly* (juin-juillet 1978). Pour dessiner des pavages on pourra suivre l'ouvrage de Y. Bossard: *Rosaces, frises et pavages*, volume 1, étude pratique. Si l'on s'intéresse à l'aspect artistique et à l'art arabe, on ne manquera pas de se plonger dans la monumentale étude d'André Paccard: *le Maroc et l'Artisanat traditionnel islamique dans l'architecture* (deux volumes) où l'on pourra notamment suivre la réalisation des pavages depuis leurs tracés jusqu'aux techniques de mise en place grâce à des centaines d'illustrations en couleurs. Quant aux œuvres d'Escher on pourra les trouver dans l'ouvrage de J.L. Locher: *Le Monde de M.C. Escher*.

L'enseignement des isométries

par F. Jaquet

Il n'y a guère que dix à vingt ans qu'elles ont été introduites dans les programmes et déjà, les symétries, rotations et translations ont acquis droit de cité dans notre enseignement des mathématiques, à l'école primaire comme au secondaire inférieur.

Les élèves et les maîtres aiment bien ces activités proches du dessin géométrique. On apprécie le calme, nécessaire à la précision du trait, dans lequel elles se déroulent. On est sensible à l'harmonie qui se dégage des figures et de leurs images isométriques où les couleurs peuvent intervenir avec bonheur. L'évaluation du travail de l'élève est aisée: la note est établie selon des critères simples de quantité et de qualité des dessins, elle n'est en général pas trop mauvaise car chacun arrive toujours à achever l'une ou l'autre des constructions demandées. Bref, les isométries du plan sont bien accueillies en tant que nouvel objet d'enseignement.

D'autres matières introduites par les récentes innovations dans les programmes de mathématiques n'ont pas connu le même accueil: les ensembles, dont on ne voit pas très bien à quoi ils mènent, la numération dans des bases différentes de dix, les constructions et développements de solides, les éléments de statistique, de calcul des probabilités, de logique, etc. L'enseignement des mathématiques a, en outre, beaucoup de peine à prendre en compte certains aspects de notre monde moderne comme l'informatique, les calculatrices et d'autres objets auxquels l'élève est confronté dans sa réalité quotidienne.

Les isométries auraient-elles alors une vertu particulière qui les rende assimilables par l'école ou «scolarisables»? Leurs finalités sont-elles si évidentes que le «pour quoi faire?» ne se pose plus à leur sujet? Aurait-on découvert en elles la panacée de toutes les difficultés de l'enseignement de la géométrie?

Ou n'est-ce pas plutôt parce que les transformations géométriques, de leur espace d'origine à trois dimensions qui est celui des objets et des hommes, ont été réduites aux isométries dans le plan et y restent confinées, à l'encontre des lézards de Escher qui en ressortent (fig. 1)?

Ou n'est-ce pas aussi parce que, d'un objet d'émerveillement ou de recherche, on fait des isométries un objet d'enseignement sans surprises ni intérêt à l'exemple – certes caricatural – du problème suivant déjà traditionnel malgré son jeune âge:

«Soit un triangle ABC. Construire son image A'B'C' par une rotation $R(-\alpha; G)$, où G désigne le centre de gravité du triangle et α la valeur absolue de l'angle de sommet A.»

Ou n'est-ce pas encore parce que les vraies isométries que sont les pliages, découpages, décalques, placements réels ou autres activités manuelles ne

sont pas reconnues comme valables au plan mathématique ou ne répondent pas aux critères de «rigueur scientifique» pour l'attribution d'une note scolaire?



Fig. 1. «Reptiles» lithographie de M.C. Escher (1943).

Certains pourront peut-être trouver inopportunes ces questions qui viennent troubler la quiétude d'un domaine de leur enseignement qui ne pose pas de problèmes (dans les diverses acceptions du terme!). Ce sont pourtant des questions justifiées et nécessaires, à une époque où l'on tend à «*rechercher l'essentiel*» dans les programmes, où l'on parle de «*mathématiques pour tous*» et où l'on s'intéresse au caractère significatif des activités proposées à l'élève.

Cet article n'a pas la prétention de répondre à ces questions mais seulement d'apporter quelques éléments de réflexion sur l'évolution des isométries, de leur origine à la classe de mathématiques, puis de proposer quelques activités en guise de «*retour aux sources*», à l'image des lézards de Escher.

Le «cycle» des isométries

Où trouver l'origine des isométries si ce n'est dans la nature et dans l'activité humaine? A l'état de connaissance implicite, elles existent depuis toujours et chacun de nous les côtoie quotidiennement.

Les artistes et artisans en ont dégagé quelques caractéristiques et principes d'organisation pour le plaisir de notre œil.

Les mathématiciens s'y sont intéressés aussi et en ont fait un objet de savoir: les isométries sont les applications de l'espace (ou du plan) dans lui-même qui conservent les distances. Elles possèdent des propriétés remarquables et peuvent être exploitées comme modèle de structure de groupe, comme support en géométrie métrique, caractérisée par l'invariance des distances, etc.

Leur aspect dynamique et concret, leur intérêt en géométrie, leur concordance avec les mouvements de l'enfant à la découverte de son espace ont contribué à leur entrée dans les programmes scolaires, sous l'impulsion simultanée de mathématiciens, de psychologues et de pédagogues. Les auteurs des programmes ont donc fait des isométries un objet d'étude, apparenté aux objectifs généraux de recherche plutôt qu'aux acquisitions de connaissances ou aux apprentissages formels, comme en témoignent les deux extraits suivants de plans d'études:

(GIRCE II, chapitre 5, géométrie)... «En géométrie, il s'agit essentiellement de permettre aux élèves d'acquérir de l'expérience personnelle et d'affermir leur intuition de l'espace à deux et à trois dimensions. L'accent est donc mis sur la réflexion et la recherche à partir de manipulations, de constructions, de dessin, sans viser toujours à des connaissances déterminées... En 6^e année, on applique les transformations (translations, symétries, rotations) à des figures du plan, sans référence à un réseau; on les utilise pour connaître certaines propriétés des figures planes»...

(Programme canadien pour l'école primaire, chapitre géométrie)... «Le programme de géométrie comporte ceci de particulier que l'ensemble des objectifs qui y sont proposés gravite davantage autour de suggestions d'activités ou de recherches que d'apprentissages formels... On aura sans doute avantage ici à faire intervenir les concepts unificateurs sous une forme plus ou moins explicite tout en évitant de tomber dans un formalisme inutile en ce qui concerne les définitions, propriétés et transformations géométriques»...

Du plan d'études et de ses objectifs généraux, les isométries sont apprêtées en objet d'enseignement par les auteurs de manuels puis par les maîtres. Elles se déterminent alors en termes de savoir-faire ou du comportements attendus du genre:

- étant donné une figure, construire son image par une translation, une rotation ou une symétrie,
- deux figures isométriques étant données, retrouver les isométries qui conduisent de l'une à l'autre.

Finalement, l'élève perçoit les isométries au travers de tâches à effectuer, transmises par des fiches de travail, exercices ou problèmes du manuel, demandes directes du maître. Ces tâches sont souvent les mêmes, de la 5^e à la 8^e année, à quelques variantes près caractérisées par le matériel (quadrillage, feuille blanche, papier transparent, etc.) la précision du trait et la complexité des figures:

- découverte, puis pratique d'un algorithme de construction,
- maniement des instruments de dessin géométrique,
- recherche, puis apprentissage des propriétés de chaque isométrie avec la terminologie et les notations correspondantes.

Dans ce type de tâche, l'initiative de l'élève est assez limitée, voire inutile. Lorsque les algorithmes de construction sont découverts, le travail devient répétitif. L'explicitation des propriétés des isométries est ressentie comme une demande extérieure à l'activité réelle. L'évaluation du travail effectué vient aussi de l'extérieur: du maître ou d'une feuille de correction en papier transparent.

Fort heureusement, il y a d'autres activités à proposer aux élèves dans le chapitre des isométries, qui permettent un retour sur le monde réel où la notion a pris naissance. Mais la tentation est là; le danger de réduction des transformations géométriques à la tâche scolaire décrite ci-dessus existe réellement.

Il y a des élèves de 7^e ou de 8^e qui ignorent ou ont oublié le modèle physique du pliage pour une symétrie. Il y en a d'autres qui n'assimilent pas la translation à un mouvement de glissement. Il y en a encore qui n'ont plus de plaisir à créer des figures isométriques, ou qui n'osent plus recourir aux manipulations, ou qui sont persuadés qu'ils ne comprennent rien en géométrie.

Les quelques propositions qui suivent n'ont rien de bien nouveau ni d'exceptionnel. Elles se situent dans la ligne déterminée par les plans d'études, pour valoriser les objectifs généraux souvent négligés au profit d'apprentissages formels ou de constructions sans grand intérêt ni avenir. Dans le «cycle» des isométries qui va de la réalité à l'objet d'enseignement en passant par les mathématiques, les programmes et les manuels, elles pourraient constituer quelques éléments de la boucle qui revient de la classe au monde dans lequel vit l'élève.

Isométries et activité réelle de l'élève

Les cinq suggestions qui suivent: mosaïques, polygones, miroirs, labyrinthes, et pavages, se proposent d'engager l'élève dans une activité autonome aux développements multiples. Elles mettent en œuvre les connaissances du domaine des isométries, ou permettent de les construire, mais elles ne sont pas limitées à ce thème, ni à une année déterminée.

Pour la dernière d'entre elles, les pavages, nous n'avons pu résister à l'envie de reproduire quelques travaux pour que le lecteur puisse partager le plaisir que les élèves ont eu à les élaborer.

1. Mosaïque

A partir d'un jeu de mosaïques comprenant des carrés et des triangles équilatéraux de côtés isométriques, la figure 2 présente deux façons de recouvrir le plan sans jamais juxtaposer deux carrés.

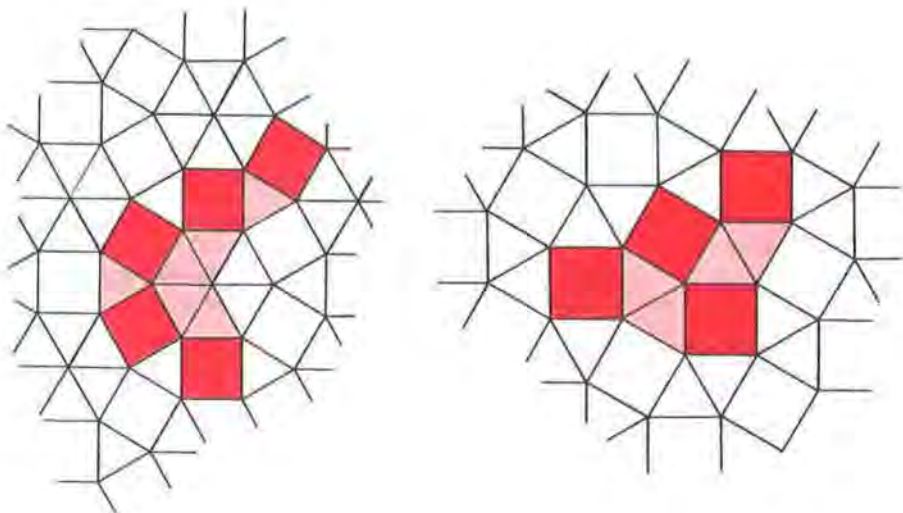


Figure 2

La recherche de ces deux mosaïques constitue déjà, en soi une activité intéressante, qu'elle soit menée avec des pièces mobiles ou par dessin. Elle n'épuise cependant pas toutes les ressources de la situation:

- Y a-t-il d'autres motifs possibles, avec ou sans carrés juxtaposés?
- Ces mosaïques se décomposent-elles en parties isométriques constituant des «éléments de base».
- Comment dénombrer triangles et carrés? Pour 60 carrés combien y a-t-il de triangles, dans chaque mosaïque?
- Comment se repérer dans ces mosaïques?
- Quelles sont les isométries qui laissent ces mosaïques invariantes?
- Etc.

2. Polygones

Cette mosaïque n'est-elle pas remarquable ?

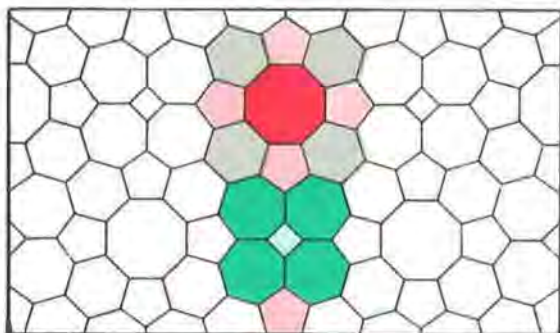


Fig. 3. Tirée de «L'educazione matematica» n° V. 2 (Cagliari, 1984).

On peut se contenter de l'observer ou de la colorier, on peut aussi avoir envie de l'analyser ou de chercher à la reproduire. On mettra ainsi en œuvre de nombreuses connaissances dans le domaine des isométries, des angles et des polygones réguliers.

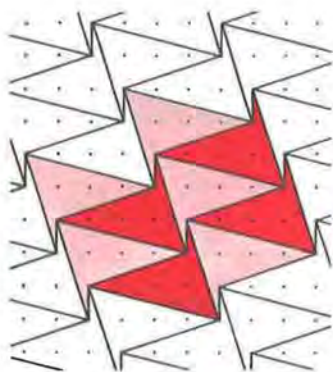
3. Miroirs

Avec deux miroirs situés verticalement (fig. 4) et un motif très simple, on réalise d'innombrables rosaces et frises.

Si on décide de les dessiner pour les conserver, il y a là une longue activité où il faut faire appel aux isométries, à leurs propriétés et à leur construction de façon créatrice.



Figure 4



Tous les quadrilatère conviennent.

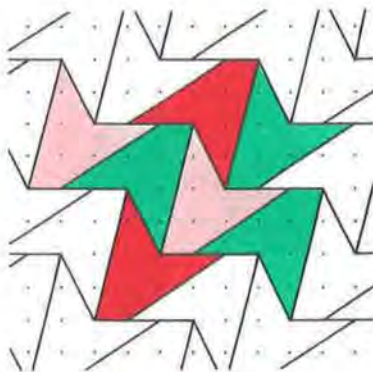


Fig. 6. Certains pentagones seulement permettent de paver le plan.

Dans une troisième étape, on laisse libre cours à la créativité de l'élève qui progressivement modifie, par isométrie, ses polygones de base pour donner vie à ses pavages :

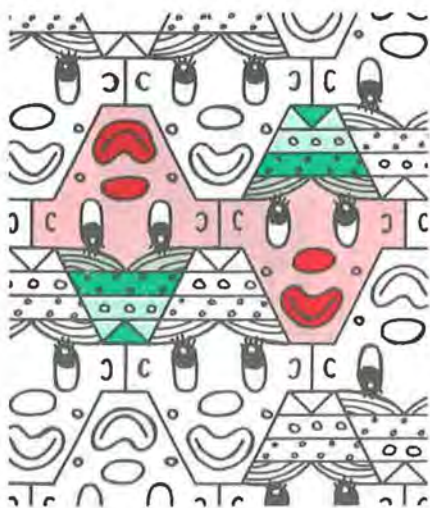


Fig. 7a. (Sonia)



Personnages

Fig. 7b. (Muriel 11 ans).

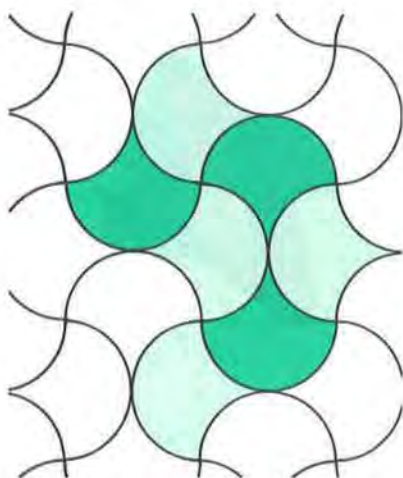


Fig. 8a. Avec des demi-cercles (Patricia 12 ans).

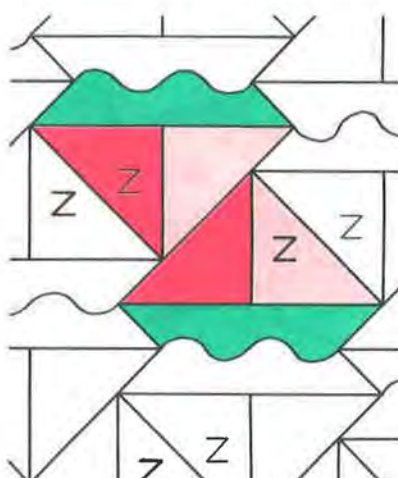


Fig. 8b. «Nautique» (Cédric 12 ans).

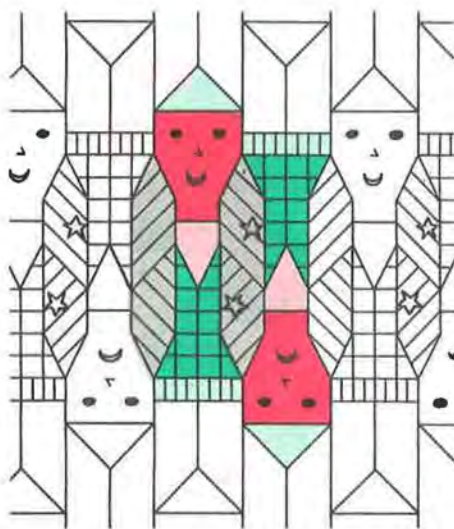


Fig. 9a. Personnages (Anne 12 ans).

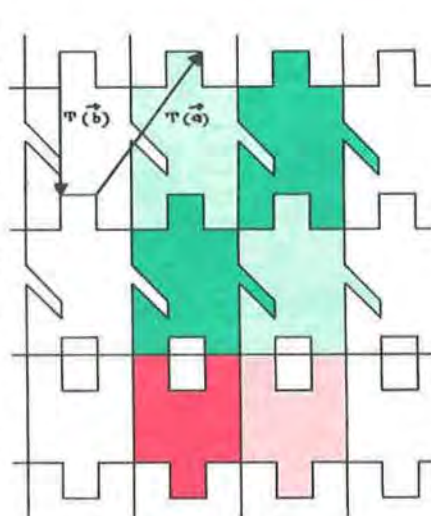


Fig. 9b. (Alain 12 ans).

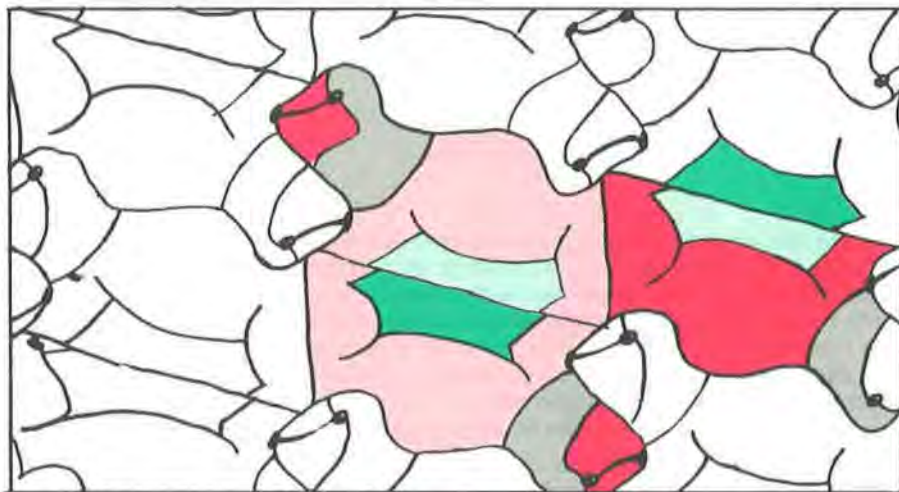


Fig. 10. Lions (Aurèle 12 ans).

Bibliographie

- J.L. LOCHER. *Le Monde de M.C. Escher*. Editions du Chêne, Paris 1980.
 W. JUNDT. *Geometrie 1, 2, 3*. Staatlicher Lehrmittelverlag, Bern 1979.
 Y. BOSSARD. *Rosaces, frises et pavages, vol. I et II*. Editions CEDIC, Paris 1979.

Qui est né sous la bonne étoile?

Si A est votre année de naissance, alors

$$N = A^2 - 3879 A + 3761701$$

est un nombre premier!

(Signé J. Lubczanki dans un document de l'IREM de Lyon)

Math-Ecole offre un abonnement gratuit à tout lecteur qui peut prouver que, pour lui-même, cet énoncé est faux.

A propos des nombres relatifs

par Renato Rossini, Bellinzona

Une proposition didactique

But

L'étude des nombres relatifs comporte pour les élèves, on le sait, beaucoup de difficultés. Les données sur les notions de nombre et de calcul (addition et soustraction) précédemment apprises doivent être modifiées pour faire place à cette modification du champ numérique, notamment si, d'abord, l'enfant a appris que l'addition signifie aller vers la droite sur la ligne des nombres et la soustraction aller vers la gauche, ou bien si, pour lui, additionner signifie ajouter et soustraire enlever. Avec les nombres relatifs, tout est bouleversé: on peut additionner tout en allant vers la gauche ou soustraire en ajoutant des quantités.

On peut bien comprendre que, dans ce marasme numérique, bien des élèves ont beaucoup de peine. Il s'agit surtout des élèves avec de faibles capacités d'abstraction. Les enseignants, dans ces cas, recourent à l'assimilation d'automatismes (par exemple avec la règle des parenthèses), mais si le concept n'a pas été assimilé, surtout devant des problèmes, tôt ou tard les difficultés se présentent.

La méthode qu'on va expliquer ici a surtout deux grands avantages: le premier est celui d'avoir pour but l'assimilation du concept nouveau (et pas celui de reproduire des automatismes) à l'aide d'un matériel concret qui peut être abandonné lorsque l'assimilation a été atteinte. Le deuxième est celui de ne pas modifier le champ numérique que l'élève a appris précédemment: l'addition va toujours vers la droite et signifie toujours ajouter; au contraire la soustraction va toujours vers la gauche et signifie enlever. Pour arriver à ce résultat, la méthode s'appuie sur une représentation des nombres relatifs tout à fait différente de la représentation traditionnelle. Cependant elle ne prétend pas se substituer à la représentation traditionnelle, qui peut ensuite bien sûr être introduite, mais seulement aider les enfants et les enseignants au début de ce nouvel argument. C'est seulement à ce début que nous nous référerons. L'argument pourra ensuite être développé selon les méthodes traditionnelles.

Matériel

Il faut avoir deux séries de fiches à deux couleurs. J'ai utilisé celles du jeu Go + gobang ou celles du Reversi (Ravensburger). Faute de jeux on peut aussi découper des fiches en carton et les colorier soi-même.

Représentation des nombres relatifs

La représentation traditionnelle met les nombres relatifs sur une ligne droite symétriquement par rapport au zéro, les positifs à droite et les négatifs à gauche

(voir fig. 1). Il s'agit bien sûr d'une représentation qui a des rapports avec la réalité (par ex. avec les degrés d'un thermomètre), mais c'est précisément à cause d'elle que surviennent des difficultés au moment de la calculation.

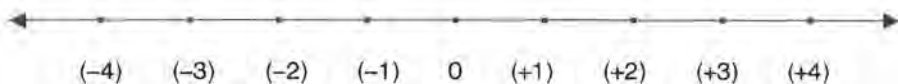


Figure 1

Si l'on représente les nombres relatifs avec deux demi-droites parallèles et correspondantes, les difficultés de calculation seront assez facilement surmontées (fig. 2). On peut placer les fiches à la place des nombres.

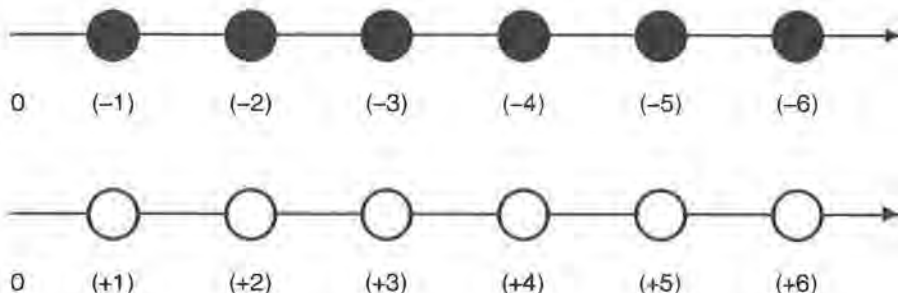


Figure 2

Dans cette représentation en lisant verticalement les nombres on a toujours la somme zéro. On dit que les nombres relatifs sont des paires de nombres qui donnent comme somme zéro. Comme les élèves connaissent déjà le zéro en tant que nombre neutre, les nombres relatifs sont des paires de nombres qui se neutralisent. Cette notion est très importante dans les calculs.

Procédés de la méthode

1. Représentation et lecture des nombres relatifs

L'enseignant demande à l'élève de représenter des nombres positifs ou négatifs. L'élève aligne les fiches.

Ensuite le maître aligne à son tour les fiches et l'élève doit décoder le nombre.

Il s'agit d'exercices très faciles qui ont le but de familiariser les élèves avec la représentation des nombres relatifs. Ils comprennent aussi que les nombres positifs et les nombres négatifs sont des classes de nombres tout à fait différentes bien qu'il y ait une relation (de neutralisation, on l'a vu) entre elles.

2. L'addition

L'addition des nombres positifs ne pose pas de problème aux enfants, elle fait déjà partie de leur expérience. Avec la représentation que j'ai proposée, même l'addition de deux nombres négatifs ne devrait pas se révéler difficile: l'élève ajoute toujours des fiches et procède toujours vers la droite (voir fig. 3).

Addition de (-4) et (-3)

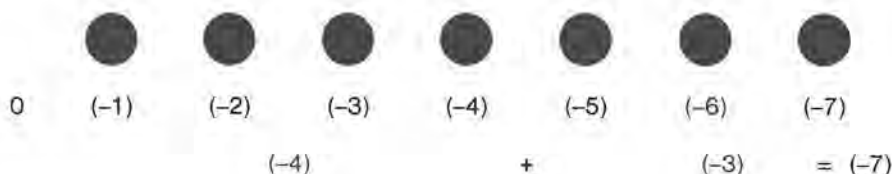
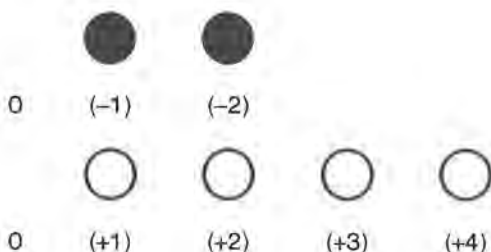


Figure 3

Une première règle est désormais acquise: l'addition de nombres positifs donne toujours une somme positive, l'addition de nombres négatifs donne toujours une somme négative.

La somme d'un nombre positif et d'un nombre négatif est faite facilement en alignant sur deux rangées les nombres à sommer (fig. 4).

Addition de $(+4)$ et (-2)



$(+4) + (-2) = (+2)$

Figure 4

(-2) et $(+2)$ se neutralisent (l'enfant symbolise cette neutralisation en mettant la main sur les quatre fiches) et le résultat est donné par les fiches qui restent.

Avant de calculer, je demande toujours aux élèves de dire le résultat de l'opération. Il s'agit d'un bon et simple moyen pour voir si l'opération est intériorisée, c'est-à-dire si la notion est acquise. Assez facilement les élèves ont appris la façon de calculer et à l'intérioriser. Ils ont même su expliciter la règle: l'addition des nombres positifs et négatifs donne comme résultat leur différence et le signe sera celui de cette différence.

Remarque: Dans les calculs j'ai toujours utilisé les parenthèses pour indiquer les nombres relatifs. En ce faisant on distingue d'une façon très nette le signe qui signifie le nombre de celui qui qualifie l'opération. Il me semble important de maintenir cette distinction dans la phase initiale de l'étude. En un second moment, l'élève doit être amené à comprendre la façon plus concise d'écrire l'opération, par exemple: $5 - 7 = (+5) + (-7)$ ou $= (+5) - (+7)$

Sur la manière de conduire ce passage je n'ai pas conduit d'expériences et donc ça ne sera pas objet de présentation ici.

3. Représentation et lecture des nombres relatifs (deuxième phase)

Pour arriver à la soustraction, il faut faire quelques considérations supplémentaires sur la représentation des nombres relatifs.

Prenons le calcul $(+4) + (-2) = (+2)$ - n'est pas seulement le résultat de l'opération, mais l'opération $(+4) + (-2)$ est une des façons possibles de représenter le nombre $(+2)$ (voir fig. 4). En généralisant, le nombre $(+2)$ peut être représenté par un nombre quelconque de fiches, à condition que le nombre des fiches positives (blanches dans nos exemples) soit supérieur de 2 à celui des fiches négatives. Voir exemples, fig. 5.

Quelques manières de représenter le nombre $(+2)$

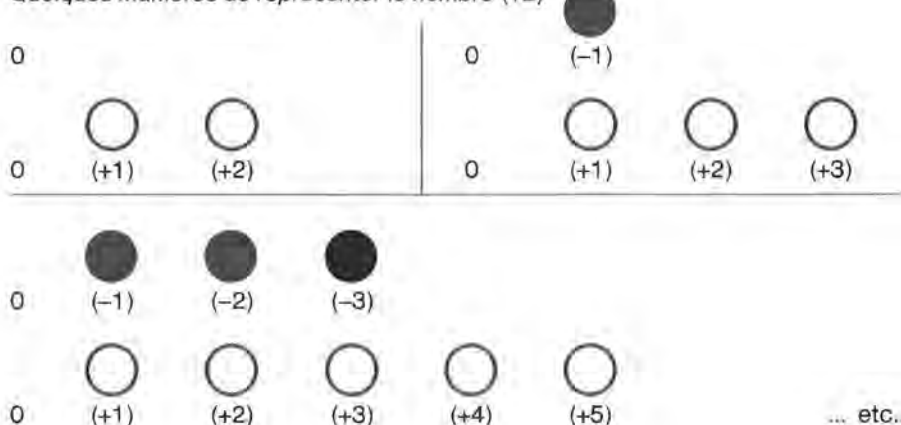


Figure 5

On peut continuer indéfiniment. C'est le concept de nombre relatif qui nous permet cette extension des possibilités de représentation. On peut bien imaginer un nombre positif (ou négatif) comme si à côté de lui il y avait aussi un nombre indéfini de fiches positives qui se neutralisent, mais il suffit d'en enlever quelques-unes pour voir leur force latente s'exprimer !

A ce moment, après avoir raisonné sur la signification des résultats de l'addition d'un nombre positif et d'un nombre négatif (ou vice-versa), j'ai demandé aux élèves de représenter un nombre (positif ou négatif) en utilisant des fiches positives et des fiches négatives ou bien de lire le nombre que j'ai représenté d'une façon pareille.

4. La soustraction

La soustraction où la quantité à enlever est plus petite et de la même classe (positive ou négative) que la première ne pose pas de problème: il suffit de représenter la première quantité et d'enlever la quantité indiquée par le nombre le plus petit.

Les difficultés apparaissent lorsqu'il faut enlever une quantité plus grande que la première ou un nombre positif d'un nombre négatif ou vice-versa. Le procédé est illustré dans la fig. 6.

Calcul à représenter: $(-2) - (+3)$

Nous représentons avant tout le premier nombre (-2) :

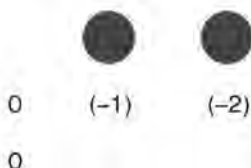


Figure 6

Maintenant il faudrait enlever $(+3)$ mais il n'y a pas de fiches positives. Alors il faut représenter le nombre (-2) de façon qu'il y ait trois fiches positives (voir fig. 7).

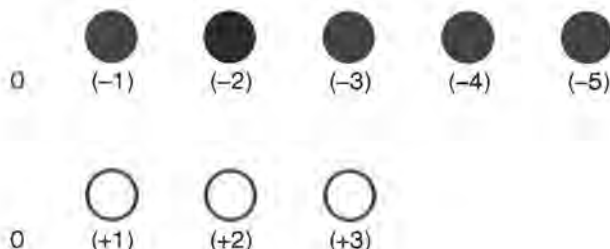


Figure 7

C'est aussi une représentation du nombre (-2) : les 3 fiches positives sont neutralisées par 3 fiches négatives. Maintenant il n'est pas difficile d'enlever les 3 fiches positives et il nous reste les 5 fiches négatives qui représentent le résultat de l'opération.

$$(-2) - (+3) = (-5)$$

On peut aussi représenter l'opération par les symboles numériques :

$$\begin{aligned} (-2) - (+3) &= (-2) + (-3) + (+3) - (+3) \\ &= (-2) + (-3) \\ &= (-5) \end{aligned}$$

Bien sûr, ce stade opérationnel présente pour les élèves quelques difficultés. Mais les résultats après peu de temps sont positifs. Les difficultés principales sont les suivantes :

- les élèves ont tendance à représenter les deux nombres, comme dans l'addition;
- quand on leur demande de représenter le premier nombre à l'aide des fiches de signes opposés, ils ajoutent les fiches nécessaires, mais oublient de les neutraliser, en ajoutant ainsi le nombre de départ;
- parfois ils ajoutent, dans la représentation du premier nombre, un nombre de fiches supérieur ou inférieur à celui qui est nécessaire;
- même en automatisant le procédé de la représentation, ils ont de la peine à l'intérioriser, à anticiper le résultat.

L'expérience a été conduite avec 5 élèves signalés au soutien pédagogique de Lodrino * (Tessin). Il s'agit de deux garçons et trois filles de 13 ans, tous signalés avec des difficultés en mathématique. Dans un cas les difficultés étaient très graves, les autres avaient des attitudes normales pour l'école. Malheureusement l'expérience a commencé quand l'introduction des nombres relatifs avait déjà commencé quelques mois auparavant; elle s'est aussi terminée quand en classe cette étude n'était plus exercée. Donc il n'y a pas eu de confrontation avec le travail en classe.

La méthode est encore à expérimenter, mais les résultats atteints sont encourageants. Tous les 5 élèves ont bien assimilé l'addition (c'est-à-dire intériorisé le procédé et compris le concept) et 4 ont assimilé la soustraction (deux d'une façon sûre). Le dernier élève a assimilé le procédé de représentation, mais il ne sait pas encore anticiper le résultat.

* Ecole moyenne.

POUR VOTRE BIBLIOTHÈQUE...

Le matin des mathématiciens

Entretiens sur l'histoire des mathématiques

présentés par Emile NOËL *

L'histoire des mathématiques connaît depuis quelques temps un regain d'intérêt dans une époque où l'on cherche à restituer la culture scientifique de notre temps dans une culture plus générale qui tienne davantage compte de la dimension humaine. Retracer l'histoire du développement des mathématiques au cours des siècles, c'est peut-être tenter de réhumaniser une discipline qui, par la force des choses, tend à s'isoler dans la tour d'ivoire du formalisme pur et dur.

Emile Noël, producteur à France-Culture, a réalisé seize entretiens avec des historiens spécialistes des différents domaines de la mathématique. L'ouvrage reprend, sous une forme écrite, l'essentiel de ces émissions radiophoniques.

Ce petit ouvrage, relativement facile à lire, vous entraînera de la civilisation babylonienne au Moyen Age européen, en passant par l'Égypte, la Grèce, la Chine, l'Inde, la civilisation arabe.

Six entretiens sont consacrés aux mathématiciens grecs et, de Pythagore à Isidore de Millet, en passant par Archimède, montrent l'importance considérable de l'œuvre des Grecs au cours de quelque douze siècles de notre histoire.

Quatre entretiens expliquent le rôle très important des mathématiciens arabes du VII^e au XV^e siècle. D'autres présentent ce qui nous vient de Chine, ce qui est dû à l'ancienne tradition de l'Inde, etc. >

Les derniers entretiens rappellent que le Moyen Age fut, contrairement à une opinion couramment colportée, une période extraordinairement riche et nous parlent de grands hommes comme Gerbert, Léonard de Pise ou Nicolas Oresme.

L'ouvrage est complété par une bibliographie qui intéressera le lecteur curieux de parfaire son savoir. De nombreuses figures et des reproductions de figures viennent illustrer et animer le texte.

* Editions Belin - France-Culture 1985.

TABLE DES MATIÈRES

Editorial: <i>A. Calame</i>	1
Coup d'œil sur les pavages, <i>D. Poncet</i> 18	2
L'enseignement des isométries, <i>F. Jaquet</i>	8
A propos des nombres relatifs, <i>R. Rossini</i>	18

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:

MM. Th. Bernet, F. Brunelli, A. Calame, R. Délez, M. Ferrario, F. Jaquet, Y. Michlig, F. Oberson, D. Poncet.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 15.—, Etranger F 17.—,
CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an.
Service de la Recherche Pédagogique;
11, r. Sillem, CH 1207 Genève.
(Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983