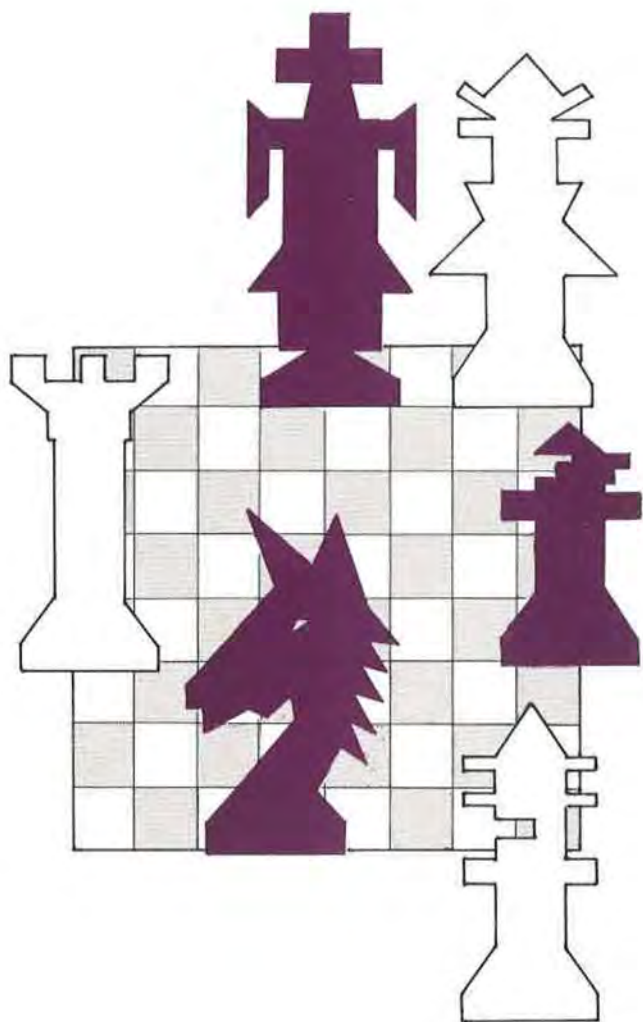


131



MATH ECOLE

JANVIER 1988
27^e ANNÉE

Editorial

*Le 7 novembre 1987, lors du Dies Academicus, l'Université de Neuchâtel a décerné le doctorat *ès lettres honoris causa* à Samuel Roller. Notre revue se fait un plaisir de publier la présentation de Samuel Roller qui a été lue lors de la remise du titre.*

Collation d'un doctorat *ès lettres honoris causa*

Présentation de M. Samuel Roller, professeur

Samuel Roller naît à La Chaux-de-Fonds en 1912 et obtient en 1930 son Brevet neuchâtelois d'instituteur. Il entame alors une carrière d'éducateur qui va lui faire parcourir tous les postes d'enseignement, de celui d'instituteur à celui de professeur d'Université. Diplômé de l'Institut des sciences de l'éducation (Genève) en 1935, il y est nommé chargé de cours en 1948, professeur de pédagogie expérimentale en 1952 et codirecteur – avec cet autre Neuchâtelois célèbre qu'est Jean Piaget – en 1958.

La liste des activités pédagogiques de Samuel Roller est aussi longue que celles-ci sont célèbres. Pour en donner une idée, citons la création de la revue **Math-Ecole** qui va fournir pendant des années à la réforme de l'enseignement de la mathématique une tribune de haute valeur. Citons aussi «le» Roller, comme l'appellent tous les élèves de Suisse romande, c'est-à-dire ce manuel de conjugaison qui constitue l'un de ces instruments dont l'auteur préconise de munir les écoliers; notons au passage que ce manuel est l'un des prolongements de la thèse de philosophie (mention pédagogie) que S. Roller a consacrée à la conjugaison française. Signalons enfin que S. Roller est le fondateur et premier directeur de l'Institut romand de recherche et de documentation pédagogiques (IRDP) et que, de 1970 à 1977, de retour à Neuchâtel, il a su conférer à cet Institut le poids que l'on sait au niveau de toutes les questions pédagogiques romandes, un poids fait de tranquille et sereine médiation entre cantons ainsi que d'apports déterminants dans les tentatives d'homogénéisations entre systèmes scolaires.

Ce que démontre au long de son effort de pédagogue Samuel Roller, c'est que la rencontre entre la théorie et la pratique de l'éducation n'est pas une lubie d'attardé mais une réalité palpable, dont il est loisible de se saisir à la lecture de sa bibliographie, constituée de plus de cent références toutes tournées précieusement vers cette rencontre.

Le Comité de rédaction de Math-Ecole adresse ses amicales et vives félicitations à Samuel Roller, fondateur et premier rédacteur.

A propos des maisons

Un matériel en trois dimensions, très structuré, distribué par l'Economat.
par Edda Gasser et Mireille Snoeckx

La maison de l'escargot

Un matin l'escargot gris
Las de traîner son logis
S'en va chercher un maçon
Pour construire une maison.

Il va trouver le pivot,
L'«atelier» n'est pas ouvert.

Il frappe chez le lièvre,
Le lièvre a de la fièvre.

Il sonne chez l'écureuil,
L'écureuil a mal à l'œil.

Il s'en va chez le serpent,
Le serpent a mal aux dents.

Tant pis dit l'escargot gris
Je garderai mon logis!

Suzanne Cramousel

60 poésies et 60 comptines
choisies par Pomme d'Api
Centurion Jeunesse



Il s'agit de 24 maisons en bois avec:

- 4 couleurs de toit (jaune, rouge, bleu, vert)
- 3 nombres de fenêtres par façade (1, 2, 3 fenêtres)
- 2 sortes de toit (pointu ou plat).

Nous sommes en présence d'un matériel qui présente suffisamment de similitudes avec la réalité pour à la fois provoquer l'intérêt des enfants et les induire en erreur:

- une illusion d'optique de la hauteur des cheminées par rapport au toit plat/toit pointu, alors qu'elles sont identiques;
- une confusion sur le nombre de fenêtres (1 ou 2 fenêtres, 2 ou 4 fenêtres) lorsque l'enfant prend en compte la totalité de la maison ou seulement une façade;
- une invraisemblance des couleurs de toit confrontée à la réalité vécue;
- une pauvreté des critères: peu de choix dans les possibilités de tri.

Néanmoins comment utiliser ce matériel dont nous avons repéré les limites de telle sorte qu'il n'enferme pas les élèves dans des schémas de classement trop rigides et leur permette de raisonner en manipulant?

Il peut être employé selon le tableau suivant:

ESPACE 2E - 1P	CLASSEMENT 1P - 2P
Les paysages	Jeu du portrait
- a) description d'arrangements - b) jeux de communication avec ou sans écran	Tableaux de classification
- construction d'après modèle, photographie, dessin de la construction (avec papiers, avec crayon)	tableau à double entrée arbre de classement diagramme de Carroll (2P)
- déplacements circuits aménagements de cheminements, chemin le plus long, le plus court d'une maison à l'autre (avec ou sans quadrillage)	Relations

Arbre
de classement



Quelques conseils importants

– *Une appréhension libre du matériel:*

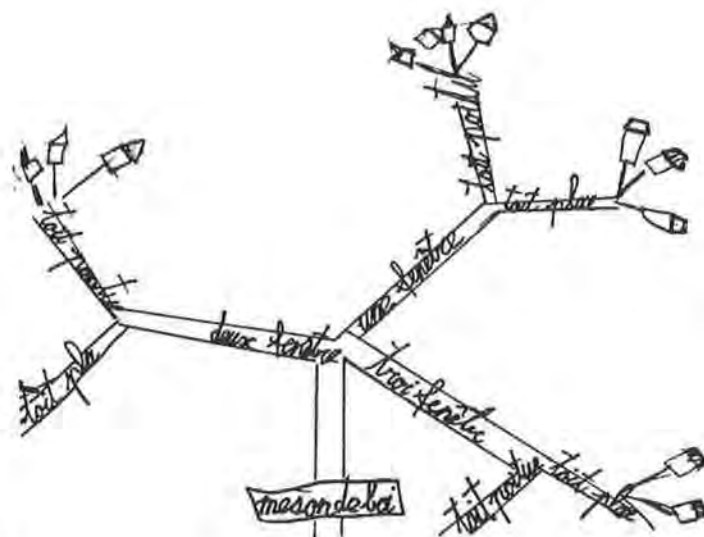
celui-ci est mis à la disposition des enfants dans les coins-jeux et laissé à leur arbitraire. Ils auront ainsi le loisir de se mettre d'accord sur les critères sans que l'adulte intervienne. Cette première étape est plus ou moins longue suivant les élèves. Elle est au minimum d'une quinzaine de jours afin que tous aient pu toucher et jouer avec les maisons.

– *Lorsqu'une consigne est donnée:* il faut veiller à ne pas proposer la totalité du matériel,...

- ... pour empêcher une régularité dans le classement, inexistante dans la réalité (6 maisons au toit jaune ne seront pas forcément opposées à la même quantité d'une couleur différente);
- ... pour faire apparaître l'ensemble vide;
- ... pour provoquer le raisonnement.

	deux fenêtres	deux fenêtres	une fenêtre
trois rampes			
deux poutres			
trois poutres			
deux poutres			

Tableau à double entrée



Arbre de classement

CONSTRUCTION DU DIAGRAMME DE CARROLL EN 2P

Matériel: papier java 3 maisons au toit bleu
2 maisons au toit vert
2 maisons au toit rouge
1 maison au toit jaune.

Présentation des maisons

Elles sont cachées dans un carton. Les enfants tirent une maison au hasard et en brossent un rapide portrait. Ce jeu permet de préciser ce qui va être pertinent pour le groupe présent.

- **Maîtresse:** «Nous allons construire un quartier de villas. Pour les vendre, nous devons préparer une maquette. Comment peut-on placer les maisons pour que les acheteurs puissent trouver le plus vite possible la maison qui leur convient?»

Voici un extrait d'un moment vécu dans la classe:

- **Robert:** «Si je veux trois fenêtres, je les mets ensemble».. (Il aligne les maisons choisies).
- **Maîtresse:** «Sur quelle parcelle vont-elles être construites?»
Robert fait de sa main le tour d'une partie du papier java représentant le terrain.
D'autres enfants disposent le reste des maisons sur une autre partie du terrain sans les différencier d'après le nombre des fenêtres.
La répartition suivante est ainsi effectuée:
2 et 1 fenêtre 3 fenêtres

La maîtresse relève:

- «Sur ce terrain, il n'y a rien d'autre que des maisons.»

Reza acquiesce et écrit sur une étiquette le mot «maison».
(Le référentiel est ainsi établi).

- **Maîtresse:** «Jusqu'où pourra-t-on mettre toutes les maisons qui ont 3 fenêtres?».

Les élèves cernent l'emplacement occupé par lesdites maisons. Ensuite, les enfants s'occupent du reste du matériel et le trient en deux autres colonnes (1 fenêtre, 2 fenêtres). 3 colonnes (parcelles) sont de ce fait effectuées.

- **Maîtresse:** «Combien avons-nous d'ensembles?»
- *Catherine:* «3».
- **Maîtresse:** «Comment appellera-t-on la première parcelle?»
- *Loïc:* «3 fenêtres».
- **Maîtresse:** «Pourquoi avez-vous eu envie de faire 3 parcelles?»
- *Loïc:* «Parce que les maisons ont 1, 2 et 3 fenêtres».
- **Maîtresse:** «J'aimerais avoir seulement 2 parcelles. Comment vais-je faire?»
- *Raphaël:* «On partage le terrain en deux, au milieu».
- **Maîtresse:** «Quel nom vais-je donner à cette partie du terrain?»
- *Lorraine:* «3 fenêtres». (Elle étiquette).
- **Maîtresse:** «Qu'allons-nous faire avec les autres maisons?»

Sabbel met les maisons avec 1 et 2 fenêtres dans l'autre parcelle. Elle précise:
 - «On écrit la même chose (3 fenêtres) et on barre».

- **Maîtresse:** «Explique!»
- *Sabbel:* «On écrit 3 fenêtres et on barre. Ça veut dire qu'il n'y aura pas de maison avec trois fenêtres dans cette partie-là».

(Les étiquettes sont placées).

- **Maîtresse:** «Quelles sortes de maisons vais-je pouvoir mettre sur cette parcelle?» Elle la désigne de la main.
- *Robert:* «Les maisons avec 1 fenêtre et avec 2 fenêtres».

3 fenêtres	3 fenêtres
x bleu	x bleu
x bleu ^x verte	x verte
x rouge	x rouge
x jaune	

- **Maîtresse:** «Comment pourrait-on faire pour avoir 4 parcelles?»
- **Christelle:** «On partage jusqu'au bout comma ça!»
(geste horizontal du bras).

	3 fenêtres	3 fenêtres
x bleu	x bleu	x bleu
x bleu		
x verte	x verte	
x rouge	x rouge	
x jaune		

- **Maîtresse:** «Comment va-t-on arranger les maisons?»
- **Nathalie:** «On met 4 d'un côté et 4 de l'autre».
- **Maîtresse:** «De quoi nous occupons-nous? Du nombre de maisons?»
- **Reza:** «Mais non!»

Long silence.

- **Maîtresse:** «Qu'y a-t-il sur cette étiquette?» (3 fenêtres).
«Montrez-moi le terrain réservé aux maisons à 3 fenêtres!»
- **Reza:** «On pourrait mettre les bleues ici et toutes les autres là».

Une fois les étiquettes effectuées et placées, les élèves répartissent les maisons.

	3 fenêtres	3 fenêtres
bleu	x x	x
bleu	x verte	x verte
	x rouge	x rouge
	x jaune	

- **Maîtresse:** «Dans quel sens regarde-t-on pour voir les maisons au toit bleu?»
(Grand geste de la main dans le sens horizontal, de la part des enfants).
«Pourquoi y a-t-il 1 maison sur cette parcelle et celles-là ici?»
- **Loïc:** «Parce que les autres maisons à 3 fenêtres ne sont pas bleues».
- **Maîtresse:** «Où poserais-je une maison avec 4 fenêtres?»
«Une maison avec toit violet?»

Distribuer les maisons. Chaque enfant la pose dans la case qui convient. Après chaque placement, enlever la maison afin d'éviter l'imitation.



Commentaires

Cette approche, quoique dirigée, est longue. Les enfants tâtonnent. Il est vital de les pousser à s'exprimer, à s'expliquer, que chaque élève puisse placer sa maison en justifiant son choix.

Il faut relever l'importance de la consigne de départ, ouverte par rapport aux critères mais rigoureuse au niveau de l'ordre. Pour se retrouver, il faut trier, classer.

Une fois le critère choisi, on ne change pas d'«idée» et on classe jusqu'à épuisement.

Il est extrêmement important de proposer un objet qui n'existe pas sur la table pour vérifier la compréhension. L'idéal serait d'avoir des maisons brutes permettant aux enfants d'inventer les critères.

COMMENT ABORDER LES RELATIONS EN 1P?

Une douzaine de maisons, prises au hasard, sont éparpillées sur le sol. A l'entour, un groupe d'élèves s'apprête à les disposer sur une maquette en forme de labyrinthe.

1. *A chacun son idée*

Alexandre est visiblement gêné par l'arrangement de John.

– «Quelle pagaïe!»

Il s'empare des maisons au toit pointu et les aligne en bande contiguë le long d'une avenue.

Stéphane refuse l'alignement: «Ça fait désordre. Y a des toits de toutes les couleurs».

L'enseignante intervient:

– «Quelle intention avais-tu Alexandre en choisissant ces maisons-là et pas les autres?»

Alexandre: – «Je voulais mettre là seulement les maisons au toit pointu».

Xénia place immédiatement ailleurs les maisons au toit plat.

Cécile opine de la tête: – «D'accord, elles ont le toit plat, mais pas les mêmes couleurs».

Alexandre réaffermi son idée: – «Qu'est-ce que ça peut te faire, j'ai mis ensemble les maisons au toit pointu et Xénia celles au toit plat; tant pis pour les couleurs».

La maîtresse photographie l'arrangement constitué en répétant:

– «Les maisons d'Alexandre ont le toit pointu, celles de Xénia le toit plat, mais les toits ne sont pas de la même couleur».

Puis elle propose aux enfants de donner suite à l'idée de Cécile visiblement intéressée par les couleurs des toits uniquement.

Toutes les maisons sont enlevées et Cécile constitue un arrangement avec les maisons au toit jaune. Marie-Blanche poursuit en disposant sur la maquette les maisons au toit vert, ainsi de suite jusqu'à épuisement de la situation.

Alexandre remarque: – «Avant on avait deux quartiers, maintenant on en a 4».

La maîtresse tire profit de l'observation d'Alexandre:

– «Et si on essayait d'avoir un quartier de moins, est-ce possible?»

Après hésitation, les élèves placent ensemble les maisons avec 3 fenêtres, ailleurs celles avec 2 puis 1 fenêtre. Alexandre revient à charge.

– «Je refais mon idée, je l'ai eue en premier et c'est la plus bonne».

Nous retrouvons nos deux arrangements un avec toit pointu, en face l'autre avec toit plat.

A ce stade de la manipulation, l'enseignante a laissé à chaque enfant qui le désirait, la possibilité de préciser ses intentions. Si cette étape n'est pas respectée, l'élève qui n'a pas pu exprimer son opinion reste fixé à son idée et n'écoute pas les autres remarques.

2. Approche de l'objectif visé

La maîtresse saisit la première opportunité pour guider les enfants vers le but à atteindre, en l'occurrence l'approche des relations.

Sabrina qui n'avait encore rien dit, prend une voiture, la place devant une maison à toit pointu, vert, avec 2 fenêtres et la conduit vers une autre maison à toit plat, jaune, avec 2 fenêtres.

Le groupe réagit vivement: – «T'as pas le droit, elles ont pas le toit de la même couleur.»

Sabrina, visiblement ravie de la «farce» qu'elle vient de faire: – «Mais elles ont toutes les deux 2 fenêtres».

Alexandre vexé: – «Allons dis-le avant, comment on peut savoir nous à quoi tu penses».

L'enseignante précise: – «Avec sa voiture, Sabrina voulait relier deux maison qui ont toutes les deux 2 fenêtres, elle ne s'est pas intéressée à la couleur et à la forme du toit».

– «Y a-t-il encore d'autres maisons qui peuvent être reliées en tenant compte de l'idée de Sabrina?»

Les enfants se piquent au jeu.

Puis:

– Alexandre: «Il faudrait mieux tout écrire pour s'en rappeler, ça devient de plus en plus dur.»

La maîtresse demande: – «Que faut-il écrire?» en s'emparant d'une bande de papier.

Deborah, suite à la démarche de Marie-Blanche:

– «Maintenant, il faut écrire 3 fenêtres».

L'enseignante répète: 3 fenêtres et précise:

– «3 fenêtres, alors j'écris: même nombre de fenêtres».

Alexandre: – «Super»!

Les élèves s'affairent. Chacun cherche une idée, prend le véhicule et le fait circuler d'une maison à l'autre.

Les enfants devinent l'intention du réalisateur et annoncent :

– « Toit jaune ».

La maîtresse murmure toit jaune et précise au moment d'écrire :

– « Même couleur de toit ».

On finit par devenir audacieux en préconisant une négation :

– « Pas le même nombre de fenêtres ».

Progressivement, on en vient à écrire une longue histoire, ce qui les fascine : « Même nombre de fenêtres, mais pas même forme de toit et pas même couleur de toit ».

Afin d'aller plus vite et d'éviter de déchiffrer tous ces messages, comme de toute évidence, on partait toujours d'une maison pour arriver vers une autre, en adoptant la même stratégie, Stéphane suggère de ne plus écrire, mais de mettre une flèche.

– « C'est plus marrant relève Marie-Blanche, mais surtout précise Catherine :

– « On peut dire plus de choses sans se fatiguer à écrire ».

Alexandre s'inquiète de l'autre groupe de la classe, occupé différemment, et à qui il faudra expliquer ces découvertes. Il suggère d'adopter des couleurs de flèches différentes selon la signification du lien verbal. Par exemple, les flèches en carton gris seraient réservées à « même couleur de toit », celles en carton brun à « même forme de toit », celles en carton orange à « même nombre de fenêtres » et en carton noir pour « ce qui n'est pas ».

Plus tard, le jeu se compliquera, Stéphane disposera quelques flèches sur la maquette, il faudra deviner la signification du lien verbal et placer les maisons adéquates. Peu à peu, on adoptera une couleur neutre pour tous les messages.

En conclusion

Il est primordial de développer la capacité de situer, d'ordonner, de classer, celle aussi de comprendre et de représenter une situation, de favoriser le **développement des pouvoirs d'adaptation et d'invention**.

A tous les degrés, des manipulations sont nécessaires. C'est en employant des matériels variés, matériels de **fortune** souvent, que le travail se fait de la manière la plus efficace.

Ainsi les élèves manipulent des objets, apprennent à les décrire, à énumérer leurs propriétés (de façon affirmative et négative), effectuent des collections. Les activités doivent être accompagnées d'une verbalisation constante des dé-

marches et l'enseignant(e) peut de ce fait s'appuyer sur la nécessité de communication entre élèves pour introduire dans un deuxième temps seulement un moyen de représentation adéquat, constituant un symbolisme susceptible d'être compris par tout le monde.

Si l'élève n'a pas eu le temps de construire concrètement, par le biais de nombreuses manipulations et observations, la notion de classement, il aura d'autant plus de difficultés à travailler ultérieurement à partir de cadre imposé par l'enseignant(e), en l'occurrence les différents diagrammes de classement prévus par le programme.

(Voir: «Les activités de classement», Maria-Luisa Leoni, Cahier N° 12 du Service de la Recherche Pédagogique.)

Un jeu à introduire dans votre classe...
... ou à programmer sur votre ordinateur

Voici un jeu que l'on joue à deux joueurs, avec un dé. Lorsque c'est son tour, un joueur lance le dé autant de fois qu'il veut jusqu'à ce qu'il décide de s'arrêter, ou obtienne le nombre 1. S'il fait apparaître 1, son tour est fini et il ne marque pas de points. Sinon, il marque la somme des valeurs apparues durant ce coup. Ainsi, s'il joue trois fois et fait apparaître 2, 5 et 4, il marque 11 points. S'il fait apparaître 2, 5 et 1, il ne peut plus jouer et ne marque rien. Le premier joueur à atteindre 100 a gagné.

... En étudiant la probabilité qu'une suite de coups se traduise par un gain, on trouve deux stratégies possibles:

- rejouer tant que le total des points est inférieur à 20;*
- jouer au plus six coups.*

On peut aussi décider de jouer celle des deux possibilités qui se présente la première. On s'arrête à vingt, si on l'atteint en moins de 6 coups, sinon on s'arrête au sixième coup.

On peut faire que l'ordinateur soit l'un des joueurs. On prévoira les trois stratégies dans le programme. Au début de chaque partie, l'ordinateur choisira entre elles, au hasard. On donnera une égale probabilité à chaque stratégie. On peut maintenant travailler sur une suite de parties. Au départ de la suite, les trois stratégies auront chacune la probabilité 1/3. Quand l'ordinateur gagne une partie, il augmente d'une petite quantité la probabilité de la stratégie qui vient d'être utilisée, et diminue de la moitié de cette quantité les probabilités des deux autres (de façon que la somme de ces probabilités reste égale à 1). Quand il perd, il fait l'inverse, en diminuant la probabilité de la stratégie utilisée, et en augmentant les deux autres.

Extrait de: Jacques Arsac «Les machines à penser», Ed. Seuil, 1987

Le problème de la région perdue

par Danielle Berney

Souvent les journaux, les tests d'entrée dans des écoles, des entreprises ou en apprentissage proposent des questions qualifiées de «logiques» et qui sont du type:

Trouvez le nombre qui doit, logiquement, s'inscrire à la suite de cette série de nombres: 1, 2, 4, 8, 16, ...

Pour tout un chacun, la question est facile!

Il n'y a qu'une réponse possible: 32!

Personne ne songerait à s'étonner si un enseignant sanctionnait un élève qui aurait répondu, par exemple, 31. On trouverait même des explications à cette soi-disant erreur: faute de calcul, inattention, manque de connaissance de la table de multiplication, ...

Et pourtant! Peut-être a-t-il raison, cet élève, dans certaines conditions. Si le maître n'attend que la réponse 32, la consigne est incomplète, elle doit contenir la loi de formation de la série pour ne pas être ambiguë:

*Chaque nombre est le double du précédent.
Trouvez le nombre qui doit s'inscrire à la suite de cette série:
1, 2, 4, 8, 16, ...*

– Mais alors, diront certains, c'est trop facile ainsi! On donne tous les renseignements, il n'y a rien à chercher! Les élèves doivent savoir ce que le maître attend!

Est-ce que vraiment les élèves doivent, peuvent connaître ce que le maître a dans sa tête et qu'il n'exprime pas?

Si on ne veut pas leur donner la loi de formation, alors demandons-leur de compléter la série et de justifier leur réponse par la loi qu'ils auront fait fonctionner:

1, 2, 4, 8, 16, 17

Il s'agit de nombres choisis au Bingo.

1, 2, 4, 8, 16, 32 , 64 , ...

J'ai fait $\otimes 2$ entre un nombre et le suivant.

1, 2, 4, 8, 16, 16, 16, ...

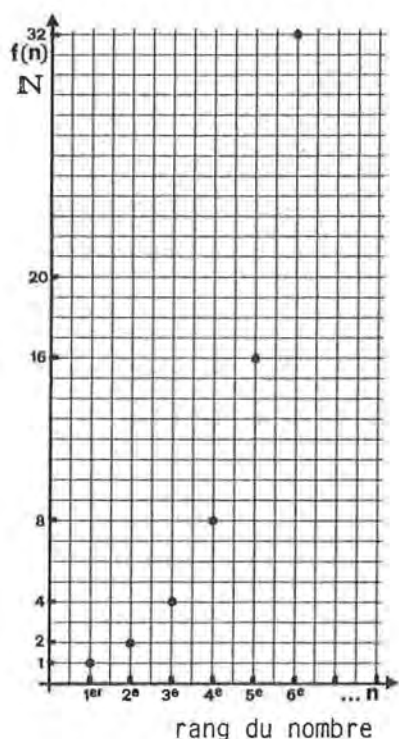
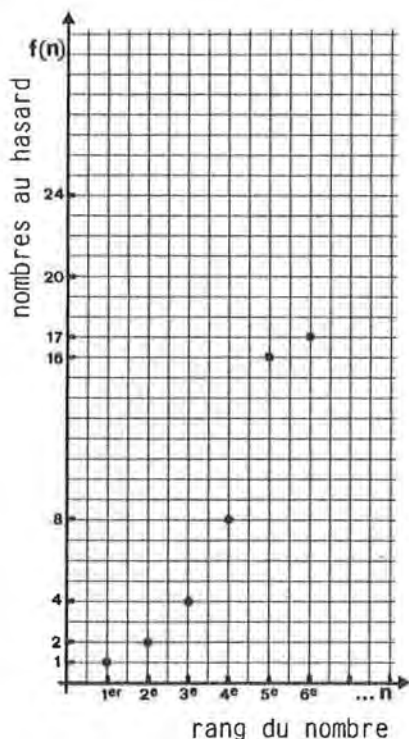
Ce sont des températures le dernier jour de chaque mois de l'année, à 8 h du matin!

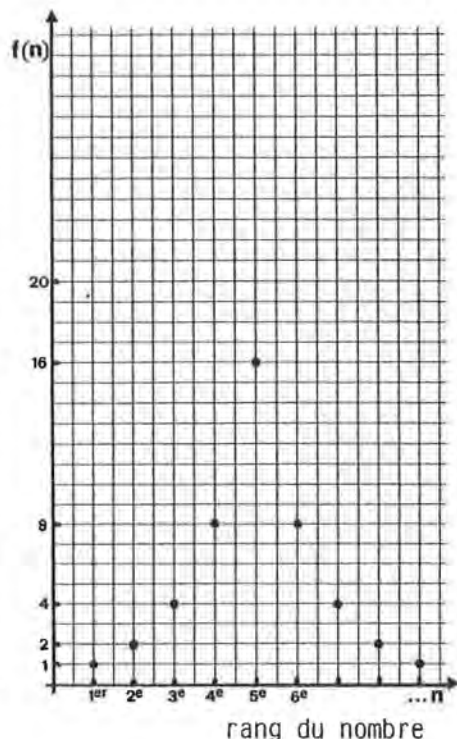
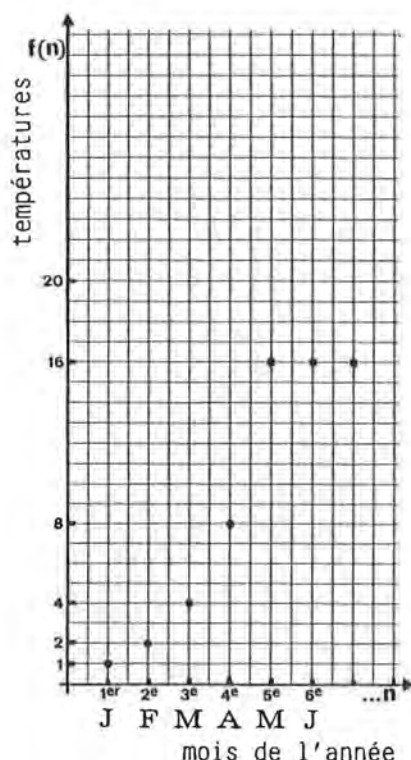
1, 2, 4, 8, 16, 8, 4, 2, 1.

Je reviens en arrière, dans le même ordre.

Hasard, puissances de 2, relations, classement dans un ordre donné, ces mots ont à voir avec la mathématique.

Chacune de ces séries peut être représentée graphiquement:





Qu'en est-il de la série 1, 2, 4, 8, 16, 31 ?

Hasard? Erreur?

Dans une classe de 5P, à Versoix-Genève, au mois de mai, j'ai proposé cette consigne pour un problème intitulé «la région perdue».

*Soit un cercle et des points sur ce cercle.
On joint par des droites tous les points entre eux 2 à 2. Quel est le nombre maximum de régions ainsi déterminées?*

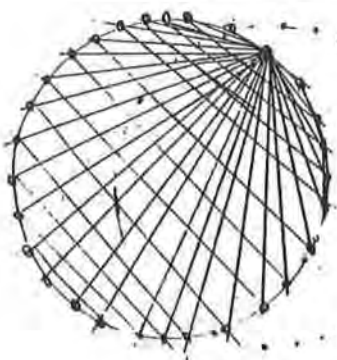
- *Etudiez toutes les situations que vous pouvez.*
- *Mettez en correspondance le nombre de points, de droites, de régions.*
- *Notez toutes vos remarques et essayez de les justifier.*

Après un temps non négligeable de compréhension et d'appropriation de la tâche proposée, j'ai vu se dégager des grands «moments» de travail, au cours de 3 séances de 2 unités chacune:

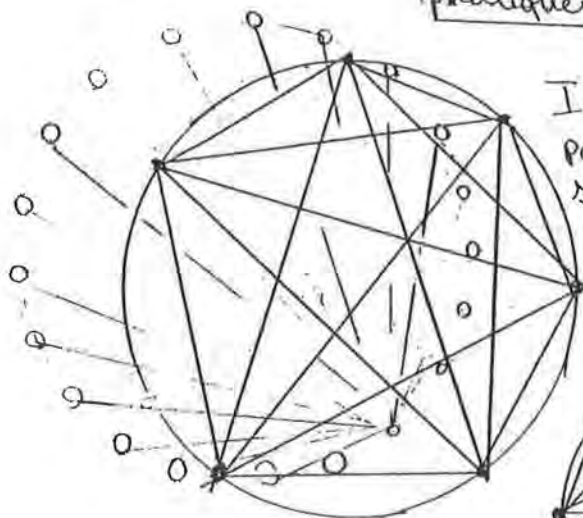
- Dessins inutiles parce que comportant trop de points pour en tirer des renseignements:

① Evelynne

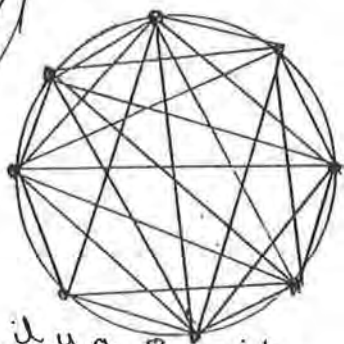
la région perdue.



J'ai mis 29 petits points
disposés autour du disque.
Maintenant, j'ai 29
régions. Qu'est-ce qu'une
région? C'est l'espace entre
une droite et une autre
droite. Cela ne me
convient pas car c'est
pratiquement impossible.



Ici, j'ai placé 6
points. Que vois-je
sur ce disque?
une étoile.



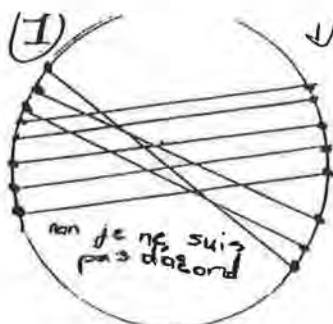
Ici, il y a 8 points

- Dessins utiles et mise en correspondance:

nombre de points $\rightarrow$ nombre de régions,

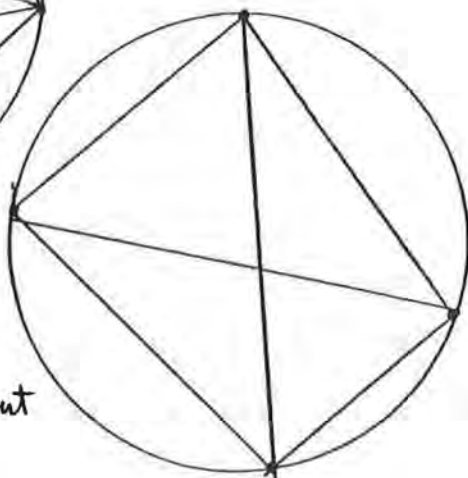
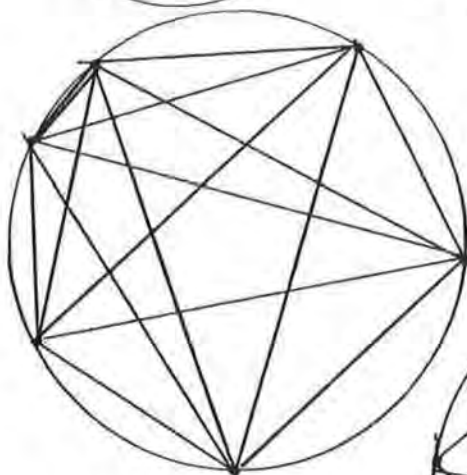
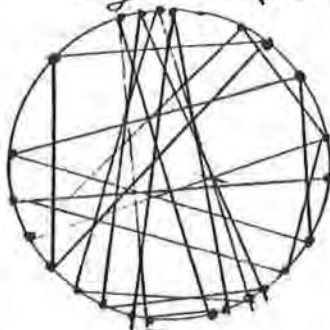
ou nombre de points $\rightarrow$ nombre de routes,

choisis dans le désordre:



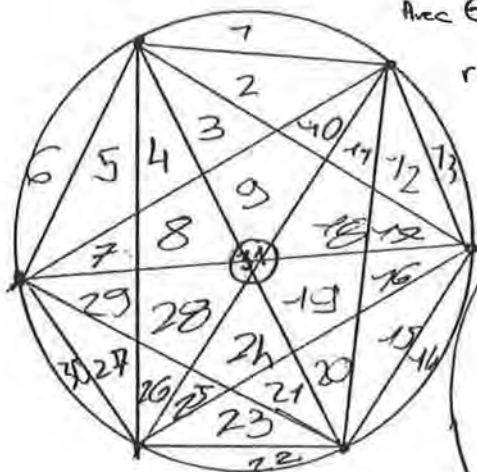
↓ vers

non je ne suis plus d'accord

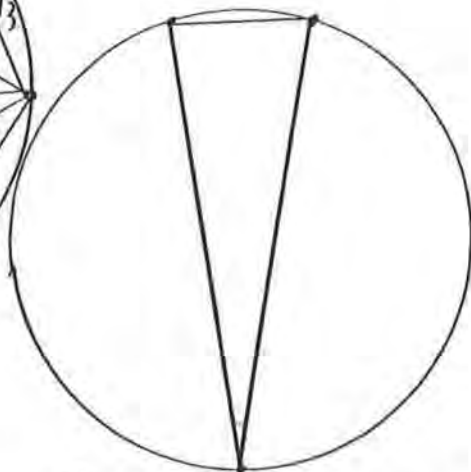


avec 4 points on peut
faire 8 régions

Avec 6 points on peut avoir 30 régions

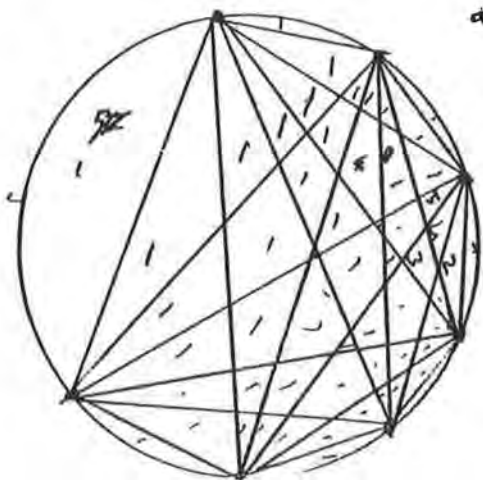


On peut faire des régions avec des points pairs et impairs



Avec 3 points on peut avoir 4 régions

Avec 7 points on peut avoir 57 régions

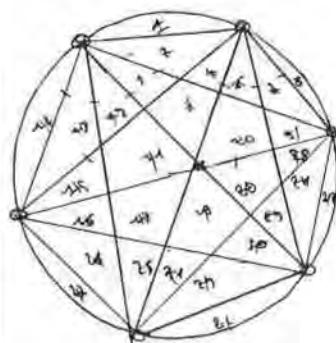
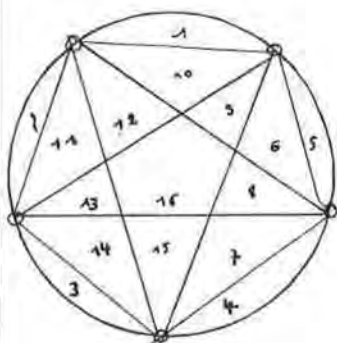


Avec 2 points on peut faire 2 régions

– Etablissement de tableaux de correspondance:

nombre de points	nombre de routes	nombre de régions
2	1	2
3	3	4
4	6	8
5	10	16
6	15	31
7	21	57
8	28	99
9		
10		

Véronique



- Essais de prolongation des tableaux en cherchant des «machines», des fonctions possibles, et en vérifiant leur adéquation pour l'ensemble des résultats, et non pour une ou deux lignes seulement.

points	MACHINE	Nombre de routes
Vérification 2	$\frac{(2-1) \times 2}{2} =$	1 7+2
3	$\frac{(3-1) \times 3}{2}$	3 7+3
4		6 7+4
5		10
6		15
7		21
8		28
9		36
10	$\frac{(N-1) \cdot N}{2}$	45

- Représentations graphiques des résultats sûrs.
- Possibilité de faire fonctionner une «machine» impossible à inventer par des élèves¹, mais donnée par le maître et dont chaque élève comprend bien la raison puisqu'il a cherché à la fabriquer. C'est l'occasion, dans ce problème de «la région perdue», de consulter des tables de puissances, des machines à calcul, de réactualiser la notion de puissance, d'affiner la notion de variable, d'utiliser des parenthèses, d'enchaîner des opérations différentes.

Tous ces moments illustrent le déroulement d'un problème, tel que Gérard Charrière l'a exposé dans un cours sur le raisonnement mathématique:

- **La donnée expérimentale, le réel:** ici, c'est le problème posé.
- **La question:** ici, «combien de régions déterminées $[f(n)]$ pour un nombre de points donné $[n]$?»
- **La phase inductive:** moment où l'on cherche un modèle qui convient bien aux nombres expérimentaux et qui permettra ensuite d'anticiper d'autres réponses.
C'est la recherche d'une loi, d'une fonction, d'une formule.

Dans la suite 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... le modèle est $(\times 2)$, mais dans la suite des nombres du problème de «la région perdue», le modèle est un polynôme du 4^e degré. (Voir la note au bas de la page).

- **La phase déductive:** il s'agit d'appliquer le modèle pour anticiper d'autres réponses.

ici, pour 3 points:
$$\frac{3^4 - 6 \cdot 3^3 + 23 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24}{24}$$

pour 6 points:
$$\frac{6^4 - 6 \cdot 6^3 + 23 \cdot 6^2 - 18 \cdot 6 + 24}{24}$$

- **La prévision:** c'est le calcul, grâce au modèle choisi et après la phase déductive, des réponses suivantes possibles.

ici, pour 3 points:
$$\frac{81 - 162 + 207 - 54 + 24}{24} = 4$$

pour 6 points:
$$\frac{1296 - 1296 + 828 - 108 + 24}{24} = 31$$

¹ Formule pour le calcul du nombre de régions en fonction du nombre de points:

$$n \rightarrow \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$$

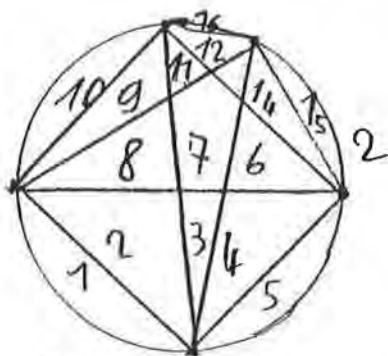
- **La vérification:** il s'agit de vérifier, à partir du réel, que les réponses sont exactes, que le modèle est bon.

Si «ça marche», alors le modèle est bon.

Si «ça ne marche pas», il faut reprendre le raisonnement en deçà de la phase déductive. En effet, en général, la faille se trouve au niveau de l'hypothèse, de la fabrication du modèle, donc de la phase inductive.

Avec toute la modestie qui s'impose, on peut voir ce déroulement chez les élèves confrontés à ce problème.

- Un exemple de la phase inductive:



Louis et Adrien.

j'ai pensé au 2^e rond que j'ai fait avec cinq points et comme je ne peux pas partir et revenir sur le même point cela me faisait 4 droites pour chaque point. alors j'ai pensé 5 points fois 4 droites = 20 régions

- Les remarques suivantes contiennent à la fois la phase inductive, la phase déductive, la prévision et la vérification.

La région perdue

Véronique

Remarques

On a pris le plus grand rond, mis 6 points et relié. On a trouvé 31 régions. Il y a six points. Un point relie 5 points. On a fait $5 \times 6 + 1 = 31$ ~~il y en a 31~~. Avec 8 points on fait $8 \times 7 + 1 = 57$ donc ça ne marche pas. Avec 4 points on fait $4 \times 3 + 1 = 13$ Il y en a 8 donc ça ne marche pas non plus. Avec 7 points on a 57 régions. Avec 5 points on a 16 régions. Avec 3 points on a 4 régions.

- Ce dernier exemple montre un modèle (x2) qui fonctionne très bien jusqu'à 5 points.

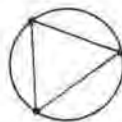
Les élèves se contentent de ces premiers résultats vérifiés par le dessin pour généraliser.



1 point → 1 région



2 points → 2 régions



3 points → 4 régions

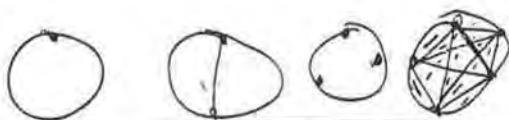


4 points → 8 régions



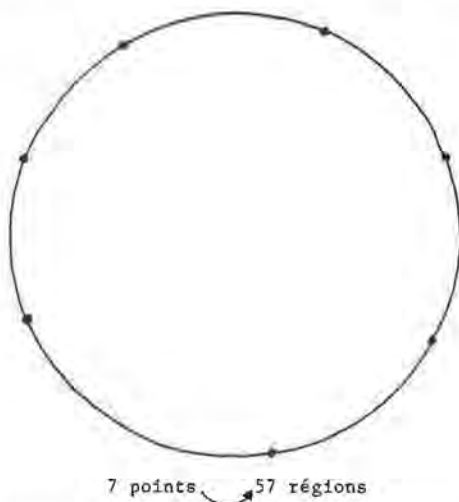
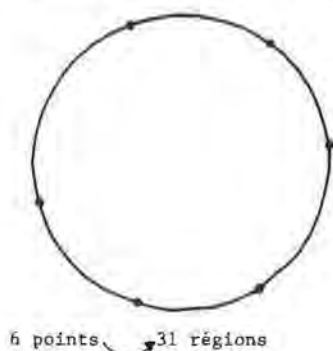
5 points → 16 régions

Katia



nombre de points	$\times 2$	nombre de régions
2		2
3		4
4		8
5		16
6		32
7		64
8		128
9		256
10		512
11		1024
12		2048

Le maître alors réclame une vérification pour 6 et 7 points et demande à ces élèves-là de «juger» leur modèle.



Il est difficile d'accepter que le modèle que nous avons «inventé» et qui nous satisfait ne colle pas avec la réalité, ici les dessins.

Plusieurs élèves ont cherché la 32^e région, refait leur dessin plus grand pour la trouver!

Comme j'avais lancé, au début du travail, ce petit défi: «Pouvez-vous imaginer pourquoi j'ai donné ce titre, la région perdue, à cette situation», certains ont alors réagi:

- La voilà, la région perdue, c'est la 32^e, elle n'existe pas!

Les enfants opposent parfois une résistance délibérée à la recherche de «ce qui cloche» dans leur manière de s'y prendre... Au lieu de chercher où ça coince, l'enfant efface tout. Parfois, il renonce. Dans d'autres cas, il s'entête, et reprend ses essais une fois, dix fois, trente fois, avec une persévérance admirable; mais toujours il repart à zéro... Et c'est bien compréhensible. L'éthique scolaire n'a que trop bien nettoyé la place: là où nous voyons un bon programme avec tout juste un petit défaut auquel remédier, l'enfant voit du faux, du mauvais, du nul. L'école enseigne que les fautes sont un mal. Résultat, elles sont un repoussoir, et l'idée ne viendrait pas de les regarder de près, de s'y attarder, de leur accorder un peu de réflexion.

Seymour Papert, «Jaillissement de l'esprit», Flammarion, 1981

Une situation déchirante

par Michel Chastellain

Compte rendu à propos d'une situation déchirante

Indications générales

Maître M. Chastellain
Observateur W. Gfeller
Classe 7^e latine de La Tour-de-Pellz
Elèves quinze
Date mai 87
Durée quatre périodes de quarante minutes chacune

Outils utilisés

Document Le cahier de théorie est à disposition sans indication spécifique du maître.
Matériel Crayon, gomme, compas.

Réalisation pratique et remarques générales

Selon rapport ci-joint.

Lequel d'entre nous n'a-t-il jamais été confronté à une envie soudaine de rupture avec son mode habituel d'enseignement?

Comment faut-il procéder pour «flanquer un coup de pied dans la fourmière» et, par là-même, dynamiser l'intérêt des élèves?

Que proposer comme démarche «ouverte» dont une part du bénéfice puisse être directement rattachée à une activité étudiée en classe?

Parmi les différentes réponses que chacun d'entre nous pourrait formuler face aux questions précédentes, je souhaite m'attarder, dans cet article, sur **les expériences menées par la technique des situations** qui ont, notamment, l'avantage d'être **motivantes**, qui possèdent **un sens** et qui permettent à chaque élève (ou groupe d'élèves) de mener à chef une étude **en fonction de ses propres possibilités**.

Contexte général

L'activité présentée ici a été réalisée par une classe de 7^e année latine.

L'étude des notions sous-jacentes au travail (médiatrice, cercle circonscrit, cercle de Thalès remonte à deux mois environ, et, depuis, n'a pas fait l'objet d'un rappel particulier.

Le temps consacré à la recherche ainsi qu'au compte rendu demandé, dont quelques extraits apparaissent par la suite, est de quatre périodes de quarante minutes chacune.

Les quinze élèves sont répartis par groupes de trois alors que, pour ne pas être en reste, je m'acoquine à un collègue dont les penchants pour le travail à deux sont semblables aux miens!

La phase initiale est consacrée à une démonstration de l'allure que prend une déchirure sur la jambe droite d'un vieux pyjama... Puis, sans autre information, les élèves reçoivent la consigne suivante:

Mon pantalon est déchiré; si ça continue on verra tout...



Tu désires cacher entièrement cette déchirure à l'aide d'une pièce de tissu de forme ronde, dont la dimension doit être la plus petite possible.

Comment procéder?

Point de départ

Divers types d'accrocs sont représentés sur des feuilles de carton mises à ta disposition. Utilise-les toutes pour effectuer ta recherche.

Un petit rapport résumant le résultat de ton travail (constatations, propositions, façon de procéder, ...) serait le bienvenu.

Nota

Chaque groupe reçoit en fait sept feuilles sur lesquelles les «bords» des accrocs sont symbolisés par des angles aigus ou obtus.

Déroulement des opérations

- | | |
|-------|--|
| 5 min | Après un flottement général «normal» dû à la prise en charge des informations, à leur tri, ainsi qu'à l'organisation du fonctionnement du groupe, une équipe décide de se répartir la tâche: chacun reçoit une figure de départ et doit se débrouiller seul avec. Vive la collaboration! |
|-------|--|

- 10 min Cédric: «... y faut faire les bissectrices...» et quelques secondes après: «... non, c'est les médiatrices...»
- 20 min Thierry: «... faut-il passer plus loin que les sommets pour éviter un prolongement de la déchirure?...» et encore: «... d'ailleurs pourquoi chercher avec des ronds, on pourrait gagner du tissu avec des ovales et des rectangles...»
- 30 min Désaccord au sein d'une équipe à propos de la figure qui représente une déchirure dont «l'angle» est obtus. Alexandra obtient un cercle circonscrit relativement grand et prétend que cette solution est la plus économique. Vu le résultat, Karine affirme qu'il doit y avoir plus petit: Thalès!
- 35 min Quel pied! Deux groupes ont déjà feuilleté spontanément leur cahier de théorie!

Constatations

Dans l'état actuel de la recherche, les deux solutions (cercle circonscrit et cercle de Thalès) sont apparues ou en passe de l'être, et bien que les élèves manifestent un besoin de justification évident, leurs convictions restent mal formulées. Il nous faut passablement «titiller» pour que les différents groupes testent leurs propositions sur chaque figure d'étude afin d'en tirer «la substantifique moelle»!

- 45 min Delphine: «... ça y est, si les médiatrices se croisent à l'intérieur du triangle, on fait le cercle circonscrit. Si elles se croisent à l'extérieur, il faut prendre le plus grand côté et construire son cercle de Thalès...» Et l'éternel inquisiteur de reprendre: «... comment le savoir sans construire les médiatrices?...»
- 50 min Un des groupes «patine»! Laurent ne trouve aucun intérêt à ce travail, ce qui ne l'empêche d'ailleurs pas de s'enguirlander copieusement avec Nicolas à propos de la différence entre une médiatrice et une bissectrice.
- 55 min Ouah! Le premier groupe entame sa rédaction.

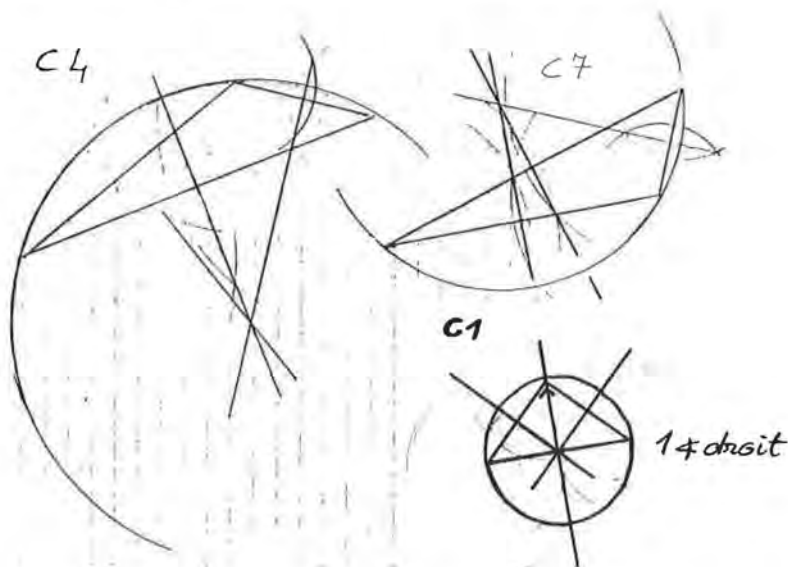
Relances

Le rôle du maître, en l'occurrence des deux, a été essentiellement celui du dépanneur, notamment par l'intermédiaire de questions du style:

- Le morceau de tissu proposé est-il réellement le plus petit possible?
- Votre proposition est-elle valable dans les autres cas?
- Comment savoir si cette méthode donne le bon résultat?
- Où faut-il placer le centre du disque?
- Le troisième côté, non tracé, peut-il jouer un rôle?
- Existe-t-il une relation entre le grand côté de la déchirure et le rayon du disque?

Extraits des comptes rendus

Nous avons réfléchi quelques minutes au problème. Nous avons pensé assez rapidement aux médiatrices. Une fois les médiatrices de chaque triangle construites, nous avons tracé les cercles circonscrits. Mais nous avons découvert une faille dans notre raisonnement, les triangles C4 et C7 pouvaient être recouverts par un plus petit cercle que le cercle circonscrit.



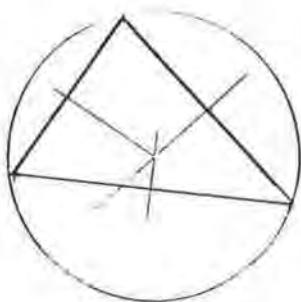
Ensuite nous avons observé chaque triangle et nous avons découvert que, dans le C1, le cercle de Thalès et le cercle circonscrit étaient confondus. Nous venions de découvrir la piste du cercle de Thalès. En observant le C4 et

Le C7, nous avons découvert que, quand l'intersection des médiatrices était à l'intérieur du triangle, il fallait tracer le cercle circonscrit alors que, lorsque l'intersection se trouvait à l'extérieur, il fallait faire le cercle de Thalès du plus grand côté.

Manière de procéder :

Regarder la dernière.

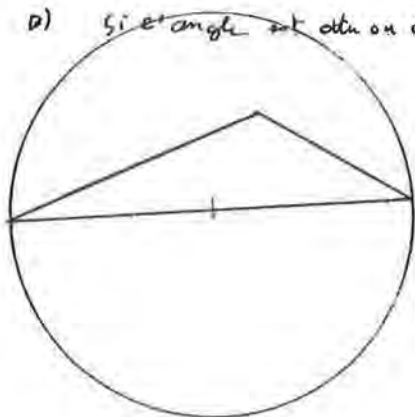
A) Si l'angle est aigu



1) Tracer les 3 médiatrices

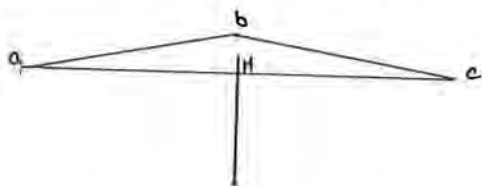
2) Tracer le cercle circonscrit au triangle. Son centre est l'intersection des 3 médiatrices

B) Si l'angle est obtus ou droit



1) Tracer un cercle passant par les 2 extrémités du grand côté dont le centre est le milieu de ce même grand côté

ATTENTION : il peut y avoir de grande perte de tissu suivant la taille de la déchirure



il faut un immense cercle pour couvrir une petite partie

Pour savoir comment procéder, nous avons testé plusieurs possibilités:

- hauteurs
- médianes
- bissectrices

En conclusion

« Parmi les connaissances d'un programme, seules sont explicitement enseignées celles à propos desquelles a pu être identifié un processus complet d'enseignement: présentation d'un corps de savoir donnant lieu à un ensemble d'exercices et de problèmes « faisables » par les élèves et « corrigibles » par les enseignants, le tout permettant des contrôles normalisés évaluant les acquis ».

Cette maxime, retrouvée dans un rapport anonyme, nous rappelle que la majorité des plans d'études proposent des **objectifs généraux** (c'est notamment le cas en Suisse romande), objectifs contre lesquels les enseignants viennent souvent buter, bien qu'ils y soient parfaitement sensibles.

Une **situation** comme celle du « pantalon déchiré » est, en conséquence, un excellent remède à cet état de fait, car elle s'appuie sur des notions techniques « mesurables » comme: bissectrices - médiatrices - cercle circonscrit - Thalès - et elle touche aux objectifs généraux, notamment parce qu'...

... elle encourage l'élève à la recherche personnelle

... elle favorise ses découvertes

... elle développe sa capacité d'adaptation à une situation nouvelle tout en lui procurant des outils mathématiques qui lui seront nécessaires dans la vie.

TABLE DES MATIÈRES

Editorial: M. Samuel Roller, Dr honoris causa	1
A propos des maisons, <i>E. Gasser et M. Snoeckx</i>	2
Le problème de la région perdue, <i>D. Berney</i>	14
Une situation déchirante, <i>M. Chastellain</i>	27

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:

MM. Th. Bernet, A. Calame, R. Délez,
P. Duboux, M. Ferrario, F. Jaquet, Y.
Michlig, F. Oberson, D. Poncet.**Rédacteur responsable:** R. Hutin**Abonnements:**Suisse: F 16.—, Etranger F 18.—,
CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an.
Service de la Recherche Pédagogi-
que; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève.
(Tél. (022) 35 15 59).**Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983**