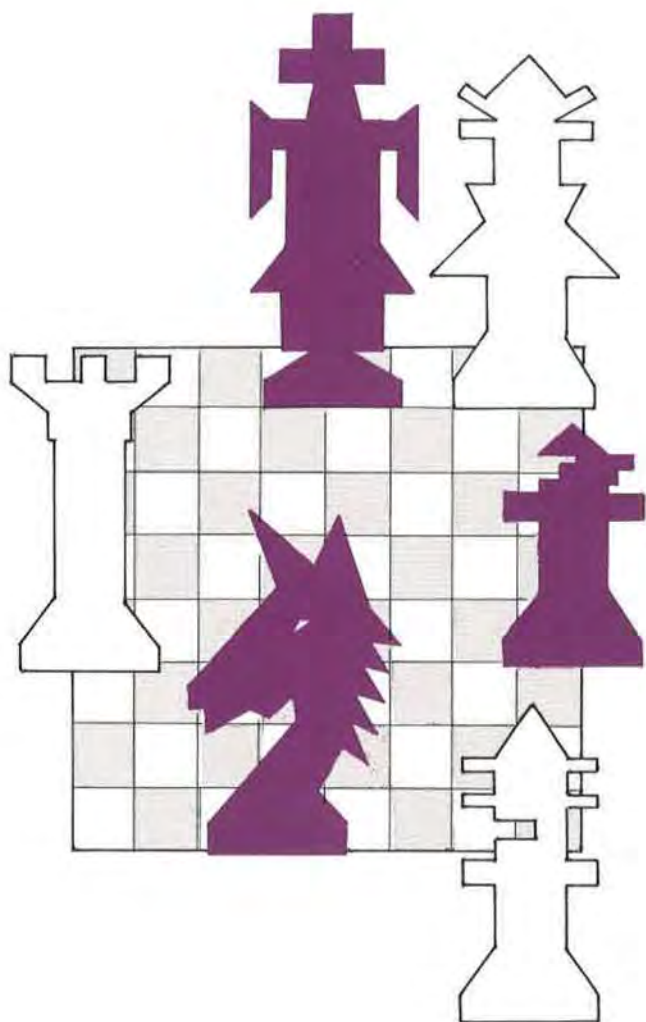


132



MATH ECOLE

MARS 1988
27^e ANNÉE

Editorial

«Un mathématicien crée le beau, au même titre qu'un peintre ou un poète: un ensemble d'idées, tout comme un ensemble de couleurs ou de mots, doit posséder une harmonie intérieure. La beauté est la pierre de touche de la démarche mathématique: il n'y a pas de place pour la laideur.»

H.H. Hardy

Est-il permis de rêver
Face à une toile immaculée?
Est-il permis de rêver
Face à une feuille de papier?
Oui, à croire je persiste
Que le beau existe!

Laissons-nous envahir par le rêve à la découverte du beau en mathématique. Encore faut-il admettre que ce qui est beau pour certains ne l'est pas forcément pour d'autres. Alors envisageons-le plutôt sous la forme «doit posséder une harmonie intérieure».

Qui dit harmonie, dit pureté, délicatesse, proportions, équilibre,...

Comment rester insensibles alors à l'harmonie des solides platoniciens? à la pureté des édifices anciens dont les proportions admirables sont égales au nombre d'or? à la délicatesse subtile de plusieurs produits de la nature illustrant la suite de Fibonacci? à l'équilibre parfait du triangle de Pascal?...

Toute culture bien faite engendre des fruits de qualité même si elle occasionne souvent la contestation.

«Encore faut-il s'interroger sur la nécessité d'une culture mathématique. Il existe une réaction obscurantiste parmi quelques intellectuels dont la formation est poussée dans les secteurs littéraires et artistiques: brandissant l'étendard de la révolte contre le scientisme, ces pourfendeurs de sciences exactes rejettent l'idée de culture mathématique: pour eux, la culture ne serait que littéraire et artistique, le reste serait... de la technique.»

Christian Houzel, président de la Société Mathématique de France

Le rêve est-il terminé
Ou au contraire ébauché?
Il laisse en tout cas la porte ouverte
A la pédagogie de la découverte!

Roger Délez, S.R.P.

A propos du triangle de Pascal

par Nadia Guillet

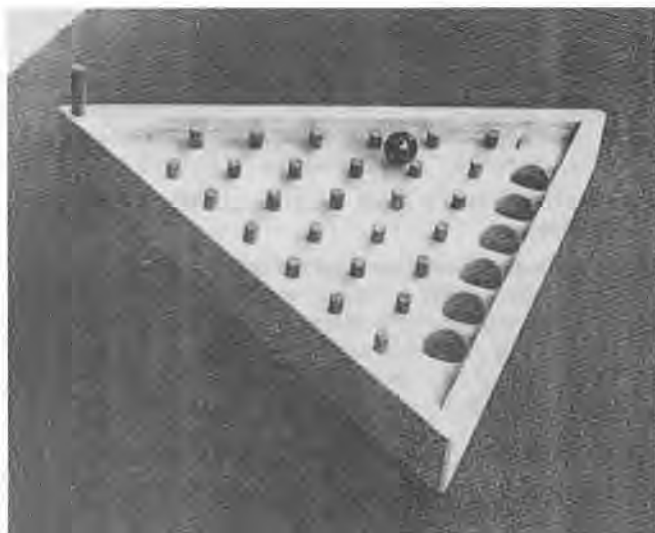
Dans le manuel romand de 6^e année, l'atelier 28 propose un problème susceptible d'aboutir à un modèle graphique du triangle arithmétique de Pascal. La question est claire, les règles sans ambiguïté; la difficulté réside dans l'organisation d'un travail méthodique et ordonné permettant d'aboutir à la solution:

1 5 10 10 5 1

soit 32 chemins différents possibles.

Le modèle présenté faisant allusion à un billard, j'ai placé les enfants devant un petit modèle physique afin de voir comment ils appréhendent la notion de probabilité dans ce cas concret, d'observer ensuite la difficulté du travail sur le modèle graphique et surtout d'apprécier le lien entre les deux types de situations.

Dans le cadrer de la Société Genevoise de Travail Manuel (SGTM), avec l'aide de Gérard Charrière, professeur de mathématique, de Claire-Lise Perruchoud et de Jean Cugno, maîtres de travaux manuels, nous avons réalisé un modèle en bois du triangle de Pascal *.



* Les feuillets explicatifs peuvent être demandés à la SGTM, case postale 176, 1211 Genève 16. Ils concernent la construction de 6 objets de nature mathématique portant les numéros 360 à 366.

Le travail s'est déroulé en octobre dans une classe à deux degrés (5P-6P) puis dans une classe à un degré (6P). Dans la première classe, il a pris trois séances de 1 h. 1/2 et dans l'autre cinq séances de 1 h., chaque séance à une semaine d'intervalle.

Dispositif: 6 groupes de 2 ou 3 élèves.
Un plan triangulaire incliné en bois et une bille par groupe.
Feuilles de papier et crayon pour chaque élève (pas de gomme!).

Les enfants sont informés de la nature de l'activité:

- petite recherche
- étalement sur plusieurs séances
- nécessité de noter ses observations et remarques.

A. Expérimentation pratique

Consigne:

Pendant une vingtaine de minutes, vous allez faire descendre la bille le plus grand nombre possible de fois. Vous constaterez alors si elle tombe plus souvent dans certaines cavités que d'autres ou si elle aboutit à peu près également dans chaque trou.

Avant de commencer, il est demandé aux enfants de faire des pronostics.

Dans la première classe, il ressort de la discussion générale que la grande majorité d'entre eux penche pour les cavités extrêmes, quelques élèves pour le centre et quelques autres pour l'égalité entre les différents trous. Il ne leur est pas demandé d'explicitier leur intuition.

Dans la classe de 6P, la majorité des enfants est persuadée que la bille tombera plus souvent au milieu, peu d'élèves pronostiquent l'égalité ou les cavités extérieures.

Je leur propose donc de passer à la pratique en leur précisant que j'attends d'eux des preuves de leurs constatations.

En me promenant parmi les groupes, je vois que certains élèves décrivent en détail ce qui se passe:

Léonie Valérie Virginie

1. elle tombe partant
2. Chaque fois qu'elle cogne au bout de bois elle change de direction.
3. elle regarde jamais la même direction
4. Quelques fois elle se bloque sur un bâton
5. Elle rebondit toujours sur les bâtonnets
6. Elle ne peut pas aller au coin d'en bas

D'autres élèves (la grande majorité) constatent «au juger» quelles sont les cavités les plus fréquentées. Ils notent ou expriment des phrases contenant les expressions «... plus souvent...», «... presque toujours...», «... presque jamais...». À ma demande de précision, ils proposent que je reste à côté d'eux «pour voir» pendant qu'ils lancent la bille ou alors ils tentent un essai d'explication de la raison pour laquelle la bille tombe plus souvent au centre qu'ailleurs.

Quantifier pour préciser vient à l'idée de très peu d'élèves.

Pour sortir de cet état de chose, je choisis, selon les enfants, l'une ou l'autre des relances suivantes:

a) Exemple externe à la situation:

Tu me dis que tu vas très souvent au cinéma. Moi aussi j'y vais très souvent. Ton «très souvent» et mon «très souvent» sont-ils les mêmes? Pouvons-nous préciser pour pouvoir les comparer?

b) Relance directe par rapport à la situation:

«Très souvent» et «presque jamais» sont des expressions trop vagues. Utilise les nombres pour préciser chaque cas.

Deux élèves ont recours à une expression en «pour cent». Toutefois, «90 %» ne représente pas une donnée statistique mais a simplement la signification de «très souvent»:

M: Vous avez constaté que la bille tombait plus souvent au milieu. Pouvez-vous préciser?

E: Elle tombe plus souvent au milieu... à 90 %.

M: Ah! ... Qu'est-ce que cela veut dire?

E: Si on lançait 100 fois la bille, elle tomberait 90 fois dans ce trou.

M: Vous avez lancé 100 fois la bille et trouvé...

E: Non, mais ça doit être à peu près ça.

Je leur demande de vérifier. Deux à trois minutes plus tard c'est terminé!

M: Vous avez déjà lancé vos 100 coups?

E: Non.

M: Alors expliquez-moi ce 30 %!

E: On a lancé 10 coups. C'est tombé 3 fois dans ce trou. Donc pour 100 coups cela fait 30.

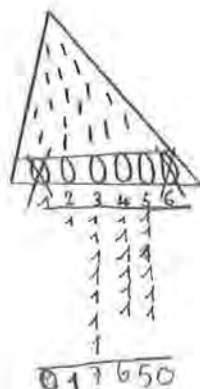
c.q.f.d.!

Une fois la nécessité reconnue de relever les fréquences pour chaque cavité, il est intéressant d'observer les différentes façons de procéder.

Patrick et Roxane, déjà cités, cochant en vrac au-dessous de la numérotation des cases.

Laura, Chloé et Jacqueline alignent leurs unités, ce qui leur permet de voir directement quelle est la colonne gagnante:

1:0
2:1
3:7
4:6
5:5
6:0



Benoît et Marc comptabilisent au fur et à mesure:

RATER		
G1	G2	G3
1	1	1
2	2	2
3	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
		7
		8
		9
		10
		11
		12
		13
		14
		15
		16
		17
		18

RATER		
D3	D2	D1
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7		7
8		8
9		9
10		10
11		11
12		12
13		13
14		14

B. Observation et discussion des résultats pratiques

La partie délicate, mais intéressante commence, celle de l'interprétation des résultats. De l'expérimentation physique faite par les enfants au modèle abstrait de Pascal il y a un gouffre!

Voici quelques passages qui demandent réflexion.

Nous relevons les résultats obtenus par chaque groupe:

Groupes:	cavités:					
	①	②	③	④	⑤	⑥
A	3	4	21	18	17	7
B	14	31	59	65	25	7
C	7	32	23	43	18	9
D	5	17	44	30	37	12
E	3	6	18	14	6	14
F	6	9	7	24	16	1

Si les groupes A et B peuvent dire que les deux cases centrales sont les plus fréquentées, il n'en est pas de même des cinq autres groupes pour qui seulement l'une des deux cases centrales a un score plus élevé, l'autre score élevé appartenant à différentes cavités.

Remarques:

- A partir du moment où les enfants ont commencé à cocher les fréquences, il aurait fallu laisser plus de temps. La répartition par groupe ne se serait certainement guère rapprochée du schéma de Pascal, mais, pour la discussion future, la mise en évidence de l'imperfection du matériel aurait été plus aisée.
- Le fait de travailler avec plusieurs objets imparfaits permet une compensation ou annulation des défauts. Mais, à ce stade de la recherche, les enfants ne peuvent pas tirer parti de cet argument. Ils ne savent pas «ce qu'il faut trouver». De plus, il n'ont pas de schéma en tête. Ils ont donc fait des hypothèses qui, de cas en cas, se sont trouvées confirmées ou non.

Une relance devient inévitable. Je demande aux élèves de faire le total des fréquences par cavité «comme si le travail avait été fait sur un seul triangle ressemblant à leurs six triangles à la fois!»

Cavités:	①	②	③	④	⑤	⑥	
Total:	41	104	167	200	118	44	Total général: 674

Constatation: sur 674 descentes, la bille va nettement plus souvent dans les cases ③ et ④, moins souvent en ② et ⑤ et encore plus rarement en ① et ⑥.

M: Comment expliquez-vous ce phénomène?

Jean:

Parce que c'est un triangle et la bille on la lance de la pointe du triangle et ça passe au milieu

Corinne:

cela dépend où on la pose ~~est~~ ^{ent} comme on la pose, ~~entre les~~ (Peut-être que le socle est en crevassé) A chaque fois la bille ^{va vers} ~~retourne~~

Le milieu même si on la pose de côté c'est comme si la bille ^{avait} ~~avait~~ sa trajectoire

faite qui l'oblige à aller le plus souvent au milieu.

Marc:

Je pense que c'est parce que le fond du triangle est un ~~peu~~ creux

Camilla:

Je pense que la bille va toujours au milieu car elle part du milieu et parce que ^{quand} ~~qu'en~~ elle part du milieu elle zigzag toujours vers la gauche et la droite c'est pour ça qu'elle arrive toujours plus souvent vers la 3 et la 4.

Patrick:

Elle va plus souvent à l'intérieur, car le poids de la bille l'entraîne à aller tout droit.
Elle fait des zig-zags
Ce sont les premiers bâtonnets qui décident de quel côté elle ira.

Dans le même temps, oralement et spontanément, certains enfants se demandent si les résultats seraient les mêmes avec une bille plus lourde ou plus légère, avec une bille plus petite, en lançant plusieurs billes à la fois, en redressant le triangle le plus possible afin d'augmenter la pente.

Certaines de ces questions se résoudront d'elles-mêmes en cours de recherche, d'autres devraient faire l'objet de pistes à explorer.

Revenons à l'explication du phénomène. Afin de mieux le cerner, j'engage la discussion sur la notion de chemin le plus court sur une pente:

- eau qui coule,
- caillou qui roule,
- descente à skis ou en luge,
- etc.

Les enfants sentent bien que l'élément qui se déplace emprunte la plus grande pente qui est aussi le chemin le plus court. Toutefois, en ce qui concerne le tri-

angle, ils n'ont pas l'impression, car la distance est courte, que la pente en direction des cavités extérieures est moins forte que celle du centre.

C'est par référence à leur pratique du ski qu'ils s'en convainquent.

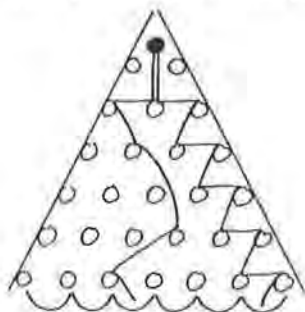
Le rôle des bâtonnets est de faire dévier la bille mais on ne sait pas trop comment.

Sans insister, je décide de passer à la phase suivante.

C. Création d'un modèle graphique

Au tableau, je dessine une représentation du triangle sur lequel des élèves viennent tracer quelques chemins possibles de la bille.

Voici par exemple, deux types de tracés effectués:



Je réalise alors l'importance de la discussion à venir:

définir le trajet théorique de la bille!

De la discussion commune, il ressort que si on ne lance pas la bille, mais qu'on la laisse descendre «comme de l'eau sans pression»:

- elle suit naturellement la plus grande pente,
- elle ne remonte jamais,
- elle ne va pas horizontalement,
- entre deux diagonales, elle choisit celle dont la pente est la plus grande,
- comme elle est grosse, elle heurte un bâtonnet à chaque étage (elle ne saute jamais d'étages).

Première conséquence: elle ne devrait jamais toucher les bâtonnets placés le long de la bordure.

E: Mais, maîtresse, je peux vous assurer que ma bille a souvent touché les bâtonnets du bord. Venez voir!

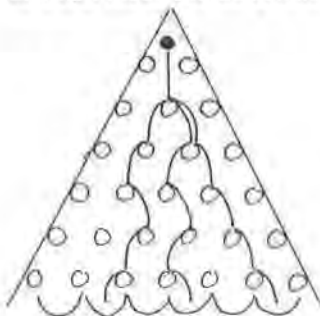
M: Oui, mais théoriquement...

Nous rediscutons de la pratique:

Si la pente est trop forte, la bille rebondit et alors tout est possible, y compris sauter par-dessus bord! Il faut imaginer le cas où la bille descend très douce-

ment et ne rebondit presque pas. Imaginer qu'elle «coule», qu'elle descend le long d'une pente très faible...

Les enfants tracent alors, au tableau, quelques chemins qui tiennent compte des remarques précédentes, remarques qui constituent, en fait, une définition du trajet théorique de la bille:



Remarque:

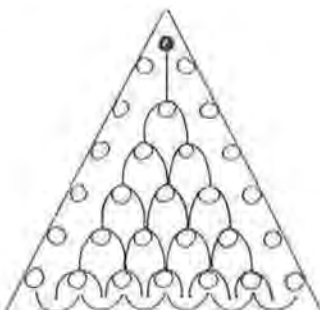
Une réflexion a plusieurs fois été émise par les élèves dans la première partie de la recherche:

«C'est comme si la bille avait sa trajectoire faite qui l'oblige à aller au milieu». D'autre part, il est admis par tous que la bille heurte toujours le premier bâtonnet. Je propose alors aux enfants d'examiner ce que la bille peut faire au fur et à mesure qu'elle descend.

Pour ce travail, il faut tenir compte des *diverses composantes de la définition* et effectuer un raisonnement qui envisage à chaque étage l'ensemble des *cas possibles* ainsi que la notion de *choix*:

Lorsque la bille rencontre le premier bâtonnet, elle peut descendre à gauche ou à droite. *Si* elle descend à gauche, elle rencontre un nouveau bâtonnet qui peut l'envoyer à gauche ou à droite. *Mais* si elle descend à droite, elle rencontre également un bâtonnet qui peut l'envoyer à droite ou à gauche. Et ainsi de suite.

Cette phase du travail permet de susciter ce type de *raisonnement par déduction* à partir de propositions prises comme *hypothèses*. Dans le cas particulier, il est même reconduit plusieurs fois. Les enfants n'ont encore que rarement rencontré cette sorte d'opération intellectuelle et c'est l'occasion de leur permettre d'y accéder.



La grande majorité des élèves s'approprient très bien le raisonnement et trace ce que nous convenons d'appeler l'*ensemble des choix possibles de la bille*:

Les divergences, et il y en a quelques-unes, proviennent toujours du non-respect (ou de la non-acceptation) de la définition du trajet théorique de la bille.

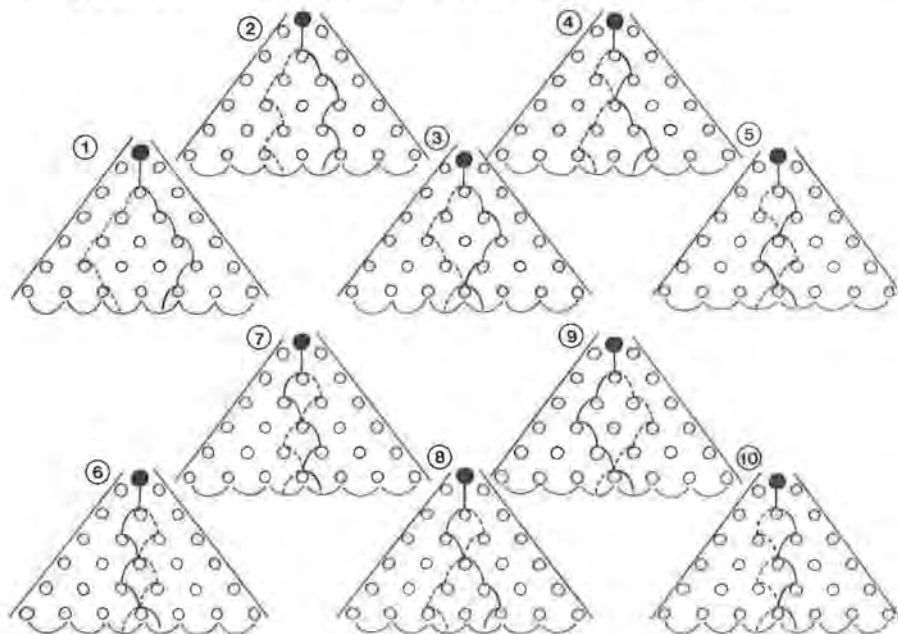
D. Dénombrement des cheminements théoriques

Consigne:

Chercher le nombre de trajets différents de la bille aboutissant à chaque cavité et les dessiner.

Certaines remarques des enfants m'amènent à engager la discussion sur «trajets équivalents» (de même longueur et aboutissant à la même cavité) et «trajets différents» (dont au moins un tronçon diffère). Pour ce faire, des élèves viennent au tableau tracer ceux qui arrivent à la cavité ① puis à la cavité ②. Et spontanément, ils proposent de dessiner les chemins qui aboutissent en ⑥ et en ⑤. Il leur paraît évident qu'il y en a le même nombre et que ce sont «les mêmes». Nous précisons alors la notion de «chemins symétriques» et, pour la recherche individuelle concernant les cavités ③ et ④, la consigne est complétée. Je demande aux enfants de tenir compte de cette idée de symétrie en dessinant pour chaque trajet aboutissant en ③ son symétrique aboutissant en ④.

Cette contrainte dans la démarche relance l'intérêt et le plaisir à aller au bout de la tâche de dénombrement, l'utilisation de couleurs différentes amenant un petit effet esthétique. D'autre part, cette activité permet de redéfinir la symétrie dans le plan et d'observer la difficulté de certains enfants à la dessiner: il faut dire, que dans plusieurs cas, le trajet circule de part et d'autre de l'axe!



On trouve encore, à cette étape, quelques élèves qui retournent aux parcours pratiques de la bille. A l'inverse, certains autres, «oubliant» la signification des tracés, dessinent des chemins apparemment différents car la couleur change, mais parfaitement identiques. Ils transgressent la règle qui veut qu'une même couleur doit être attribuée à une même cavité.

Résultat du dénombrement:

①	②	③	④	⑤	⑥	
1	5	10	10	5	1	Total: 32

Pas de doute, il y a davantage de chemins qui aboutissent au centre!

On serait tenté d'en rester là et pourtant...

Relance: retour à la pratique.

– Vous allez faire descendre la bille 32 fois. Obtiendrez-vous les fréquences

1 5 10 10 5 1 ?

Sans hésiter, les enfants pensent que cela doit être le cas.

Résultats obtenus:

Groupes:	cavités:					
	①	②	③	④	⑤	⑥
A	1	2	11	10	4	4
B	1	2	10	12	6	1
C	1	1	14	6	9	1
D	2	4	8	11	5	2
E	1	2	5	14	9	1
F	0	5	7	13	7	0

Constatation: la réalité diffère du modèle théorique! Les enfants sont perplexes. Certains d'entre eux parlent de «chance».

Je leur propose, comme en début de recherche, d'additionner les résultats par cavité:

①	②	③	④	⑤	⑥
6	16	55	66	40	9

Ebrablés, les enfants redonnent des arguments tels que:

«C'est normal, parce que les chemins du centre sont plus courts».

Afin que la comparaison soit plus aisée, je suggère deux démarches:

- a) Multiplier les «nombres modèles» par 6 puisqu'il y a 6 groupes et comparer aux nombres de la réalisation pratique:

théorie:	6	30	60	60	30	6
pratique:	6	16	55	66	40	9

- b) Opération inverse: diviser par 6 les totaux des nombres trouvés pratiquement (notion de moyenne arithmétique et d'arrondissement) et comparer aux nombres théoriques par cavité:

théorie:	1	5	10	10	5	1
pratique:	1	3	9	11	7	2

Cette fin de séance se passe «en souplesse». Il n'est pas question d'enfoncer un clou, mais plutôt de créer l'étonnement, la réflexion, la discussion.

L'expérience se termine d'ailleurs sur un débat. Pour quelques élèves, il semble bien que la recherche des cheminements sur papier n'a pas grande relation avec le travail pratique des lancés de bille! Toutefois, une majorité d'entre eux est capable de comparer les deux aspects et de trouver des explications aux différences:

«Peut-être que la bille est déviée parce que le bois du fond a des veines».

«Les petits bâtonnets sont rayés».

«Ma bille a un défaut».

«Mon pupitre n'est pas très plat».

Et un enfant de conclure:

«Et puis, y a la chance!»

La raison agit avec lenteur, et avec tant de vues, sur tant de principes, lesquels il faut qu'ils soient toujours présents, qu'à toute heure elle s'assoupit ou s'égare, manque d'avoir tous ses principes présents.

Blaise Pascal

Numérologie - Mathématique et création artistique

par Roger Délez, S.R.P.

grâce au concours de René-Louis Egger, artiste

Introduction

Aussi vrai que deux et deux font quatre, chacun porte le numéro matricule de son destin. Le tout est d'apprendre à le lire. Afin de le trouver, il suffit de savoir additionner. La numérologie est la plus vieille science magique du monde, celle des Initiés égyptiens, des mages hébreux et des sorciers chinois.

Observons d'abord ce tableau de concordance des lettres et des chiffres établi de 1 à 9 comme le voulait Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	D	E	F	G	H	I
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
S	T	U	V	W	X	Y	Z	

Supposons maintenant que nous nous intéressions à un monsieur:

J A I M E L E S M A T H E M A T I Q U E S
 $1 + 1 + 9 + 4 + 5$ $3 + 5 + 1 + 4 + 1 + 2 + 8 + 5 + 4 + 1 + 2 + 9 + 8 + 3 + 5 + 1$
 20 63 $\Rightarrow$ 83

Réduction

théosophique: $2+0=2$ $6+3=9$ $\Rightarrow$ (globale) $2+9=11$
 $1+1=2$

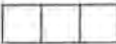
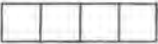
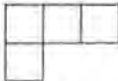
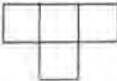
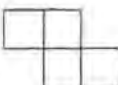
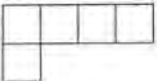
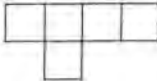
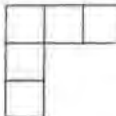
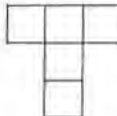
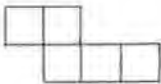
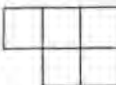
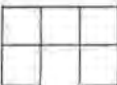
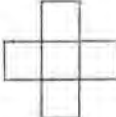
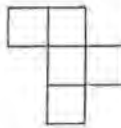
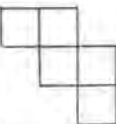
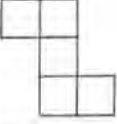
C'est sur cette base de travail que nous allons associer la NUMÉROLOGIE à une recherche MATHÉMATIQUE en vue de créer une œuvre ARTISTIQUE.

Il y a en effet 15 ans que René-Louis Egger travaille sans trêve sur les rapports mathématiques existant entre son «identité numérolgique» et les «figures géométriques».

Essayons ensemble de percer le «mystère» ou tout au moins d'analyser une recherche aboutissant sur une des nombreuses CRÉATIONS de l'artiste.

Il s'agit, dans un premier temps de chercher de manière exhaustive, l'ensemble de tous les POLYOMINOS composés de UN, DEUX, TROIS, QUATRE et CINQ carrés (collés arêtes contre arêtes), ce que René-Louis Egger appellera:

MA POLYOMINOSCOPIE

MONOMINO		1 seul représentant
DOMINO		1 seul représentant
TROMINOS	 	2 représentants
TETROMINOS	    	5 représentants
PENTOMINOS	           	12 représentants

NB: L'exhaustivité est aisément prouvée, ce qui ne sera pas mon propos ici.

Ce qui par contre est capital dans l'analyse de l'œuvre, c'est de s'attacher à la démarche entreprise par l'artiste.

Celle-ci peut-être traduite de la manière suivante:

- l'analyse numérolologique de l'œuvre peut précéder la démarche mathématique ou la compléter. Dans le cas qui nous intéresse pour l'instant, elle la complète. En effet, tout a commencé par la recherche de tous les POLYOMINOS possibles en fonction de la tâche fixée.

Analysons le travail effectué, ce qui peut nous donner le tableau suivant:

NOM DE LA FIGURE	NOMBRE DE MODÈLES	MODÈLES EN TOUT
Monomino	1	1
Domino	1	2
Trominos	2	4
Tétrominos	5	9
Pentominos	12	21

L'artiste, au niveau mathématique a fait un travail complet qui peut aussi nous permettre d'envisager une suite au niveau des hexominos, des heptominos... Il en a vraiment fait une analyse exhaustive, ce qu'il va nommer

MA POLYOMINOSCOPIE

Intéressons-nous maintenant à l'étude numérolologique du titre donné à cette recherche.

$$M A P O L Y O M I N O S C O P I E$$

$$4 + 1 \quad 7 + 6 + 3 + 7 + 6 + 4 + 9 + 5 + 6 + 1 + 3 + 6 + 7 + 9 + 5 = 89$$

Ce total de 89 est en rapport immédiat mais non évident avec le tableau précédent car, dans ce cas précis, le titre de la recherche a été établi après l'analyse mathématique.

- Alors, à quoi correspond-il?
Oui, il faut «arriver» au nombre 89!
- Mais pourquoi 89?
- Car dans le tableau précédent, d'autres pistes ont été suivies.
- Voilà l'explication du nombre choisi!

NOM DE LA FIGURE	NOMBRE DE MODÈLES	MODÈLES EN TOUT	NOMBRE DE CARRÉS	CARRÉS EN TOUT
Monomino	1	1	1	1
Domino	1	2	2	3
Trominos	2	4	6	9
Tétrominos	5	9	20	29
Pentominos	12	21	60	89

- Encore faut-il définir ou trouver un titre, un nom à la démarche effectuée qui corresponde au thème choisi et à la recherche menée à bon port.

Faisons le point de la situation

- A ce stade,
- 1) nous avons trouvé tous les polyominos composés de une, deux, trois, quatre et cinq pièces (l'exhaustivité est aisée à démontrer);
 - 2) nous avons cherché tout ce qui était intéressant au niveau de chaque série (nombre de modèles, nombre de carrés utilisés,...);
 - 3) un nombre nous a intéressés, 89;
 - 4) son étude nous a permis de définir le nom de la recherche «MA POLYOMINOSCOPIE» = 89.

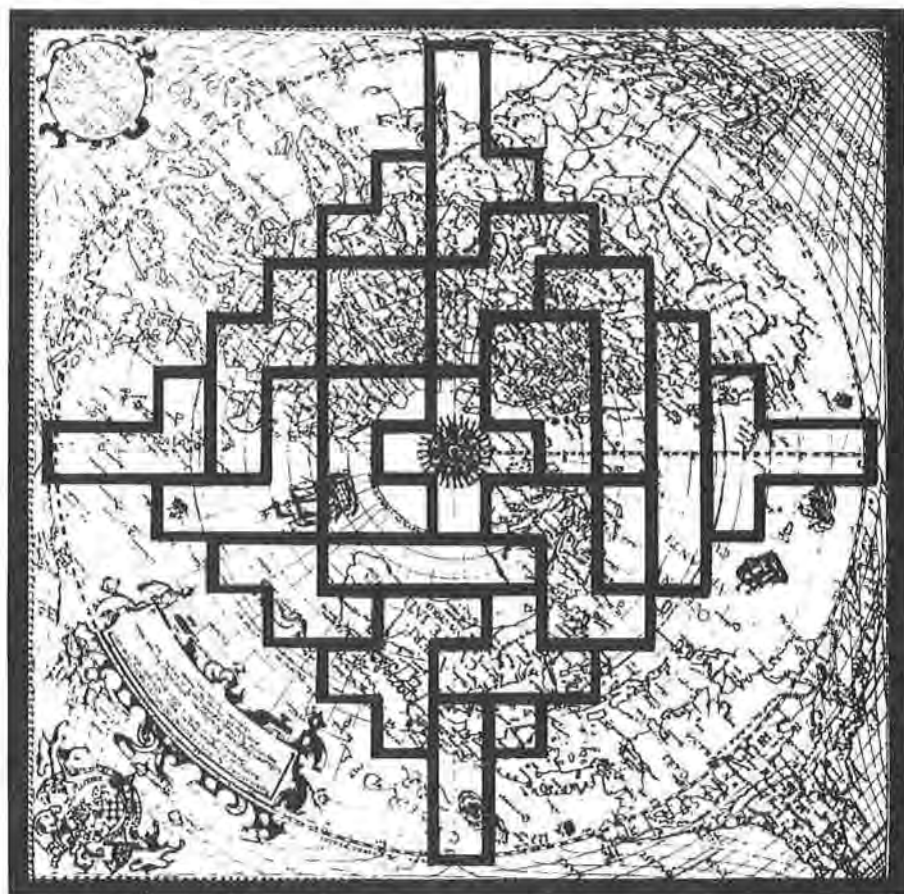
Il nous reste alors à réaliser l'ŒUVRE, la «CRÉATION ARTISTIQUE»!

- Alors avec 21 pièces composées de 89 carrés, que peut-on faire?

Si on analyse l'œuvre de Martin Gardner, on constate qu'il faut parfois un éclair de génie, éclair appelé par l'auteur «haha» mathématique!

– Eh bien là, René-louis Egger en a souvent: jugez-en plutôt.

Voilà son œuvre:



– Oui, c'est ce que certains appelleront «œuvre». Mais où est le génie?

Raisonnons:

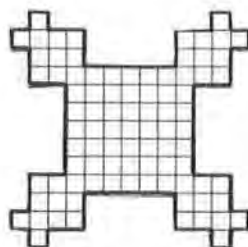
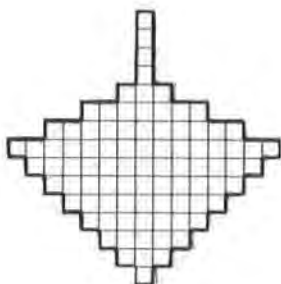
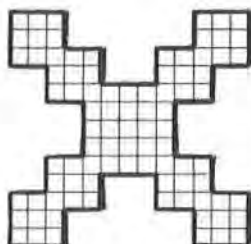
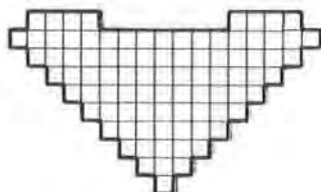
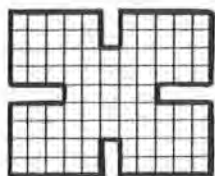
89 est un nombre premier! Il est difficile de réaliser quelque chose avec lui.

Alors que penser de cette «œuvre» qui est aussi symétrique qu'un carré (4 axes).

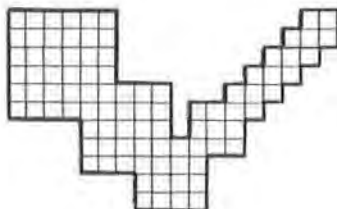
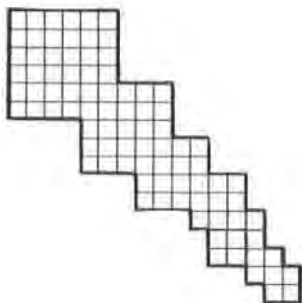
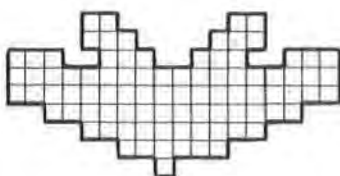
Pour ceux qui ont de l'intérêt pour ce genre de travail, voici d'autres modèles réalisables.

Vous pourrez tout à loisir essayer de réaliser les modèles suivants à l'aide des 21 pièces de base: du monomino aux 12 pentominos.

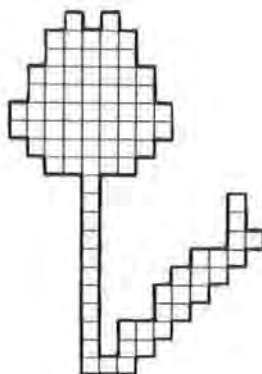
A. Des modèles symétriques:



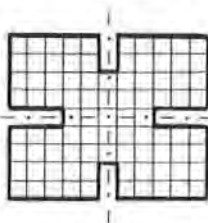
B. Des modèles non symétriques:



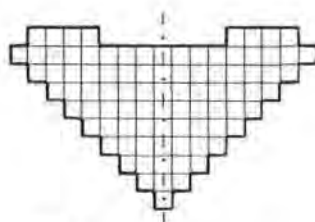
C. Un modèle figuratif:



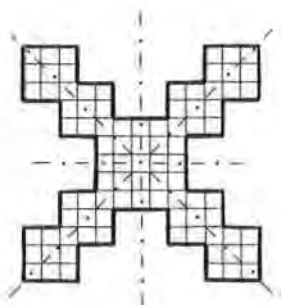
Observations:



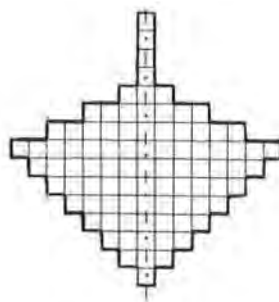
2 axes de symétrie
4 rectangles - 1 carré



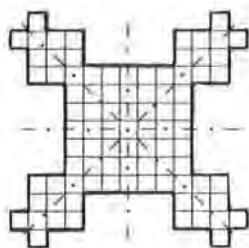
1 axe de symétrie



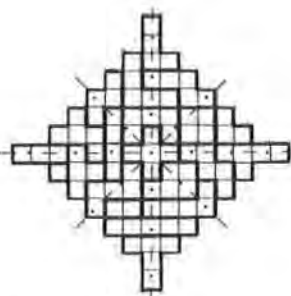
4 axes de symétrie
carrés emboîtés seulement



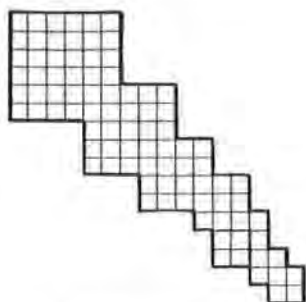
1 axe de symétrie



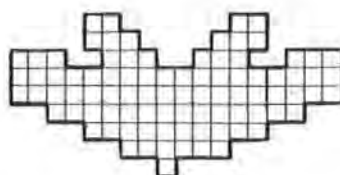
4 axes de symétrie
carrés emboîtés ou non



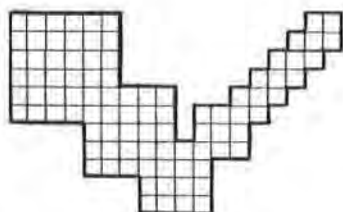
4 axes de symétrie



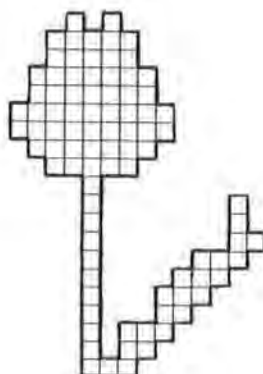
pas d'axe de symétrie
carrés emboîtés seulement
(formant deux fois un rectangle)



pas d'axe de symétrie



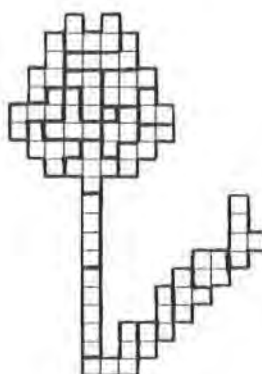
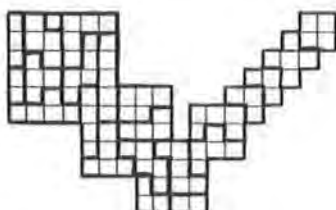
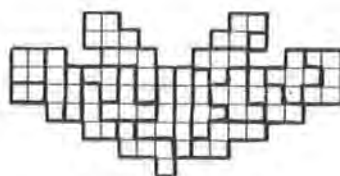
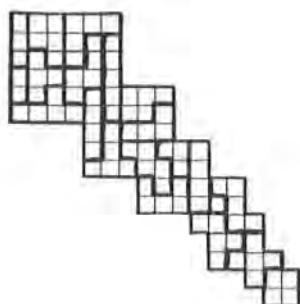
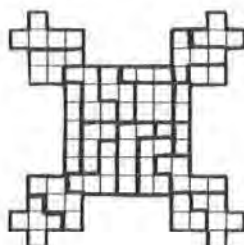
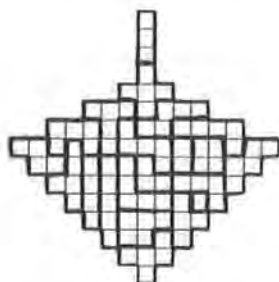
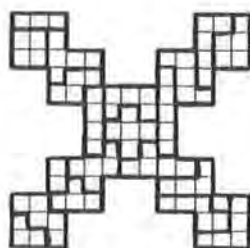
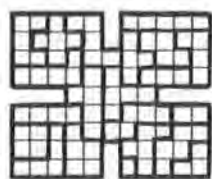
pas d'axe de symétrie
carrés emboîtés seulement



pas d'axe de symétrie

Toutes les aires représentées sont formées de 89 carrés-unités.

Voici au moins une SOLUTION par modèle:



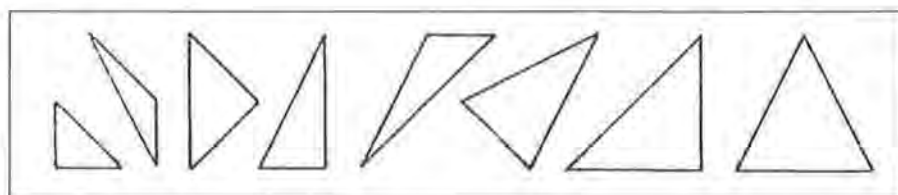
Cet article n'avait pas la prétention de faire de nous des adeptes de la numérologie. Loin de moi l'idée de vous amener sur ces chemins tortueux.

L'intéressant de cette recherche réside dans le fait que

«TOUT EST EN TOUT»

Il est important à certains moments de se tourner vers ceux qui font de la mathématique un objet de réflexion, un sujet de méditation, un but existentiel!

Dans un autre article, je reviendrai sur l'étude d'un autre tableau qui cette fois-ci n'utilise que des triangles formés à partir de 8 triangles de base appelés les «TRIANGLES DE GANYMÈDE». Ces 8 triangles sont les suivants:



- Que peut-on faire? Combien de triangles différents peut-on construire?
- Y a-t-il un rapport entre la NUMÉROLOGIE, L'ANALYSE MATHÉMATIQUE et la CRÉATION ARTISTIQUE?

Une chose est certaine, «ARTISTE ELIE» a plus d'un tour dans son sac. Dans cette recherche, il faut du temps afin de prouver l'exhaustivité des solutions.

Mais attention!...

Fait surprenant: Qui prouvera mieux que quiconque l'exhaustivité des résultats?

L'ARTISTE ou LE MATHÉMATICIEN?

Ce sera à vous de juger dans un prochain article intitulé *Les triangles des triangles convertis en un rectangle*.

Numérisation de la suite des nombres et faits numériques

par François Conne, Genève
Troisième épisode

1. Introduction: deux idées-germes

Me voici donc au troisième épisode de mon feuilleton à propos des activités numériques élémentaires. J'en suis resté, dans mon périple aux calculs numériques. Voici ce que j'en disais dans l'introduction de mon premier épisode [1]:

«Les **calculs numériques** traitent eux aussi des opérations en recourant à des supports symboliques variés (matériels ou images) (...) mais ne recourent pas à un compteur (à la récitation de la comptine par exemple). A ce niveau, c'est la connaissance de la structure de la suite des nombres qui intervient, à la fois au travers de la mémorisation des tables des opérations numériques (addition, multiplication) et au travers de l'application des règles de numération (dérivées des axiomes structurels numériques (...)). Ces règles de numération ne sont pas connues en tant que telles mais sont représentées par le biais de règles de transformations des symboles. **Ces traitements symboliques (...) permettent de substituer à une opération de calcul une autre ou une séquence d'autres opérations plus élémentaires mais équivalentes.**»

Longtemps j'ai hésité, dans mon plan de rédaction entre deux voies à emprunter: soit donner des exemples illustreurs de cette description (qui dans mon second article s'est muée en définition, cf [2]), soit au préalable expliciter le cadre, la perspective générale dans laquelle cette formulation prend son sens. Finalement, et parce qu'il m'importe de transmettre les idées-force qui président à mon étude, j'ai opté pour la description préalable du cadre, repoussant au quatrième épisode, le traitement d'exemples de calculs numériques.

Ma fresque à propos des calculs est organisée, je le rappelle, selon l'analyse des systèmes symboliques utilisés, comme contenu et comme supports aux activités numériques. C'est en fait une analyse hiérarchique dont il est question et il convient de parler en terme de niveaux symboliques et de complexité des opérations engagées, qui à leur tour marquent des niveaux de réalité, de traitement et de représentation mentales. Telle est la conclusion à tirer de l'exposé succinct que j'avais fait en guise d'introduction à mon deuxième épisode [2]. Revenons-y sous un angle plus fondamental.

Partons, si vous le voulez bien, de deux idées-germes autour desquelles ont pris ma réflexion et mon étude.

1. L'aspect producteur des systèmes formels. C'est ainsi qu'on pourrait le formuler. Pour moi son germe a été dans l'observation-étonnement suivante: *écrire une suite de chiffres peut à elle seule produire un nombre et ce, déjà chez des*

élèves de première primaire qui par ailleurs ne maîtrisent pas la numération et seraient parfaitement incapables de savoir ni de dire de quel nombre il s'agit. Ainsi par exemple, sans ambiguïté aucune pour eux, la suite 143857 sera considérée être un nombre, un nombre grand mais plus petit que 1438576, etc. Une forme d'écriture reconnue *fait* le nombre. Bien entendu, vu ainsi le concept n'est pas bien riche! Mais c'est assez sérieux quand même pour se voir affublé de certaines propriétés numériques caractéristiques des nombres que le sujet connaît et maîtrise. Ce petit fait va même plus loin, puisqu'on le voit, les règles de la numération écrite ne sont ici aucunement nécessaires à la production du symbole et à la reconnaissance de ses caractères généraux. Alors on pourrait presque tenir la boutade suivante: *l'enjeu de l'écriture des nombres est le contrôle par le sujet qu'il a bel et bien écrit le nombre voulu*, ou encore: *la lecture correcte du nombre, ce sont plus les règles de la numération orale, via le prononcé des écritures, qui vont être traitées à ce niveau de l'apprentissage*. Donc *écrire pour mieux parler!* Tout ceci m'a amené à réfléchir à ce côté producteur, et maintes autres observations et analyses s'y sont greffées. Par exemple, la distinction dénombrement/comptage (cf [1]) ou encore certaines observations de résolutions de problèmes arithmétiques élémentaires [3]. Mais cette réflexion a un jour trouvé un écho inattendu dans une définition de dictionnaire signée F. Le Lionnais [4]:

Algorithme

Le mot *algorithme* vient de Al Khwarizmi, surnom du mathématicien arabe Muhammad Ibn Musa (IX^e siècle), né à Khwarizem, en Ouzbekistan. Son sens a changé plusieurs fois avant d'en arriver à ses significations actuelles. Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (c'est-à-dire sans indétermination ou ambiguïté), en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données. Un algorithme ne résout donc pas seulement un problème unique mais toute une classe de problèmes ne différant que par les données mais gouvernés par les mêmes prescriptions. C'est ainsi que l'on distingue des algorithmes dits *numériques*, des algorithmes de jeux, des algorithmes de recherche d'un chemin dans un labyrinthe, des algorithmes de détection de l'équivalence des mots dans un calcul algébrique ou logique, etc.

Parmi les algorithmes numériques le plus simple est celui qui, pour l'addition de deux nombres exprimés dans le système de numération décimale, donne le processus à suivre: addition des chiffres des unités, inscription du chiffre de cette somme, retenue éventuelle, etc., jusqu'aux chiffres des classes les plus élevées. Une formule, au sens courant de ce terme, est un algorithme.

Par exemple: $x', x'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donnant le moyen de calculer les solutions de l'équation: $ax^2 + bx + c = 0$, en fonction des coefficients de cette équation. Voir également l'algorithme d'Euclide.

L'usage des algorithmes s'est imposé dans la programmation du calcul automatique surtout lorsqu'ils recourent à des opérations répétitives. Un programme

informatique est un algorithme rédigé dans un langage compris par l'ordinateur. Mais les temps de calculs nécessaires pour appliquer un algorithme sont souvent démesurément grands; s'introduit alors une notion d'*efficacité d'un algorithme*, à l'origine des travaux susceptibles d'avoir de nombreuses applications pratiques.

L'hypothèse fondamentale de la théorie des algorithmes est que chaque algorithme peut être réalisé par une machine de Turing particulière et aussi, par conséquent, par une machine de Turing universelle. Malheureusement, tous les problèmes des mathématiques et de la logique mathématique ne sont pas nécessairement algorithmiquement résolubles. C'est le cas notamment du problème de la décision de la déductibilité (Church). Il n'est pas possible de construire un algorithme permettant de démontrer qu'un autre algorithme est ou n'est pas possible; c'est un problème indécidable. Il en résulte que les mathématiques ne se réduisent pas à la construction d'algorithmes et que la découverte en mathématique ne peut pas être complètement automatisée.

Cependant, alors que les mathématiciens sont divisés, sur le plan philosophique, par la question de l'«existence» des projets mathématiques, ils sont unanimes à **reconnaître l'importance des algorithmes, en raison de leur caractère constructif**. (C'est moi qui souligne).

2. Mais une autre idée vient alors se greffer. On peut la formuler ainsi: **«en regard des calculs, les symboles sont traités comme des objets»**. Cette idée est défendue avec éclat par G. Vergnaud (toujours lui), mais elle a eu pour moi une aventure amusante. C'est une recherche (non publiée) qui m'aura mis la puce à l'oreille. Je demandais à des élèves de 1P de comparer deux collections de jetons arrangés figuralemment et leur indiquais dans ma consigne *de ne pas compter*. Certains élèves ont suivi cette consigne et ont cherché des moyens de traitement figuratifs (réorganisation des figures). D'autres, au contraire, ont préféré outrepasser la consigne et ont compté. Avec dans les deux cas plus ou moins de bonheur mais rencontrant alors des problèmes très distincts, d'autres *événements* se produisant. La nécessité de décrire cette différence m'a alors amené à utiliser le mot de *traitement*, la seule description des *procédures* ne suffisant manifestement plus. Un autre moment dans le cheminement de cette idée venait de l'analyse du travail effectif de la classe, au-delà du projet pédagogique mis en avant et masquant les pratiques scolaires. Par rapport au travail des élèves, ceci a été le souci de rendre compte de la *réalité* à laquelle ils étaient confrontés. Tandis que du côté du maître et des activités de classe, ceci a été l'analyse de la manière dont cette *réalité* était organisée. Au *traitement* venait s'adjoindre les *tâches* et leur analyse. Dans cet ordre d'idées, il apparaissait que les calculs algébriques recouraient à des opérations analogues à des manipulations d'objet: pose, agencement, réorganisation, etc. Vint à un autre moment encore, la discussion à propos du *concret* avec la critique de l'empirisme qui découle de la conception et l'usage des matériels pédagogiques spécifiques, comme par exemple le matériel Dienes (cf. [5]): les objets que l'école croit mettre en jeu sont déjà des symboles (des objets symboliques ou encore des symboles *maté-*

rialisés). Au détour de cette inversion de la relation entre objets et symboles, je ne me rendis pas tout de suite compte que, malgré tout, l'idée subissait une *réduction*. L'objet était pris comme un élément, une entité *pauvre* alors qu'en fait il est une *construction*, sa *permanence* est à gagner, et que dans l'affaire des représentations et des invariants opératoires sont engagés. C'était oublier que les objets font la réalité.

Mais de plus, faire ces rapprochements entre objets et symboles n'implique pas forcément une identification. Peut-on ainsi, sans autres, assimiler symboles et objets? Les symboles comportent une part d'arbitraire, ils ont cours dans certains champs d'activités bien précis, ils sont donc à référer à des cadres interprétatifs définis. A ce propos certaines recherches (dont [6]) tendent à montrer qu'il n'est pas dénué de fondement de recourir à l'hypothèse de l'existence d'**invariants interprétatifs**. Enfin, le fait qu'il faille envisager des niveaux symboliques distincts auxquels situer les activités et traitements des sujets n'est pas une objection, il en est ainsi de toute réalité, ces *niveaux de symboles* marquent bel et bien des *niveaux de réalité*.

Bien qu'il y ait donc à préciser certains aspects de ces questions, ces deux idées-germes sont d'ores et déjà exploitables, c'est ce que nous allons voir maintenant sur un exemple élémentaire.

2. La numérisation de la suite des nombres

1^{er} niveau: Les premiers symboles numériques que je considérerai ici sont les noms de nombres. Ceux-ci sont organisés en comptine ou en fragments plus ou moins étendus de la suite numérique. Réciter la comptine c'est d'abord énumérer les noms des nombres (énumérer les nombres). Cette opération peut être couplée à une autre énumération d'autres objets ou symboles en établissant une correspondance terme à terme. Nous avons alors un dénombrement. Intervient dans l'apprentissage des noms de nombres une part de mise en mémoire. Mais ne sera retenu, à ce niveau (car ceci pourra être «oublié» ultérieurement) que ce qui est suffisamment sollicité. Ainsi la comptine même à ce premier moment n'est pas qu'une affaire de mémoire.

2^e niveau considéré: Je me situe maintenant dans ce que j'ai appelé les calculs-comptages [2]. Rappelons que le sujet part du nombre et y associe une collection, qui peut se réduire à la comptine ou être une association entre la comptine et une ou plusieurs autres collections *concrètes* en général choisies pour ses (leurs) propriétés figurales. Ce qu'il importe de relever, c'est l'aspect médiateur de la comptine, c'est-à-dire, si on reprend l'idée n° 1 décrite en introduction, ce qu'elle produit: une collection à partir du nombre. Il se produit alors un premier *cycle* dans les niveaux symboliques, au moment où, pour compter, l'élève procède à un *comptage continué*. Je décris par là que l'élève compte jusqu'au premier nombre donné, puis compte au-delà, un nombre de

pas correspondant à la seconde donnée. J'ai utilisé dans mon premier épisode [1] les termes de *bornes* et *nombres de pas*. Mais ce que je retiens ici c'est la chose suivante: **la comptine, après avoir fourni une collection (d'objets) en vient donc à se compter elle-même!** Plus avant encore, fort de ceci, une première substitution dans la chaîne des opérations du comptage est envisageable. C'est-à-dire ne plus compter la première donnée mais *embrayer* le comptage à partir de ce même nombre. Un *fait numérique*, mis en mémoire est sollicité. Tout ceci demande de l'exercice et ne vient pas *du coup* pour que le sujet agisse correctement et contrôle son comptage. On notera ainsi que l'*automatisme* vient d'une substitution et non pas d'une accélération. A ce moment de l'apprentissage interviennent les difficultés de comptage bien connues et décrites partiellement dans [1]: jusqu'où compter, à partir de quel nombre, etc. C'est aussi à ce même moment que les sujets (enfants) ont coutume de *chosifier* les nombres, et parlent *du 1, du 8*, etc. Enfin notons que la relation nombre → successeur (prédécesseur) est utilisée pour elle-même, comme relation binaire, et est en quelque sorte désincarnées de la comptine. Il y a là, par l'usage qui en est fait, une différenciation dans les *faits numériques*, et corrélativement un *enrichissement* de la réalité numérique.

3^e niveau considéré. Mais la comptine, au départ, n'est qu'une succession de noms en nombres. A ce moment (niveaux 1 et 2) les règles de formation de ces noms de nombres passent grandement inaperçues, ainsi en est-il aussi des *rythmes* dans ces noms, ou encore l'organisation récurrente propre à la numération parlée (et moins évidente dans la numération écrite?). Une telle suite n'est alors que courte tant qu'elle est si peu structurée. Donc au travers *des rythmes* de la comptine perceptibles aux répétitions présentes dans les noms et à la succession des ordres d'unités, la comptine va à la fois s'agrandir et s'organiser (en une suite de nombres). De nouveaux faits vont émerger, être mis en mémoire, être sollicités comme éléments.

Si on considère bien les choses, on voit que l'on compte les dizaines comme les nombres, et ainsi de suite, c'est-à-dire que ces récurrences, ces rythmes sont très profondément numériques parce que les opérations mentales qui les sous-tendent, l'itération par exemple, sont celles-là même qui sont constitutives aux niveaux inférieurs des collections et des nombres. Qu'est-ce que cela signifie? Simplement que dans cette organisation, qui est une construction (puisque la suite s'élargit) et une stabilisation (puisque plus de faits sont interconnectés), dans cette organisation il faut voir une **numérisation de la suite des nombres**.

Remarquons en passant que d'autres numérisations de l'ensemble des nombres se font, par exemple, lorsque les nombres mesurent leurs propres *écarts* selon les relations d'ordre additives ou multiplicatives. On lira avec profit à ce propos un article de A. Henriques [7].

Retenons cependant le déplacement de niveau et que même analogues, les opérations de numérisation des collections (via les énumérations) et celles qui

numérisent maintenant les comptines, sont difficilement perceptibles car elles ne traitent pas les mêmes objets. On a aussi changé de *niveau de réalité*.

Ainsi donc les nombres deviennent-ils de plus en plus «numériques»! Ceci explique sans doute qu'une définition des nombres ou du numérique soient si malaisée à donner. On voit aussi quels problèmes posent le détour explicatif des collections pour rendre compte des règles de numérisation.

Mais, même sans changer aussi nettement de niveau de symbolisme, les comparaisons ne sont pas aisées. Ainsi le lecteur méditera-t-il avec profit la comparaison des numérations écrites ou parlées. Deux mémorisations proches mais pas identiques et portant sur des symboles très distincts (organisés de manière proche). Par exemple les opérations analogues, constitutives (itération, récurrence,...) ont bel et bien, malgré la proximité des niveaux une toute autre réalité qu'on soit sur le parlé ou sur l'écrit. Et sont porteuses d'autres germes. Exemples pour l'écrit: la table de Pythagore, le crible d'Eratosthène, etc. mais aussi les algorithmes de calculs en colonnes.

4^e niveau évoqué: C'est celui des algorithmes. Nous verrons alors qu'au travers de ce que j'ai appelé diagramme associé à l'algorithme, c'est le calcul en lui-même qui est symbolisé, et, dès lors est organisé en cycles récurrents, nous pouvons dire, au même titre que précédemment, que **le calcul est numérisé!**

Dernière remarque: J'ai suivi un ordre par niveau. Il ne s'agit pas ici de stades dans l'apprentissage, ni même d'un ordre obligé, quoiqu'il soit fréquent. En fait, je n'ai ici fait que de suivre une des branches de la chaîne des assimilations, que l'on représentera ainsi:

... ➤ collection ➤ *comptine* ➤ numération orale ➤ numération écrite
➤ algorithme de calcul en colonne ➤ ...

Ces algorithmes se définissent sur la numération décimale de position, et ce, du moins, à cause du diagramme qui leur est associé. (Cette phrase sybilline trouvera une explication plus tard, au travers d'une comparaison entre algorithmes distincts: la multiplication *à l'italienne* – celle que nous apprenons à l'école – et la multiplication *à l'égyptienne*). Remarquons alors que tout comme les débuts de l'écriture des nombres à plusieurs chiffres vont *révéler* les règles de la numération parlée – en la dégagant de la récitation de la suite des nombres entre autres –, les algorithmes vont *révéler* les principes de la numération de position en base dix. (à suivre)

Courrier des lecteurs

L'extrait de l'ouvrage *Les machines à penser* m'a beaucoup intéressé, mais il me laisse un peu perplexe. On y propose en effet de simuler deux stratégies fondamentales sur un ordinateur.

Il y a pourtant deux questions non moins fondamentales auxquelles l'ordinateur ne répondra pas :

- dans la première stratégie, à quel nombre de points faut-il s'arrêter pour réaliser le gain maximum ?
- dans la deuxième stratégie, à quel nombre de coups faut-il s'arrêter pour réaliser le gain maximum ?

Réponse à la première question:

To = total de points déjà réalisé après un jet de dés quelconque

On peut donc écrire:

To = total réalisé si on s'arrête de jouer

$$\frac{5}{6} \left(\frac{2+3+4+5+6}{5} + To \right) = \frac{5}{6} To + \frac{10}{3} = \text{espérance de gain si on continue à jouer}$$

espérance de gain
si le 1 ne sort pas

probabilité que le 1 ne sorte pas

Pour réaliser le gain maximum, il faut donc s'arrêter de jouer dès que

$$To = \frac{5}{6} To + \frac{10}{3}, \text{ c'est-à-dire dès qu'on a atteint le total } To = 20.$$

C'est précisément le cas à simuler dans votre article.

Réponse à la deuxième question:

n = nombre de coups où l'on s'arrête de jouer

On peut donc écrire:

$$\left(\frac{5}{6} \right)^n \frac{2+3+4+5+6}{5} = \text{espérance de gain lorsqu'on s'arrête de jouer après } n \text{ coups}$$

espérance de gain
si le 1 ne sort pas

probabilité que le 1 ne sorte pas

Cette espérance de gain est maximum pour $n = 5$ ou 6 et vaut dans ces cas 8,04. C'est précisément le cas $n = 6$ dont on propose la simulation dans l'article.

On voit donc que la simulation par ordinateur ne servira à rien d'autre qu'à vérifier que les calculs ci-dessus sont corrects.

Ainsi on pourrait ajouter aux *Machines à penser* de Jacques Arsac: pensez toujours, les machines feront le reste.

Christian Weber, Neuchâtel

TABLE DES MATIÈRES

Editorial, <i>R. Délez</i>	1
A propos du triangle de Pascal, <i>N. Guillet</i>	2
Numérologie - Mathématique et création artistique, <i>R. Délez</i>	16
Numérisation de la suite des nombres et faits numériques, <i>F. Conne</i>	26
Courrier des lecteurs	32

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:

MM. Th. Bernet, A. Calame, R. Délez,
P. Duboux, M. Ferrario, F. Jaquet, Y.
Michlig, F. Oberson, D. Poncet.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 16.—, Etranger F 18.—,
CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an.
Service de la Recherche Pédagogi-
que; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève.
(Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983