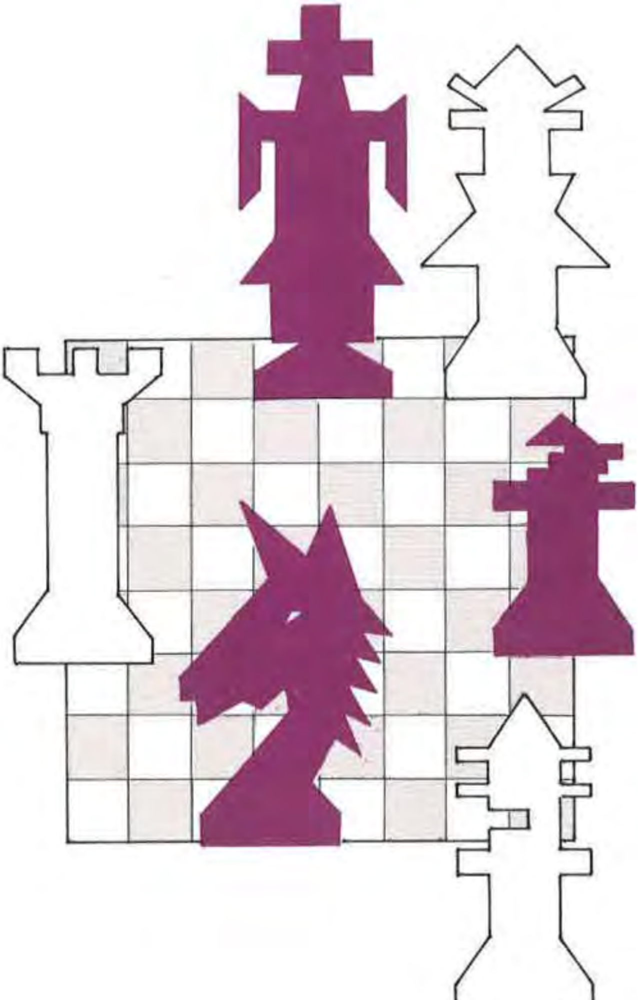
135



MATH ECOLE

NOVEMBRE 1988
27e ANNÉE

MATH-ECOLE 135

27e ANNÉE Paraît cinq fois par an NOVEMBRE 1988

Editorial

Une discipline en sommeil

Au cours des années soixante à quatre-vingt, la mathématique a fait beaucoup parler d'elle et l'enseignement de cette discipline a suscité force débats et controverses. Mais les choses passent très vite et l'on a peut-être déjà oublié la vigueur des querelles sur les vertus des mathématiques dites modernes ou sur le bien-fondé des réformes conduites dans les écoles d'un très grand nombre de pays.

Aujourd'hui, c'est à peine si quelques petites rides viennent agiter sporadiquement une eau qui semble immobile et calme comme un étang par un beau soir d'été. Pris par de nouveaux problèmes, enseignants et autorités semblent satisfaits du répit accordé dans ce secteur, à tel point que l'on rechigne à troubler cette quiétude en émettant l'opinion que les manuels des quatre premiers degrés de la scolarité obligatoire, dont la conception générale date de plus de quinze ans, pourraient bientôt être reconnus comme obsolètes.

Faut-il considérer l'accalmie comme le signe d'une réforme réussie? Les écoliers de Suisse romande sont-ils bien préparés en mathématique? Disposent-ils des outils de pensée qui leur seront indispensables pour maîtriser les problèmes d'une société qui évolue toujours plus vite? L'école favorise-t-elle réellement la bonne structuration mentale demandée par le plan d'études?

A première vue, les réponses à ces questions pourraient être positives et l'on sait bien que ce ne sont ni les manuels ni les moyens d'enseignement qui font à eux seuls la qualité de l'école. Néanmoins, à y regarder de plus près, le relatif désintérêt manifesté actuellement à l'égard d'une discipline aussi fondamentale pour la formation de l'individu ne manque pas d'inquiéter. Les grandes idées défendues par les pionniers de la réforme sont-elles encore présentes dans les esprits? A-t-on pleine conscience de la primauté de l'apprentissage de la mathématisation sur l'acquisition de quelques connaissances? Continue-t-on à aider l'enfant à forger les outils intellectuels qui lui seront utiles pour découvrir rationnellement son environnement, maîtriser les problèmes de la vie quotidienne, relativiser les choses et éviter les pièges du manichéisme si présent dans la plupart des débats?

Si votre réponse est oui, c'est que l'esprit de la réforme souffle toujours et que nous verrons prochainement surgir de nouvelles idées, de nouveaux ateliers, de nouveaux coins mathématiques susceptibles d'intriguer les élèves et d'encourager leurs démarches d'exploration.

Si vous répondez non, cela signifie qu'il est grand temps qu'un nouveau débat s'ouvre afin de redonner vigueur et force à l'apprentissage de la mathématique.

Raymond Hutin

Reflets d'une discussion où il est question des moyens d'enseignement de mathématique pour l'école primaire, de leur rôle, de leur place et de leur avenir

par Jean-François Perret

Les propos qui suivent, suggèrent quelques pistes de réflexion sur la vie des moyens d'enseignement et leur biotope. Cette approche risque de décevoir le lecteur qui avait souhaité, dès maintenant, entendre parler de l'adaptation du contenu des ouvrages mathématiques. Au cœur du présent débat, il trouvera, par contre, une conviction à laquelle les récents travaux de la CEM nous ont conduits: lorsque des moyens d'enseignement sont en préparation, il est plus important de se demander comment ils seront exploités, que de savoir s'ils seront utilisés. L'apport et, finalement, la valeur d'un outil, résident dans ce que l'on en fait objectivement, plus que dans son utilisation potentielle idéale. Cette perspective n'est pas sans conséquence sur le processus de conception et de réalisation de l'outil. Tel est le principal argument qui traverse la discussion.

– «Qu'en est-il des moyens d'enseignement pour les premières années primaires? Est-il vrai qu'une nouvelle génération d'ouvrages est envisagée?

– Ce n'est pas entièrement faux; mais, avant même de répondre, il est utile de rappeler quelques données du problème. Les moyens d'enseignement mis à disposition des classes de première année, ont été élaborés au début des années septante (parution en 1973), revus et corrigés en 1979. Cette réédition va donc avoir dix ans. Mais, en fait, leur conception de base remonte plus loin. Elle prend racine dans les approches psychologiques et didactiques des années soixante. En vingt ans, la manière de penser l'apprentissage de la mathématique a passablement évolué.

– Cela ne peut être sans conséquence sur la conception des moyens d'enseignement. C'est à cette réflexion que s'est attelée la Commission d'évaluation de l'enseignement de la mathématique (CEM). En tant que Commission consultative de l'IRDP, la CEM est un lieu privilégié, sur le plan romand, pour procéder à des échanges d'expériences, et pour imaginer l'avenir possible des ouvrages de mathématique, tant pour ce qui est de leur forme que de leur contenu. En d'autres termes, ce qui est engagé actuellement, est un travail prospectif pour fournir des bases solides à la conception d'une nouvelle génération de moyens d'enseignement. la mise en route de cette réalisation requerra, bien entendu, qu'il y ait consensus pour la juger opportune, voire indispensable. Voilà donc, brièvement, où en sont les choses.

– La situation me paraît assez claire. Mais, le fait que les moyens d'enseignement actuels datent un peu, est-ce vraiment une raison suffisante pour les déprécier? Entre nous, est-ce que cela ne devient pas une manie de vouloir sans cesse corriger et remanier des ouvrages, avec, chaque fois, l'assurance inébranlable de faire mieux qu'avant?

– Je te vois venir, tu vas finir par m'expliquer qu'on n'a jamais montré qu'il n'était pas possible de donner un enseignement rénové, centré sur l'activité de l'élève, avec un vieux manuel des années trentre!

– Prenons les choses sous un angle moins polémique. Ne peut-on pas imaginer qu'un même ouvrage soit, avec le temps, utilisé différemment en fonction de la compréhension de l'apprentissage mathématique que chacun développe par expérience et formation continue? On éviterait ainsi le piège des oppositions tranchées entre les pratiques jugées globalement caduques et celles dites rénovées.

– Je te l'accorde. Ce qui a été conçu par le passé, n'est ni nécessairement ni toujours, à mettre à la poubelle. Il est néanmoins important de situer un moyen d'enseignement dans le contexte précis où il a été conçu, réalisé. Chacun s'accorde à reconnaître que les contextes évoluent vite. Les moyens actuels en mathématique sont fortement marqués par un processus de rénovation des programmes d'enseignement, et cette rénovation on a imaginé de la faire passer dans la réalité quotidienne, en «équipant» au mieux maîtres et élèves. C'est ainsi que l'enseignement de la mathématique a été mis en musique, par un groupe d'auteurs, avec un soin tout particulier: une partition très complète, entièrement annotée, a été fournie aux exécutants. Des scénarios d'activités didactiques sont proposés, de multiples fiches de travail permettent de «tuiler» le temps scolaire (selon l'expression des réalisateurs de la télévision, qui ont la hantise du temps mort susceptible de trouer une émission). Le tout est rigoureusement et logiquement construit. En un mot, le programme de mathématique a été livré «clés en mains». Voilà, un peu caricaturé, le contexte de 1973.

– Le contexte de 1988 est-il vraiment différent?

– Oui, dans une certaine mesure. La visée de faire «passer», ou «mieux passer», l'innovation par le canal des moyens d'enseignement, n'est plus la préoccupation première des responsables scolaires. On estime que la rénovation est jouée; le dossier s'est refroidi. Du côté des enseignants, la situation est plus complexe. La demande de moyens bien conçus qui présentent un certain confort d'utilisation, reste dominante, même si une certaine fatigue se fait jour, ici ou là, à l'égard de moyens qui se multiplient et prennent décidément de l'embonpoint. Les uns comptent toujours sur un guide méthodologique précis, les autres, forts de l'expérience acquise, se contenteraient de quelques bonnes suggestions en matière de situations mathématiques. Les besoins en moyens d'enseignement et d'apprentissage se révèlent donc, aujourd'hui, très diversifiés.

– Un des buts des recherches évaluatives n'étaient-il pas d'apporter des corrections aux moyens d'enseignement pour qu'ils remplissent au mieux leur fonction?

– C'est exact: ces recherches ont permis de déceler certaines faiblesses, certaines lacunes. Sur plusieurs points, les moyens d'enseignement, puis les programmes, ont été revus en conséquence. Tu as pu, en particulier, constater l'importance du remaniement des ouvrages de cinquième et sixième année, deuxième édition. Malgré les améliorations apportées au vu de l'expérience, on est obligé d'admettre qu'il subsiste plusieurs points d'interrogations où l'incertitude est manifeste, et ceci dans presque chacun des principaux chapitres. Ce ne sont pas des défauts ou lacunes ponctuels auxquels il suffirait d'apporter des corrections. Ce sont des interrogations, soit sur le coût des approches didactiques proposées (dans le domaine de la numération ou des opérations), soit sur la pertinence même de ces approches (l'abus des diagrammes dans les activités de classement, ou la découverte de l'espace, souvent confinée à la surface d'une feuille A4). La question est de savoir comment résoudre ces problèmes de fond, source d'un malaise diffus. On pressent que ces points appellent plus un travail de réinvention que de correction. Il n'est pas certain que le travail de recréation de moyens d'enseignement trouve aisément sa place dans les procédures prévues actuellement, dans une logique de régulation, pour assurer, les corrections qui paraissent nécessaires.

– Si je comprends bien, sur plusieurs points, il faudrait reconsidérer certaines options de base et concrétiser de nouvelles démarches didactiques. Mais, est-on sûr qu'il s'agit là d'un problème de moyens d'enseignement? J'ai quelquefois l'impression qu'on accorde un poids excessif, quasi magique, à ces moyens. C'est à croire que ce sont eux qui tiennent la classe!

– Tu touches ici à une question importante. Il y a manifestement une focalisation constante sur ces moyens, que cela soit aux étapes de conception, de rédaction, d'expérimentation ou de remaniement. Cela s'explique en partie par le fait (rare en Europe) qu'ils sont produits et édités par les administrations scolaires. Les procédures de concertation remplacent les lois de la concurrence. Pour réaliser un ouvrage, sur le plan romand, on est obligé d'en parler beaucoup. Les commissions d'examen ou de lecture en savent quelque chose.

– Mais tu ne crois pas que c'est aussi un objet de discussion qui arrange tout le monde?

– Que veux-tu dire?

– Pour les responsables scolaires, c'est rassurant de savoir que pour enseigner la mathématique, les enseignants utilisent largement les mêmes ouvrages. Cela crée de l'ordre. On n'a pas trop à se demander (et à inspecter) ce qui se fait dans chacune des classes, modulo quelques adaptations personnelles, on sait d'avance ce qui s'y passe. L'utilisation assez systématique des moyens d'enseignement, assure une certaine homogénéité du travail scolaire. Pour les enseignants, disposer de moyens d'enseignement précis et bien conçus, clarifie également beaucoup la tâche qui leur incombe. C'est sécurisant de faire comme si l'enseignement se réduisait à appliquer le programme, à suivre les ouvrages méthodologiques et à donner la ration adéquate d'exercices et de fiches de travail aux élèves. Au fond, chacun sait que la réalité de l'enseignement ne se réduit pas à cette caricature et qu'elle est nettement plus complexe, plus épaisse, aussi plus intéressante. Mais cela relève presque de la vie «privée» de chaque classe. J'ai le sentiment que plus on s'occupe de moyens d'enseignement, moins on se penche sur cette réalité, sur les pratiques pédagogiques et didactiques effectives. Le moyen finit par faire écran, comme s'il disait, par lui-même, tout de l'enseignement. Pourquoi est-ce que l'on tend systématiquement à oublier qu'un outil ne vaut que par l'usage que l'on en fait?

– C'est une grosse question que tu soulèves là! Quand on met sous la loupe l'utilisation des moyens, et non le moyen en soi, cela introduit un certain relativisme. Et j'ai l'impression que celui-ci fait peur parce que l'on ne sait pas jusqu'où il peut conduire. Il contient en germe la diversification des pratiques didactiques. De là à imaginer tout et n'importe quoi, il n'y a qu'un pas! Comme je te le disais tout à l'heure, pourquoi ne pas ressortir des manuels des années trente, si ce qui compte c'est ce qu'on en fait en classe? Ce qui est difficile à faire comprendre, c'est que relativiser les moyens d'enseignement, ce n'est pas cesser de produire des moyens de qualité, mais c'est les prendre pour ce qu'ils sont, c'est-à-dire des outils que chacun manie selon sa propre conception de ce que les élèves doivent apprendre et de comment ils apprennent. Il est vrai que l'outil, par lui-même, peut induire ou infléchir certaines pratiques, mais on s'obstine à minimiser, sinon masquer, sa malléabilité, sa plasticité dans les mains du maître.

Cette source de variation est généralement escamotée; on en fait une question d'information et de formation, qui conduit l'enseignant à utiliser adéquatement, ou non, l'instrument proposé, comme si enseigner consistait à suivre fidèlement une posologie. Faut-il le rappeler, gérer les situations et activités d'apprentissage en classe, c'est l'affaire du maître et non du moyen d'enseignement que d'aucuns voudraient guide rassurant. Il est difficile de dire si un moyen d'enseignement est, en soi, bon ou mauvais. Son intérêt réside dans ce qu'il en est fait en classe.

– Adopter ce point de vue ne modifie pas profondément la manière même de penser la réalisation des moyens d'enseignement?

– Certainement! Avant de prétendre mettre sur le marché de nouveaux ouvrages pour enseigner la mathématique, il importe de mieux cerner les places et rôles possibles de tel ou tel type d'ouvrages dans le fonctionnement du travail de la classe; en d'autres termes, il convient d'étudier leur niche et leur validité écologique. Que les auteurs de manuels testent le fonctionnement de leurs ouvrages dans leur propre classe, c'est mieux que rien, mais cela n'est, actuellement, plus suffisant.

– Si je comprends bien, dans ta perspective, concevoir et rédiger un moyen d'enseignement n'est pas seulement une tâche à réaliser à deux ou à trois, autour d'une table, cela nécessite une étude sur le terrain, en prise directe et constante avec de futurs utilisateurs. La visée est de produire et de diffuser des instruments dont on sait d'emblée les types d'utilisation auxquels ils peuvent donner lieu. C'est intéressant comme perspective, mais cela revient à élargir ton champ d'investigation, en glissant de l'étude du moyen d'enseignement à celle des pratiques concrètes d'enseignement.

– Effectivement, c'est cela.

– Une dernière question, mais tu n'es pas obligé de me répondre: crois-tu qu'une démarche de cette nature sera comprise?

– (...) »

Un coin mathématique... de rêve

par Patricia Duboux

A l'heure où les nouvelles structures de l'Ecole vaudoise prennent leur vitesse de croisière, a-t-on encore le droit de rêver à quelques aménagements pédagogiques permettant aux élèves d'apprendre en l'absence du maître?

Le *Coin math* pourrait être un lieu privilégié, favorisant l'action. Il devrait développer l'autonomie de l'élève en lui donnant l'occasion de:

- avoir du plaisir à jouer,
- développer des stratégies,
- se débrouiller face à une règle de jeu,
- informer,
- communiquer,
- échanger,
- contrôler son travail,
- consolider des notions apprises,
- ...

Bien sûr, vous me direz que le jeu n'est pas encore reconnu comme activité pleine et entière (le ludique s'opposant encore dans certaines têtes au «sérieux» qui devrait régner en maître à l'école), mais ce *Coin math* serait accessible à tous les élèves, les meilleurs comme les plus faibles. Chacun pourrait y évoluer selon son rythme, ses motivations et ses propres capacités.

Cet espace devrait être aménager avec des jeux provenant:

- du commerce (Jeu du onze - Echecs - Balance à poids - 20 sur 20 - ...),
- des enfants (apport de la maison),
- de réalisations d'élèves (conception, fabrication).

Au travers de ces jeux, les enfants pourraient trouver des situations motivantes qui piquent leur curiosité, suscitent immanquablement la recherche de l'explication, les mènent alors de manière agréable à la compréhension et leur assurent d'apprendre. Alors pour l'enseignant, il ne s'agirait plus de donner l'explication qui éclaire subitement tous les esprits mais c'est une tout autre animation que l'on attendrait de lui. Ainsi l'enfant se verrait continuellement en situation de résolution de problèmes. Il aurait recours au matériel naturellement, se questionnerait, modifierait ses conceptions. Il apprendrait que les mathématiques de sont pas un ensemble de règles, de lois à retenir, de consignes à suivre, mais qu'elles se construisent et se comprennent.

Quel beau chantier!

par Michel Chastellain

En début d'année 88, la lecture d'une brochure éditée par l'IRDP et intitulée MODALITÉS POUR UNE PRATIQUE AUTONOME DE LA MATHÉMATIQUE m'a donné l'envie d'une mise en pratique de son contenu. Cet article résume l'expérience vécue et **reprend les points forts décrits dans la brochure.** Il a également pour but de mettre en évidence les difficultés et les plaisirs rencontrés en classe, pendant les deux mois de mise en pratique des concepts proposés.

Introduction

Le Groupe de travail pour l'Etude et la Recherche de Moyens d'Enseignement et d'apprentissage (GERME) constitue une sous-commission de la Commission d'Evaluation de l'enseignement de la Mathématique (CEM). Il sert de lieu de rencontre entre des instituteurs, des maîtres de mathématique et des méthodologues qui désirent réfléchir au problème de la «pratique autonome de la mathématique».

Le GERME a édité en octobre 87 un fichier provisoire qui contient quelques conseils pratiques (résumés par la suite) pour la mise sur pied d'un **coin mathématique** et l'organisation de **chantiers mathématiques.** Ce fichier ne prétend pas faire le tour des activités possibles, qui sont nombreuses. Il ne fournit qu'un premier stock d'exemples, dans différents domaines et pour différents degrés, qui peut facilement être élargi.

Le coin mathématique

Le **coin mathématique** doit être compris comme un emplacement relativement à part dans la classe. Il est aménagé le plus souvent de manière permanente et est fréquenté quotidiennement. L'objectif consiste à permettre à l'enfant de faire des mathématiques quand il le désire, à son rythme, donc avec plaisir et sans la présence active de l'enseignant. Cette pratique vise l'individualisation, soit notamment la liberté de choix de l'activité et la liberté d'organisation. On se rend au **coin mathématique** quand on a fini son travail, à certains moments de la journée ou de la semaine, et avec un temps de passage défini ou non.

Les activités peuvent être présentées, par exemple, à l'aide de fiches et les consignes doivent être très claires, afin de permettre un travail autonome. De par sa définition même, le **coin mathématique** ne permet pas un suivi «classique» des élèves. **Il est nécessaire d'acquérir une certaine confiance qu'il se «passe quelque chose» dans le coin mathématique.**

Des fiches de fréquentation et une discussion de classe sont deux moyens qui permettent d'avoir un contrôle global de la démarche.

Le chantier mathématique

Travailler en **chantier mathématique**, c'est se donner un certain nombre d'activités que les élèves effectuent par groupes. La classe entière travaille simultanément sur des activités différentes. Après plusieurs séances, la plupart des élèves auront effectué l'ensemble des activités prévues: il est primordial de respecter les capacités et le rythme des enfants. Un des objectifs essentiels réside dans la possibilité de communication, que se soit dans le cadre du groupe, avec le maître ou par écrit.

Un certain nombre de périodes hebdomadaires sont prévues pour le travail en «chantier». Les consignes sont données par écrit, mais le maître devra préciser certaines tâches en cours de travail. Les comptes rendus fournis par les groupes permettent d'évaluer les objectifs de communication (organisation du texte, clarté, ...) ainsi que les démarches et contenus mathématiques.

Oui, mais...

L'organisation préconisée, tant pour la création d'un **coin mathématique** que pour la mise sur pied de **chantiers mathématiques**, ainsi que les différentes descriptions proposées pour ces activités, posent un certain nombre de problèmes dont le moindre n'est certainement pas l'effort d'adaptation demandé au maître:

Les activités offertes s'adressent, alternativement, à des élèves de la première à la sixième année. Est-il possible de conduire de la même façon des classes de niveaux si différents?

Chez les plus petits, l'espace de la classe est occupé par différents ateliers, par exemple: le coin bibliothèque, le coin jeu, etc. Les enfants ont la possibilité de se déplacer, plus ou moins librement, d'un endroit à l'autre. La mise en œuvre d'activités mathématiques de ce type ne pose, a priori, pas trop de difficultés nouvelles. Chez les plus grands, par contre, il a fallu «œuvrer» pour leur faire comprendre que «l'âge de la transhumance» était révolu! Choisir l'option du **coin mathématique**, c'est, entre autres, accepter une «augmentation du trafic» et les désagréments que celui-ci engendre! Un tel choix peut, pour certains, poser quelques problèmes d'ordre disciplinaire.

Dans les petites classes la maîtresse est «unique», ce qui lui permet, dans une certaine mesure, de gérer son temps de manière plus «souple». Dès lors comment envisager une telle activité pour un maître des plus grandes classes, maître dit «spécialiste»?

Entamer un **chantier mathématique** implique une organisation spatiale (tables aménagées pour les «chantiers» nécessitant un matériel important), une organisation temporelle (prévoir plusieurs périodes à disposition en étant conscient que certains «chantiers» seront terminés avant d'autres) et une organisation sociale (formation de groupes).

En tant que «spécialiste», c'est-à-dire en ne disposant que d'environ six périodes par semaine, et parfois «isolées», la tâche n'est pas simplifiée. Elle est cependant réalisable si l'on charge les élèves de préparer, puis de ranger le matériel (ce qui fait également partie de l'apprentissage de l'autonomie) et si l'on accepte d'être «foudroyé» par les collègues, par suite des «prolongations sauvages» inévitables!

Les programmes de Cinquième et de Sixième ainsi que les structures d'orientation liées à ces années ne condamnent-ils pas les maîtres à se fixer sur un enseignement plus «traditionnel»?

Un coin mathématique ou des **chantiers mathématiques** se prêtent particulièrement bien à l'enseignement du programme de mathématique des années 1 à 4, dans la mesure où de nombreuses activités proposées font également appel à la manipulation, au découpage, au jeu, ... Mais est-il réaliste, pour les degrés 5 et 6, d'investir de l'énergie et du temps afin de satisfaire à un objectif de type général (autonomie de l'élève) au détriment d'objectifs de connaissances et de savoir-faire? A cette question, il faut répondre oui, et plutôt deux fois qu'une parce que l'apprentissage de l'autonomie de l'élève facilite sa découverte de la Mathématique. Par exemple, dans les années ultérieures, faire de la géométrie c'est aussi:

- **obsever** une figure pour en recueillir des informations,
- **organiser** une activité et choisir une démarche de démonstration,
- **faire preuve de curiosité,**
- **s'informer** et **décider**, par soi-même, d'une démarche à suivre,
- **vérifier** une affirmation,
- **obtenir un résultat et s'en souvenir,**
- **informer** et **communiquer,**
- ... .

Or atteindre ces objectifs, c'est justement être autonome, comme le soulignent les auteurs de la brochure du GERME.

Proposer, à l'élève, entre des activités mathématiques d'entretien d'une notion fraîchement découverte et des travaux effectués au coin mathématique, n'est-il pas synonyme d'une désertion de tous au profit d'une facilité qui pourrait devenir rapidement dangereuse?

Il serait utopique d'imaginer que l'élève soit capable de gérer son temps de telle manière qu'il se répartisse judicieusement entre les deux pôles d'attraction. Son problème est le suivant: «Vais-je me «farcir» l'exercice 38 ou vais-je me faire plaisir, en fond de classe, sur un chouette travail?». Ou alors, cela signifierait que «l'objectif d'autonomie» est atteint. C'est donc à l'enseignant qu'incombe de veiller à ce que le «tournus» profite à tous, tout en s'efforçant de sensibiliser les élèves à ce problème. Là encore, la tâche du maître consiste en une bonne gestion de l'organisation globale. Autrement dit, il s'agit d'un travail supplémentaire. Mais lorsque l'on se retrouve en face de l'enthousiasme des élèves, le surcroît d'investissement est vite oublié. Cet enthousiasme est d'ailleurs à l'origine d'une sérieuse remise en cause d'un enseignement habituel trop «ronronnant»!

Un compromis

Les vingt-deux élèves, dont une partie des travaux fait l'objet d'une présentation dans la suite de cet article, appartiennent à une Sixième année scientifique, classe avec laquelle nous disposons de six périodes par semaine. Compte tenu des éléments qui précèdent, la procédure adoptée est hybride: un **coin mathématique** dans lequel les activités proposées étaient, en fait, des **chantiers mathématiques.** Autrement dit, les dimensions de la classe étant suffisantes, j'obtins de mes estimés collègues, mais surtout de mon charmant concierge, l'autorisation de déposer du matériel «permanent» (deux mois) en fond de classe.

La brochure du groupe GERME propose actuellement 28 fiches, parmi lesquelles six furent choisies, afin de garantir un certain «recoupement», pour chaque activité, et favoriser ainsi la discussion entre les différents groupes. Les chantiers ont été ouverts pendant deux mois, à raison de une à trois périodes chaque semaine, en fonction de l'état d'avancement du programme.

Les consignes générales de départ ont été les suivantes:

- Chacun est libre de s'associer ou non à un ou deux collègues, mais les groupes formés le resteront jusqu'à la fin des activités.
- Chacun devra réaliser au minimum deux activités à choix parmi les six.
- Chaque groupe est libre de se rendre à son travail en dehors des périodes de découverte d'une nouvelle notion mathématique et des épreuves écrites pour note, bien évidemment!

Parmi les fiches proposées, en voici trois, respectivement accompagnées d'une description du matériel nécessaire et d'une photographie de celui-ci:

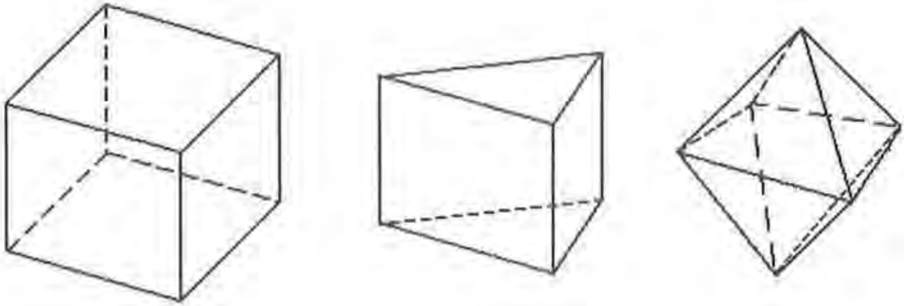
Destinataires: élèves de la 4e à la 6e année.

Matériel:
- fiches de travail
- pièces triangulaires et carrées
- crayons de papier
- crayons de couleur (bleu, rouge, vert, jaune)

Remarque: Travail individuel ou en groupe. Développements illimités. Il existe également des pièces pentagonales.

Référence: Matériel Polydron, exclusivité Vivishop.

POLYÈDRES



....
....
....

....
....
....

....
....
....

1. Arriveras-tu à construire ces trois polyèdres?

   Construis-les et colorie ces dessins avec les couleurs que tu as choisies.

2. Note, sous tes dessins, le nombre et la forme des faces de chaque polyèdre.

3. Construis un autre polyèdre. Note le nombre et la forme de ses faces.
   Essaie de le dessiner ici:

4. Démonte tes polyèdres et remets le matériel dans la boîte lorsque tu as fini.

DEUX MODALITÉS D'UNE PRATIQUE AUTONOME DE LA MATHÉMATIQUE	
FICHE 4.8	LE PLUS GRAND PRODUIT

Destinataires: élèves de 5e et de la 6e année.

Matériel:
- fiches de travail
- 3 calculettes
- 3 crayons de papier

Remarque: Travail individuel ou en groupe, sous forme de concours.

Référence: Chastellain, M., Jaquet, F. Michlig, Y. *Mathématique - Sixième année.* Edité par l'Office romand des éditions et du matériel scolaires, 1985 (thème 2, activité 13, p. 50).

LE PLUS GRAND PRODUIT DE NOMBRES DONT LA SOMME EST 20

1. Choisis des nombres dont la somme est 20, autant que tu veux. Vérifie que tu ne t'es pas trompé(e). Tu dois obtenir 20 lorsque tu additionnes les nombres choisis.

2. Calcule le produit de ces nombres (le résultat de leur multiplication).

Exemple:	nombres choisis	vérification	produit
	2, 1 et 17	$2+1+17=20$	$2 \cdot 1 \cdot 17=34$

3. Choisis maintenant d'autres nombres dont la somme est encore 20, mais dont le produit est plus grand que le précédent.

Exemple: 10, 6, 2 et 2 $10+6+2+2=20$ $10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2=240$

4. Recommence avec d'autres nombres dont la somme est toujours 20.

5. Trouveras-tu des produits plus grands que 1000? que 10000?
Note tes essais ci-dessous. Souligne tes records!

	Nombres choisis			Vérification	Produit
	2	1	17	$2+1+17=20$	$2 \cdot 1 \cdot 17=34$
A toi !					

Destinataires: élèves de la 4e à la 6e année.

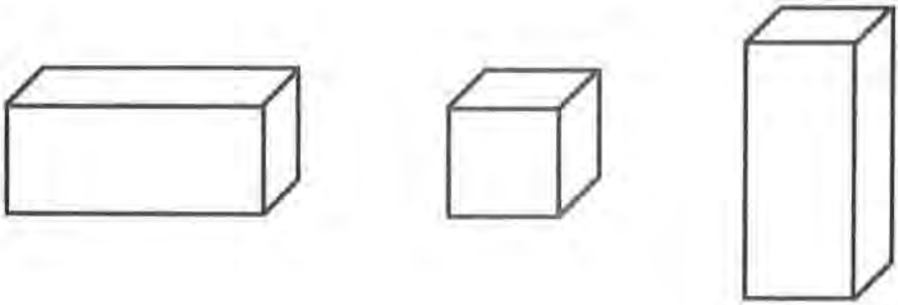
Matériel:
- 72 cubes
- feuilles de papier A4 quadrillé
- 3 crayons gris
- 1 gomme
- 1 fiche de consigne

Remarque: Activité prévue pour trois élèves.

Référence: Groupe mathématique du SRP. *Mathématiser: Recherches en didactique sur le programme des degrés 5 et 6 – A partir du cube – Quelques caractères de divisibilité.* Genève: Service de la Recherche Pédagogique, SRP No 17, 1978.

PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

Voici les croquis de quelques parallélépipèdes rectangles (blocs rectangulaires, boîtes, etc.):



1. Combien de parrallélépipèdes rectangles **différents** peux-tu construire en utilisant **pour chacun** les 72 petits cubes en bois à disposition?

   Trouve une **notation** claire qui permette de se souvenir de chacun d'eux, de ne pas en oublier ou de ne pas avoir deux fois le même ou, encore, de pouvoir les reconstruire.

2. Est-il possible, avec ces 72 cubes, de construire **un grand cube?** Si oui, écris ses dimensions (nombre de cubes sur une arête). Sinon, essaie de prouver, d'expliquer par écrit (ou par dessin) pourquoi ce n'est pas possible.

3. Quels sont tous les nombres de petits cubes plus petits que 72 qui permettent de construire un cube?

4. Est-il possible de faire un grand cube avec 500 petits cubes? Si oui, quelles sont ses dimensions?

   Et avec 1000 petits cubes?

Préparation du matériel

L'idée d'un fichier composé d'une série de feuilles qu'on met à disposition des élèves, et qui peut être complété en tout temps par de nouvelles activités, est particulièrement agréable. Mais il faudrait que ces fiches se trouvent dans un classeur et non pas sous la forme d'une brochure. De plus, des feuilles cartonnées résisteraient mieux aux nombreuses manipulations. Par ailleurs, la qualité d'impression de certaines fiches m'a conduit à débuter par une réécriture de celles-ci (le Mac a encore frappé!).

Chacun des postes de travail, judicieusement réparti en fond de classe, se composait d'une caisse en plastique dans laquelle les élèves trouvaient, en plus de la fiche de consignes, le matériel nécessaire à l'activité. En règle générale, la préparation du matériel se résume à placer dans la caisse des cubes en bois, du papier et des ciseaux, des polydrons, pour l'activité POLYEDRES par exemple, etc. Parfois, il s'agit d'élaborer son matériel, c'est le cas pour l'activité CONTENU MYSTÉRIEUX, mais la description donnée dans la brochure, pour chaque fiche, facilite bien ce travail.

Un véritable chantier

Vint le jour de la mise en train! Je passai la première partie de la période à expliquer aux élèves la nouvelle orientation proposée, à décrire le matériel, le type d'activité et la façon de procéder. Je précisai également le genre de «retour» demandé, à savoir un petit compte rendu, décrivant le travail et les éventuelles constatations. J'insistai lourdement pour responsabiliser chacun sur son «devoir» d'alterner harmonieusement «chantiers» et activités habituelles. Enfin, je soulevai le problème de l'augmentation des décibels étroitement liée à une atmosphère de plus grande autonomie. Chacun put alors s'acoquiner selon son envie et il se forma, relativement rapidement, un groupe à trois, neuf groupes à deux. Un élève émit le désir de rester seul.

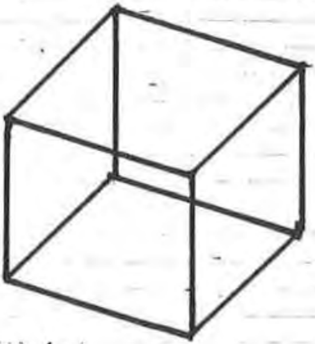
Je n'ai malheureusement jamais assisté au lâcher de taureaux de Pampelune, mais j'ai par contre découvert une superbe corrida, dans ma classe! Dès l'autorisation d'entamer le travail délivrée, ce fut un véritable rush en fond de classe afin de s'approprier le plus rapidement possible l'une ou l'autre activité, sans choix possible, bien évidemment! Quel enthousiasme! Je restai seul, bien seul à mon pupitre, et bien éloigné de ce tas «exhubérant»!

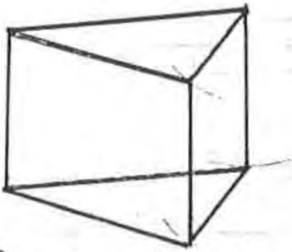
Les détails du retour à la case DÉPART ne sont pas particulièrement intéressants, mais il faut insister sur le fait que nous fûmes contraints d'organiser un plan de «passage» donnant des chances égales à tous.

Quelques productions

Les quelques extraits de travaux qui suivent permettent d'étayer les propos tenus, bien que le but de cet article ne consiste ni en une présentation du travail réalisé par les élèves, ni en une analyse de ces recherches:

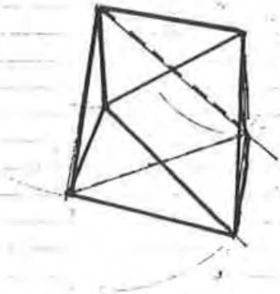
POLYÈDRES





5 faces. 2 triangles, 3 carrés

cube
6 faces
6 carré



8 faces
8 triangles

vu de dessus

5 faces
4 triangles, 1 carré

Nous avons construit ces formes à l'aide de pièces en plastique.

Le plus grand produit de nombres dont la somme est 20

1) <u>Nbre choisis</u> <u>Vérification.</u>

Nbre choisis	Vérification
15, 2 et 3	15 + 2 + 3 = 20
1, 1, 1, 1 et 16	1+1+1+1+16=20

2)

Nbre choisis	Verification	produit
15, 2 et 3	15 + 2 + 3 = 20	15 · 2 · 3 = 90
1, 1, 1, 1 et 16	1+ 1+1+1+16 = 20	1·1·1·1·16 = 16

3)

Nbre choisis	Verification	produit
9, 5, 3 et	9+5+3+' =20	9·5·3·3 = 405.
10, 5, 3 et 2	10 + 5+3+2=20	10·5·3·2 = 300.

4)

8, 3, 3, 3 et 3	8 +3+3 +3 +3=20	8 ·3·3·3 · 3 = 648
4, 4, 4, 4 et 4	4+4 +4+4+4 =20	4·4·4·4·4 = 1024
3, 3, 3, 3, 3, 3 et 2	3+3+3+3+3+3+2=20	3·3·3 ·3·3·3·2 = 1458

5)

Nbre choisis	Vérification	~~ce~~ produit.	
4, 4, 4, 4, 4	4+4+4+4+4=20	4·4·4·4·4 =	1024
3, 3, 3, 3, 3, 5	3+3+3+3+3+5=20	3·3·3·3·3 · 5 =	1215
3, 3, 3, 3, 3, 3, 2	3+3+3+3+3+3+2=20	3·3·3·3·3·3·2 =	<u>1458</u>
2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3	2+3+2+3+2+3+2+3=20	2·3·2·3·2·3·2·3 =	1296
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3	2+2+2+2+2+2+2+3+3	2·2·2·2·2·2·2·3·3 =	1152
F	i	N	

Nous avons pris des nombres dont la somme est toujours vingt. Nous avons cherché (et trouvé) leur produit.

Nous avons essayé de trouvé des produits plus grand que mille. (Nous n'en n'avons pas trouvés de plus que 1458)

Parallélipipes rectangle.

nombre de cubes en hauteur	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	
nombre de cubes en largeur	1	2	3	4	6	8	2	3	4	6	3	4	
nombre de cube longueur	72	36	24	18	12	9	18	12	9	6	8	6	

1) Je peut construire: 12 parallélipipes rectangle
2) non, parceque 72 n'a pas de racine cubique.
3) le cube de 4 sur 4 sur 4 = 64 cubes.
le cube de 3 sur 3 sur 3 = 27 cubes.
le cube de 2 sur 2 sur 2 = 8 cubes
le cube de 1 sur 1 sur 1 = 1 cube.
4) c'est impossible de faire un grand cubes avec 500 cubes. 500 n'a pas de racine cubique
On peut faire un cube de 10 sur 10 sur 10 avec 1000 petit cubes.

Déroulement des opérations

Les élèves se sont succédé régulièrement aux emplacements de travail, durant deux mois, et ont, en règle générale, réalisé de bonnes activités. Jamais je n'ai eu à constater un manque d'intérêt pour l'une ou l'autre des fiches proposées, bien au contraire! Les discussions entre groupes et avec toute la classe ont été utiles aussi bien pour réactualiser une notion déjà vue que pour en introduire une nouvelle. De ce fait, la crainte de «perdre du temps» ne se justifie pas.

Pendant cette période, il a fallu, bien évidemment, effectuer un certain nombre de travaux écrits portant sur les activités étudiées hors «chantiers». Compte tenu de la relative liberté des élèves (choix entre «chantiers» ou exercices d'entretien), le rôle du maître à consister en une vérification que tous aient effectuer la liste des exercices imposés, afin que nul ne soit désavantagé. De temps à autre, il a dont été nécessaire d'interrompre, momentanément, le tournus des «chantiers».

Quelques remarques finales

A la lecture de la brochure MODALITÉS POUR UNE PRATIQUE AUTONOME DE LA MATHÉMATIQUE, j'avais éprouvé deux sentiments, qui ont été à l'origine de cet article: d'une part, un vif intérêt pour la démarche préconisée et, d'autre part, un léger doute quant à la crédibilité de cette démarche, face au corps enseignant des degrés 5 et 6. Dans ces conditions, il était essentiel de «tester» les propositions, puis de les relater quelque part, afin d'apporter un modeste témoignage de l'expérience vécue. C'est pourquoi, tout au long de cette bafouille, je me suis efforcé de mettre en évidence les inévitables quéstions que chacun se poserait dans de telles circonstances. Mais ces considérations ne sauraient être exhaustives. De plus, il me paraît essentiel de les compléter par les remarques finales qui suivent:

- Tout au long des séances, le maître a été sollicité par des questions diverses (consigne, compréhension, ...). Le surcroît de travail (organisation, modification du cheminement dans la matière à enseigner, ...) n'est pas à négliger, mais il est largement compensé par l'intérêt des élèves dont l'enthousiasme du début n'a nullement disparu puisque, à la fin de l'expérience, ils ont réclamé d'autres fiches.

- Le conflit principal qui se présente est celui de savoir si l'on se situe dans le cadre du programme et plus particulièrement «si l'on n'est pas en train de prendre du retard». Incontestablement, il faut admettre qu'une bonne maîtrise de la matière à enseigner facilite le départ dans une telle organisation. Mais toutes les activités proposées touchent aux objectifs à atteindre en cours d'année, dans les niveaux concernés. Il n'en demeure pas moins que les «tièdes» coucheront sur leurs positions en restant persuadés que la matière «traditionnelle» n'aura pas pu être entièrement parcourue.

  N'oublions pas cependant, que nous avons également pour mission de favoriser le développement d'objectifs de type «généraux». La brochure du GERME semble particulièrement efficace pour parvenir à celui d'une meilleure autonomie de l'élève. D'ailleurs, mise à part l'organisation, ou plus exactement la désorganisation des élèves lors de la première séance (qui a directement trait à leur plaisir et leur enthousiasme), on peut affirmer que cet objectif a été pleinement atteint.

Calculs numériques

par François Conne
Quatrième épisode du feuilleton consacré
aux activités numériques élémentaires
(Math Ecole No 128, 130 et 132)

I. Première série d'exemples

Ce texte sera avant tout consacré à des exemples de calculs numériques additifs.
Sans revenir sur les définitions de [2], je rappellerai ceci:
Les calculs numériques consistent en général en un enchaînement ou un emboîtement de transformations diverses, allant de simple réécriture des données (pose du calcul) à des calculs élémentaires auxiliaires apprêtant les données en vue de les simplifier.
Une des fonctions des supports symboliques est de permettre la pose des données, c'est-à-dire de permettre l'organisation préalable des calculs. Ce qui caractérise le traitement mathématique est un jeu d'analyse et de recombinaisons des relations en jeu. Ceci s'applique bien aux calculs, que ce soit à des exemples très élémentaires comme ceux qui suivent ou que ce soit pour des calculs très élaborés.
Voici quelques exemples très élémentaires de ceci:

Exemple 1: $6 + 238 = 238 + 6 = 244$

On peut considérer cet exemple soit comme calcul écrit, soit comme calcul mental. Ici l'apprêt des données consiste en une permutation des nombres. Voici ce qu'on pourrait en dire:

a. Cette permutation est licite puisque l'addition est commutative. Un tel commentaire n'explique pas grand chose, et il ne dit pas pourquoi le calculateur a inversé les données, est-ce qu'il trouve plus commode de procéder ainsi? et si oui, sur quelle connaissance se base-t-il pour penser ainsi?

b. Supposons que le calculateur procède par «comptage en avant» (counting on), c'est-à-dire amorce son comptage au nombre succédant à la première donnée. Dans ce cas il est préférable de compter 6 au-delà de 238 que de compter 238 au-delà de 6. Mais ceci ne garantit pas, en soi que les deux comptages fournissent le même résultat.

c. On peut supposer alors que, dans cette affaire, la numération verbale (par opposition à la numération chiffrée) intervient. Tout d'abord découpages correspondants des deux données en: centaines, dizaines, unités, puis opération sur les unités de même valeur. Ici, cela veut dire que 6 agit sur le 8 de 238 et pas ailleurs. Dès lors, le déplacement du 6, «exprimerait» qu'il porte sur le 8 et non pas sur le 2 (2 cents).

d. On peut aller encore plus avant dans l'analyse, et considérer que le calculateur est engagé à produire un nombre, et que c'est cette production qui l'amène à examiner les unités dans l'ordre voulu par la numération: centaines, puis dizaines puis unités. Il calculera par exemple mentalement: 6 + 238, deux cents... deux cent trente... deux cent quarante.. quatre; **deux cent quarante-quatre.**

Note: Ces points de vue sont différents et pourtant, ils peuvent être complémentaires. Ceci indique la complexité de l'analyse, même pour des calculs simples. L'observation des actions du calculateur n'est pas toujours facile, et requiert soin et attention. En général, dans un entretien avec un élève, on se centre alternativement sur tel ou tel aspect.

Exemple 2: Prenons maintenant deux exemples de calcul mental. On notera le va-et-vient entre dizaines et unités, la décomposition des noms de nombres (qui sont des noms composés) et leur recombinaison.

2a. 75 + 18
septante-cinq plus dix-huit, septante... huitante cinq plus huit... treize, nonante trois: **nonante-trois.**
La dissociation des noms de nombres se fait à la fois pour des raisons d'organisations des données, et pour des raisons de mémorisation. Le calcul est alors terminé lorsque 1° toutes les données ont été considérées 2° on aboutit à un nom de nombre (composé).

2b. 75 + 18
septante-cinq plus vingt nonante cinq moins deux, trois; **nonante-trois.**
Il y a substitution dans la chaîne de calculs de deux transformations auxiliaires enchaînées + 20 et − 2. L'ordre peut être aussi bien − 2 et + 20. La simplification vient du fait que l'on n'opère que sur un type d'unité à la fois, et qu'on évite la retenue.
On remarquera aussi sur cet exemple, la nature syncopée des expressions. Ceci fait penser à un enchaînement d'égalités, ce qui s'écrirait:
$75 + 18 = 75 + 20 = 95 - 2 = 93$. [Fausses et dangereuses «égalités», NDRL]

Note par rapport au calcul mental: L'esprit des calculateurs, enfants ou adultes, est agile. Ceci rend particulièrement difficile la description complète et fidèle des procédures. Entre autres, il y a jeu sur différents registres: verbal/chiffré: sonore/imagé; sur les unités composées/décomposées, etc. Dans ce cas, ce qu'il importe le plus de noter, c'est la pose du calcul, c'est-à-dire l'organisation symbolique des données au départ, ainsi que **ce que le calculateur cherche à produire.** Ainsi, l'esprit est différemment orienté lorsqu'il s'agit de produire une série de chiffres (qui ensemble formeront le résultat) ou un nombre déjà formé verbalement. Dans ce dernier cas, on sera d'emblée tenu à procéder «de gauche à droite».

Exemple 3: Comparons deux façons de calculer 278 – 49.

3a. $278 - 49 = 279 - 50 = 200 + (79 - 50) = 229$

3b. $278 - 49$

$$200$$
$$70 - 40 = 30$$
$$200 + 30 = 230$$
$$9 - 8 = 1$$
$$230 - 1 = \mathbf{229}$$

Selon l'algorithme décrit en [2]. Cet algorithme est basé sur la propriété algébrique suivante: $a + (b - c) = a - (c - b)$. D'autre part les données d'une soustraction font que, si on procède de «gauche à droite» on aura: $a > (b - c)$. (Le nombre duquel on soustrait est plus grand que le nombre que l'on soustrait et l'ordre «gauche droite» va des unités d'ordre supérieur aux unités inférieures); dans cet exemple a prend les valeurs: 200, 230 tandis que $(b - c)$ respectivement: $(70 - 40)$ et $(8 - 9)$.

Comparaison des deux calculs: Nous avons affaire dans les deux cas à des calculs numériques. Chaque étape intermédiaire est marquée par une écriture. Dans le cas a) on joue 1° sur une compensation: l'augmentation de 49 en 50 compense celle de 278 en 279. 2° sur la décomposition de 279, comme nous avons déjà vu.
Dans le cas b) il y a décomposition et mise en correspondance des unités de même ordre dans les données. Soustractions dans la colonne de droite. Soustraction ou addition dans la colonne de gauche selon la comparaison des chiffres des données.

Distinction entre ces deux types de calculs: Pour bien caractériser la distinction entre ces types de calculs, il convient d'examiner le type de simplification opéré dans les deux cas. Dans le cas a), la décision d'augmenter les facteurs d'une unité provient de la circonstance suivante: c'est le seul moyen de rendre le chiffre des unités du second facteur, inférieur à celui des unités du premier facteur. De plus, ceci se conjugue avec une annulation des unités (49 – **50**). Dans le cas b), la seule simplification provient du découpage du calcul en sous-opérations élémentaires. Cependant, on a introduit d'autres opérations auxiliaires qui ne simplifient pas le tout, l'enchaînement pris dans sa totalité (seules les opérations prises une à une sont plus élémentaires).
La transformation du calcul 3a (augmenter les facteur de 1) n'a de sens que dans le cas choisi, selon les données. C'est une opérations ad hoc. Alors que la chaîne algorithmique de l'exemple 3b est univoquement déterminée et est applicable quelle que soit la «configuration des données». Ce calcul joue sur la disposition des données à la fois de «gauche à droite» que de «haut en bas». Ainsi dans ce calcul, la position des chiffres est systématiquement exploitée dans le guidage des opérations. De sorte que dans ce cas le calculateur peut travailler de proche en proche, sans se soucier d'anticiper le résultat de ses calculs, ou plutôt de choisir la transformation idoine.

Du point de vue des symboles numériques et de leur disposition, on peut caractériser cette différence de la manière suivante. Dans le cas 3a, les symboles sont pris «au sens plein» (synchrétiquement): les relations qui entretiennent les nombres (278 et 279) d'une part et (49 et 50) d'autre part font que l'on aboutit au même résultat en soustrayant 50 de 279 qu'en soustrayant 49 de 279. Dans le cas 3b, il y a distribution des informations données sur différents plans fonctionnels. La formalisation du calcul joue des redondances pour cela. Dans ce sens, le calcul algorithmique traite autant les règles de la numération que le nombre.

Prolongement de l'exemple 3: Le lecteur comparera les calculs suivants:

$$\begin{array}{r} 8371 \\ -\ 3754 \\ \hline \end{array}$$

a) $$\begin{array}{r} {}^{7}\cancel{8}\,{}^{1}3\,{}^{6}\cancel{7}\,{}^{1}1 \\ -\ 3754 \\ \hline 4617 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} \overset{1}{8}37\overset{1}{1} \\ -\ 3754 \\ \hline \overset{1}{4}6\overset{1}{1}7 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rrr} 8000 - & 3000 = & 5000 \\ 700 - & 300 = & 400 \\ 5000 - & 400 = & 4600 \\ 70 - & 50 = & 20 \\ 4600 + & 20 = & 4620 \\ 4 - & 1 = & 3 \\ 4620 - & 3 = & 4617 \end{array}$$

d) $8371 - 3754 = 8377 - 3760 = 8317 - 3700 = 8617 - 4000 = 4617$

Exemple 4: Le rendu de la monnaie peut-il être considéré comme un calcul numérique?

4a. Rendre la monnaie de 500 Fr. sur 114 Fr.

$$114 \xrightarrow{1\text{ Fr.}} 115 \xrightarrow{5\text{ Fr.}} 120 \xrightarrow{10\text{ Fr.}} 130 \xrightarrow{20\text{ Fr.}} 150 \xrightarrow{50\text{ Fr.}} 200 \xrightarrow{3\times 100\text{ Fr.}} 500\text{ Fr.}$$

Il s'agit bien d'un calcul portant sur des symboles numériques, ici la monnaie et son organisation numéralogique (sous-unités par rapport à la numération de base 10). Cette méthode est formalisable et **univoque** (à quelques permutations près). Mais cette méthode ne restitue pas un nombre! Celui-ci reste à déterminer par un calcul annexe (qu'on peut mener en parallèle).

Mais il en est de même avec l'algorithme usuel: l'effectuation de: $\begin{array}{r} 500 \\ -114 \\ \hline \end{array}$ produit des chiffres et leur inscription dans le résultat dans un ordre donné. **Une opération de lecture du résultat** final est nécessaire pour que soit déterminé le nombre trouvé. Dit autrement: l'algorithme produit l'écriture d'un nombre.

Cette lecture finale peut être considérée comme automatique, immédiate, elle n'est pas moins nécessaire à la restitution du sens des symboles déterminés. Elle n'est que l'inverse de l'opération préalable au calcul qui a consisté en sa pose.

Dans ce sens on considérera 3 moments du calcul: pose - $\boxed{\text{effectuation}}$ - lecture. Ceci s'applique à tout calcul assisté que ce soit par quelqu'ustensile de calcul (abaque, machine, réglette, etc.) ou par un tableau de chiffres (un diagramme).

4b. Le calcul de complémentation que constitue le rendu de la monnaie s'adapte à une situation très précise. Il convient en effet aux situations pratiques où on ne dispose pas de monnaie, ou pas assez de monnaie. Ceci s'exprime par la clause (implicite) qu'on ne complémente qu'à des «chiffres ronds». Pour effectuer 278 – 49 par exemple, le **cheminement n'est plus univoque:**

$$49 \xrightarrow{1} 50 \xrightarrow{50} 100 \xrightarrow{100} 200 \xrightarrow{50} 250 \xrightarrow{20} 270 \xrightarrow{8} 278$$

$$49 \xrightarrow{1} 50 \xrightarrow{5} 55 \xrightarrow{2} 57 \xrightarrow{1} 58 \xrightarrow{20} 78 \xrightarrow{2\times 100} 278$$

Ainsi ces exemples nous montrent que les calculs numériques se subdivisent en deux catégories nouvelles:

– Les calculs algorithmiques supposent l'inscription des données et des marques d'enchaînement dans un diagramme (ou tableau). Je qualifierai ces calcul par l'expression: CALCULS ASSISTÉS PAR UN DIAGRAMME (le mot «diagramme » est emprunté à MARTIN GARDNER dans son livre: *L'étonnante histoire des machines logiques* [4]).
– Les calculs numériques relationnels sont d'un autre type. je vais définir cette expression dans le paragraphe suivant.

Nous avons donc la classification suivante:

DÉNOMBREMENTS

COMPTAGES

CALCULS NUMÉRIQUES

CALCULS NUMÉRIQUES RELATIONNELS

CALCULS ASSISTÉS PAR UN DIAGRAMME
PAR UN INSTRUMENT

II. Calculs numériques relationnels

Il faudra que j'explique cette nouvelle expression. Disons pour commencer qu'elle désigne tout traitement numérique non prédéterminé par une méthode algorithmique.
Ce terme de «relationnel» est emprunté à G. Vergnaud dans ce qu'il appelle le calcul relationnel [5]. Et je l'utilise ici à bon escient pour indiquer que le numérique tout comme toute réalité mathématique se prête à de tels calculs. Le but de cette partie est de spécifier la distinction que je veux faire. Nous nous rapprochons alors de la notion de faits numériques proposés dans l'épisode précédent de mon feuilleton [3].

Le cadre de cette étude est de déterminer quelles connaissances sont en jeu dans l'apprentissage des opérations numériques élémentaires.
Les propriétés structurelles mathématiques dont nous nous occupons maintenant sont relativement peu nombreuses. Tous mes exemples sont des exemples d'addition et de soustraction. Mais même si on élargissait le propos aux questions des multiples et des décompositions en diviseurs (ce qui serait possible sans autres, ... peut-être que j'y consacrerai un épisode ultérieurement) ces propriétés resteraient très restreintes.
Par contre le matériau numérique est très riche. Ceci par le jeu des niveaux de symbolisation et de ce qui les lie, par le jeu de la diversité des symbolisations aussi, et de leurs «isomorphismes». On a vu aussi, avec la notion de fait numérique, que des relations propres aux figures symboliques s'amalgamaient ainsi aux propriétés purement numériques. La notation algébrique étant à ce propos un bon analyseur (ou dissolvant). Ainsi, par exemple, quelque part derrière la numération verbale ou chiffrée se «tapit» la notion de coefficient (ou bien encore, voyez comme il est difficile de séparer la notion de décomposabilité en facteurs premiers de ce que ça donne dans notre numération chiffrée).
Un calcul numérique relationnel tire parti systématiquement des relations produites sur le support symbolique. Par exemple la perception de répétition de certains chiffres ou certaines configurations. Mais ceci à des niveaux très divers, entrant plus ou moins profondément dans les symboles en présence.
Voyons quelques exemples, toujours à propos de l'addition.

Exemple 5. Dans le second épisode [2] nous avons examiné les tâches du type $a+b=c+\ldots$ et un «algorithme» spontanément proposé par les maîtres: calculer $a+b$ puis compléter c au résultat. algébriquement ceci pourrait se noter $a+b=c+x \Rightarrow x=(a+b)-c$, les parenthèses étant là pour signifier l'ordre dans lequel prendre les opérations (les parenthèses sont donc une marque symbolique organisant la séquence des calculs). Mais ce type de traitement s'il est toujours assuré d'aboutir n'est pourtant pas le seul possible, et il n'est pas non plus toujours indiqué. Par exemple dans le cas où nous aurions:

$$49+14=48+\ldots$$

Dans ce cas la réponse peut être déterminée «par simple coup d'œil». C'est 15! Le lecteur aura ainsi saisi que l'on joue sur une relation entre 48 et 49, ainsi que sur la constante de la somme indiquée par l'égalité. Cette relation est comme une circonstance secondaire favorable.
La traduction algébrique de cette tâche est, nous l'avons dit:

$$a+b=c+x$$
$$x=(a+b)-c$$

Mais cette égalité peut s'écrire autrement:

$$x=a+(b-c) \quad ; \quad x=a-(c-b) \quad ; \quad x=b+(a-c) \quad ; \quad x=b-(c-a) \ldots$$

C'est sur la troisième «organisation» ($x = b + a - c$) que la relation perçue (49 est 1 de plus que 48) nous aura orienté. Ainsi donc, le fait numérique «9 est le successeur de 8» aura permis de déterminer directement la réponse en prenant le successeur de 14. On prend appui sur l'invariance de la somme pour compenser les écarts entre données. Bien entendu, ceci est exploitable particulièrement dans la représentation chiffrée. Si on avait traité le même problème avec des jetons, tout un travail préalable de disposition (organisation figurative) aurait été nécessaire pour pouvoir repérer puis exploiter cette relation.

Remarques:

1. Une telle relation qui lie les facteurs d'un calcul n'est qu'annexe, et bien entendu ne répond à aucune nécessité. Nous avons un cas particulier.

2. Toute une classe de calculs numériques arrivent à tirer parti d'une relation d'écarts entre les nombres. D'ailleurs du point de vue formel on pourrait tout aussi bien traiter toutes les tâches de la forme $a + b = c + ...$ en traitant les écarts entre a et c, par exemple. Mais dans ce cas la détermination de l'écart entre a et c ne serait qu'une soustraction comme une autre.
   Donc, ce qui est déterminant ici, c'est de cerner **les conditions particulières où l'écart entre les données** (ou tout autre type de relation annexe) **peut être exploitée.** Alors nous pouvons rattacher à ce type de calcul celui de l'exemple **3a** qui, lui aussi, à sa façon jouait sur les écarts entre facteurs: $278 - 49 \Rightarrow 279 - 50$.
   Nous avons ici une autre exploitation des mêmes faits numériques.

3. Bien entendu, ma présentation suit un chemin descendant: du cas général au cas spécifié. La position de celui qui apprend ou qui résoud un véritable problème est inverse. Dans ce cas cela lui demanderait tout un travail difficile de parvenir à distinguer parmi les relations qu'il exploite lesquelles sont essentielles et lesquelles ne sont que circonstancielles.
   Dans l'exemple ci-dessus, la notion «d'écart» est plus primitive pour l'enfant que celle «d'associativité-commutativité de l'addition».

Exemple 6. Dans les exemples 1 et 2 nous avons vu que le nombre était décomposé en constituants, voici d'autres cas de calculs de la sorte:

6a. $314 + 459 = 359 + ...$

Ici, c'est la décomposabilité de l'écriture qui est en jeu. La relation peut ici à nouveau être «vue». La propriété en jeu est le fait que l'écriture d'un nombre est une addition: $(300 + 14) + (400 + 59) = (300 + 59) + ...$ On peut interchanger les facteurs (associativité - commutativité).

6b. $343 + 434 = \ldots$

Ici la répétition peut rendre plausible celle du résultat 777, et le rendre ainsi plus assuré. Par contre oralement trop de répétitions de chiffres peut rendre difficile la mémorisation des données, il y a confusion parce que le sujet n'arrive pas à distinguer suffisamment: «trois cent quarante-trois plus quatre cent trente-quatre». Il arrrive souvent que lorsqu'on leur dicte une telle donnée les élèves nous demandent de la répéter plusieurs fois.
Ainsi les relations auxiliaires apportées par telle ou telle représentation symbolique peuvent aussi jouer un rôle de bruit. La distinction des chiffres aidant à décomposer le nombre.
Exemple: «mille cent onze» difficile pour certains enfants ou adultes à transcrire en 1111; et vice et versa 1111 à lire.

6c. On peut aussi jouer avec les chiffres des données d'un calcul: $12195 - 32995 + 35978 = \ldots$

«en analogie à l'algèbre»: $\underbrace{1\,\cancel{2}\,1\,\cancel{9}\cancel{5} - \cancel{3}\,\cancel{2}\,\cancel{9}\,\cancel{9}\cancel{5} + \cancel{3}\,5\,\cancel{9}\,7\,8}_{15178}$

Ce que je voulais surtout montrer dans ces exemples, c'est que les mises en relations auxiliaires qui orientent le calcul peuvent s'appliquer à divers niveaux symboliques. Dans l'exemple 5 ce sont les nombres qui sont représentés dans l'écriture qui sont mis en relation; ici ce sont, **au cœur de l'écriture des nombres,** les chiffres qui les composent eux-mêmes.

III. Méthodes de calcul: algorithmes et heuristiques

Heuristique: Les exemples précédents ont été construits de toutes pièces pour les besoins de mon étude. Le caractère que je voulais leur donner était le suivant: a) ne pas être par trop sophistiqués et abstraits, ni même se rapprocher de méthodes élaborées de calcul. Je ne me suis donc pas intéressé aux exemples de ce type que l'on trouve dans tout manuel de calcul arithmétique, de calcul mental, dans les ouvrages destinés à «épater ses amis» ni dans les ouvrages décrivant les trucs des «calculateurs prodiges». La même analyse aurait pu porter là-dessus ceci pourrait d'ailleurs faire l'objet de jolis travaux d'études. Mais il fallait rester le plus proche possible du niveau réellement traité par les élèves. Niveau auquel nous nous intéressons. Pourquoi alors ne pas prendre des exemples réels de calculs observés? Mais là, un nouvel écueil, à savoir, la difficulté de trouver des exemples clairs et simples. En effet, dans la réalité, du fait de la mobilité de l'esprit des élèves, on n'observe pas les choses de manière isolée.

L'idée qui distingue calculs numériques relationnels et calculs numériques assistés par un diagramme est précisément celle qui distingue procédé heuristique de procédé axiomatique. Et ce dans l'acception précise que G. Polya présente dans son ouvrage: *Mathematics and Plausible Reasonning* [6]. Un calcul «heuristique» est un procédé qui a un caractère plausible, il sert de guide à la découverte de la réponse, mais sans garantie a priori de succès. Il suppose des prises de décision de la part de l'élève.
A ce propos, il s'agit pour moi de développer quelques idées centrales pour mon étude.

Méthode: Un point très délicat dans mon étude est celui de délimiter précisément ce que je décris. C'est avant tout le versant objectif qui m'importe ici, et je le dégage pour que l'on puisse à son tour bien isoler la connaissance mathématique que développe un élève à l'apprentissage et à la pratique du calcul.
Originalement les mots algorithme et heuristique se réfèrent à des méthodes de traitement des données dans des résolutions de problèmes. Gardons donc cette définition restreinte, et ne cherchons pas à utiliser ces mots pour décrire les procédures et les productions des élèves eux-mêmes.
De plus, **en tant que méthodes,** algorithmes et heuristique intéressent l'enseignement à plus d'un titre.

1° C'est un bon media pour l'échange pédagogique. A ce propos voyons ce que dit F. Gonseth à propos de la méthode: «la méthode qu'est-ce que c'est? c'est un ensemble de règles qui nous permettent plus ou moins, mais avec une certaine plausibilité, de parler aussi au nom des autres, et quasi au nom d'un autre quelconque». [7] On pourrait s'amuser à voir ici la méthode décrite avec des mots que l'on trouve pour l'heuristique. Mais là n'est qu'un détail. Ce qui est important dans cette phrase c'est que la méthode lie soi-même et les autres. La méthode est donc un cadre d'interprétation de ce que, dit-on, fait l'autre. Et par la réciprocité de cette relation elle permet le dialogue.

2° Les méthodes sont des instruments de la pensée. Les calculs en sont. On peut souhaiter que les élèves en apprennent le maniement pour savoir affronter telle ou telle situation à laquelle ils seront, peut-être, confrontés ultérieurement. Mais ici on rencontre un obstacle de taille, celui de la reconnaissance des problèmes eux-mêmes, resconnaissance sans laquelle le choix des méthodes n'est bien entendu pas possible et partant encore moins leur application. Or en général cette reconnaissance tient à une codification des problèmes et à une analyse des relations que cela leur confère. C'est ici que algorithmes et heuristiques diffèrent nettement. Nous allons y revenir. Mais auparavant on peut déjà déduire ceci:
Ce n'est pas seulement qu'elles sont applicables au traitement d'une réalité extra-numérique que les méthodes de calcul sont porteuses d'ob-

jectivité. Avec elles, une part de l'univers mathématique (tel que décrit en [3]) et sa connaissance sont engagées.

3o Ainsi donc, l'apprentissage du calcul (des méthodes) initie aux mathématiques et c'est cette raison avant toute autre que le projet pédagogique en organise l'enseignement. (Le choix est culturel et révisable bien entendu). Dès lors les méthodes de calcul revêtent un autre statut encore: celui d'être des instruments didactiques, dont le rôle est de faire apprendre les mathématiques. (Les réussites des élèves à appliquer ces méthodes ne reflètent que très faiblement l'accomplissement de cette tâche pégagogique).
Algorithmes et heuristiques exercent une très forte attirance sur les pédagogues. Hélas! hélas! les concevoir comme des objets d'enseignements pose d'énormes problèmes didactiques, au niveau du contrat didactique principalement. Avec comme effet général que trop souvent l'on initie les élèves de la même façon aux deux types de méthodes. Guy Brousseau a très bien analysé cette question dans un texte récent [8].
Pour ma part, je me garde justement de considérer algorithmes et heuristiques comme des objets d'enseignement. celui-ci ne porte que sur la connaissance mathématique et je garde aux méthodes le statut de médiateur d'échange, de moyen de traitement des données et de moyen pédagogique.
A ce propos voici dans quel sens je propose de considérer les choses, concernant les calculs arithmétiques élémentaires.

Les distinctions essentielles entre algorithmes et heuristiques.

Ce qui contraste le plus ces deux méthodes c'est la façon dont les connaissances y sont engagées!

1o Un algorithme est une procédure assurée d'avance (par un théorème) sur une classe de problèmes qu'il ne faut même pas connaître, mais qu'il s'agit seulement de pouvoir reconnaître à certains critères généraux. Les seuls problèmes qu'un calcul algorithmique pose sont:

a) la connaissance des conditions d'applicabilité;
b) le contrôle de l'effectuation, par les règles de l'algorithme;
c) l'interprétation des résultats.

Par contre pour l'heuristique, il s'agit de tout autre chose. Le problème est de construire par le traitement la garantie d'aboutir. C'est donc la question de la pertinence des opérations engagées qui est posée. Or cette pertinence ne peut être assurée que par la mise en relation d'éléments de connaissance, c'est-à-dire par le concours, ou l'établissement de faits numériques.

Je dirai pour résumer que ces deux méthodes répondent à **des régimes de finalité** très distincts. Ceci a une conséquence très grande dans le contrôle des calculs effectués. En effet un calcul heuristique erroné n'aboutit, en général pas. **Ainsi opère-t-il le plus souvent son propre contrôle. Par contre l'algorithme est la plupart du temps producteur d'une réponse dont il faudra vérifier (juger, examiner) l'exactitude.**

2° J'ai évoqué dans l'épisode précédent [3] le rôle producteur des algorithmes, les heuristiques ont elles un rôle formateur des connaissances, car elles établissent un réseau de faits et de relations et y font circuler le sujet.

3° Par contre une heuristique, est en principe toujours seconde, d'un ordre de complexité plus grand qu'un algorithme. Et ceci pour une très simple raison logique: si une heuristique peut s'appuyer sur des sous-traitements algorithmiques éventuels, une procédure algorithmique est de bout en bout réglée!
Remarquons alors que pratiquement, dans l'échafaudage des traitements et des méthodes, il peut y avoir malgré tous ces éléments de contraste, continuité des unes aux autres de ces méthodes.

a) Concernant les algorithmes, deux circonstances:
– Passé un certain degré de complexité (de surcharge des données) la question de la pertinence des actions engagées se pose à nouveau et amène à moduler l'algorithme. Par exemple dans le calcul de $(40'081'787'109'376')^2$ on a intérêt à utiliser une formule annexe, d'autres découpages que celui en chiffres.
– Nous l'avons dit (et dit à la suite de beaucoup d'autres) il y a une certaine dissociation entre l'algorithme d'une part et la classe de problèmes qu'il traite. Ceci donne l'occasion d'un jeu, de généralisations, analogies, donc ceci est l'occasion d'être producteur de traitements heuristiques.

b) Concernant les traitements heuristiques, ceux-ci en viennent à être décantés, formalisés et aboutissent quelquefois à la détermination de nouveaux algorithmes

Note indispensable à propos de l'algèbre: Le calcul algébrique n'est pas fait d'algorithmes, on peut dire que l'enseignement de l'algèbre recourt «par segment» à des algorithmes, ainsi qu'à des métodes en soi de type heuristique, mais de fait fortement normalisées, rigidifiées. Ce qui a pour conséquence de réduire la part «intelligente» du travail à la simple reconnaissance de bonnes formes (identités remarquables, etc. [9]). La standardisation des méthodes de calcul algébrique ainsi que l'efficacité que cela lui confère, le font apparaître –

culturellement – comme un super-algorithme, et ce surtout lorsqu'on le compare au raisonnement arithmétique (cf. Y. Chevallard [9]).

4° Nous en arrivons alors à un point central de mon exposé. C'est que le passage de procédés heuristiques organisés (en cas particuliers) à un algorithme s'accompagne d'un changement de niveau symbolique. L'algorithme traitant alors à un niveau supérieur. Par exemple, le tableau devient le cadre de tous les cas particuliers définis heuristiquement, et si une procédure formelle peut se mettre ainsi en place, c'est parce que le symbolisme et son organisation vient à se substituer à l'examen des données et des moyens à mettre en œuvre.
Ceci aboutit à une nette décomplexification des traitements, mais bien entendu à une abstraction et une élaboration nettement supérieure.
Ainsi donc le passage à l'algorithme est un passage à un régime symbolique supérieur. Ceci s'accompagne de changements notables:

a) Les registres de mémoire dans lesquels le calculateur va puiser les faits sur lesquels il s'appuie sont distincts. Dans le cas d'un algorithme, la connaissance des tables suffit, dans le cas d'une procédure heuristique, le calculateur puise dans un répertoire de relations interconnectées structurées et ordonnées selon leur degré d'évidence.

b) Les régimes symboliques sont distincts. alors que les procédures heuristiques, **en ce qui concerne le calcul numérique,** traitent un seul niveau de symbolismes (mis en relation ou éventuellement en «traduction»). Les calculs assistés par un diagramme traitent: a) des diagrammes qui organisent le parcours du calcul b) des codes pour les données du calcul (les nombres) c) des marques localisent le calcul et en particulier indiquant les points de bifurcation. Par exemple la retenue provenant d'un calcul exécuté et dont il faudra tenir compte dans une étape ultérieure du calcul.
Plus d'un lecteur sera étonné de voir s'engager un débat entre heuristiques et algorithmes à propos d'exemples aussi trivaux que les calculs élémentaires. si j'en suis venu à ces mots c'est que je ne pouvais pas, s'agissant de décrire les activités numériques échapper aux distinctions qu'ils désignent. Mais il y a plus, il y a un effet retour qui nous informe sur ces catégories, mieux que les exemples plus complexes. Voici deux résultats importants.

1° Cela n'a pas de sens de parler dans l'absolu de méthodes heuristiques et algorithmiques. Il faut les situer selon les niveaux de traitement, et les choses traitées c'est-à-dire le niveau symbolique et les faits numériques exploités. Ceci seul permet les comparaisons fructueuses.
Ainsi par exemple, il faut, pour pouvoir caractériser les calculs heuristiques d'additions faits par de jeunes élèves, situer soi-

gneusement sur quoi portera le jeu heuristique. Ce n'est pas sur les propriétés structurelles et formalisées mais se situe **en deçà,** dans les relations qu'entretiennent les numérations écrites et orales et aussi tous les moyens de désignation des cardinaux ou des ordinaux. C'est afin d'être précis là-dessus que j'ai construit quelques exemples théoriques, et pour bien dénoter ceci que je m'en suis expliqué à la page 30 de ce texte.

Nous retrouvons donc ce souci exprimé dans l'épisode précédent de bien situer les choses et cette distinction entre trois niveaux successifs: le niveau manifeste, le niveau inférieur sur lequel on se repose et le niveau supérieur qui explique. Ainsi l'heuristique est-elle une exploitation manifeste de faits et relations numériques tandis que dans les méthodes algorithmiques cette exploitation est plus implicite, ce qui est manifeste étant le fonctionnement (déroulement) de l'algorithme lui-même.

Ceci est très net dès le moment où on étudie les activités élémentaires. A un niveau plus élevé cela devient bien moins visible car les niveaux sont beaucoup plus enchevêtrés, ils se télescopent, on y traite des données moins immédiates ou intuitives.

2o Le second résultat a trait à la description des activités des élèves. Je me suis gardé de faire de ces concepts algorithmes, heuristiques, des descriptions de l'activité de l'élève ni même de ses procédures.

On pourrait soutenir que toute procédure prise en charge en son entier déroulement est une heuristique, et que si le mot d'algorithme peut s'appliquer à quelque chose ce ne sera qu'à des sous-séquences relativement courtes de ces procédures. On parle quelquefois, à ce propos, de routines [10]. Rien de cela n'est clair à l'heure actuelle et en général, il faut être prudent. La question est délicate car elle porte sur le rôle des modèles descriptifs en psychologie et leur possible ou impossible exploitation didactique. Et ce qui en didactique fait obstacle, c'est qu'il faut tenir compte des connaissances des sujets, ce dont sont dispensés jusqu'ici les automates ou autres modèles des opérations mentales.

Références bibliographiques

[1] CONNE François, *Comptage et écriture des égalités lacunaires dans les premières classes de l'enseignement primaire.* Math-Ecole nº 128, Genève 1987.

[2] CONNE François, *Entre comptage et calcul.* Math-Ecole nº 130, Genève 1987.

[3] CONNE François, *Numérisation de la suite des nombres et faits numériques.* Math-Ecole nº 132 et 133, Genève 1988.

[4] GARDNER Martin, *L'étonnante histoire des machines logiques.* Dunod, Paris 1964.

[5] VERGNAUD Gérard, *Calcul relationnel et représentation calculable.* Bulletin de Psychologie, 315, XXVIII, 7-8, Paris 1974-1975.

[6] POLYA G., *Mathematics and Plausible Reasonning,* Chap. XVI vol II. Princeton University Press, Princeton 1968.

[7] GONSETH Ferdinand, *Du côté de la subjectivité: l'horizon de figuration,* in Sciences, Morales et Foi, textes recueillis, ordonnés et présentés par Eric EMERY, Dialectica, L'Age d'Homme, Lausanne 1986.

[8] BROUSSEAU Guy, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* Recherches en didactique des Mathématiques, nº 7.2, La Pensée Sauvage, Genoble 1986.

[9] CHEVALLARD Yves, *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège.* Petit x nº 5, Grenoble 1985 et 1988 (à paraître).

[10] SAADA-ROBERT Madelon, *Le nombre, significations et pratiques.* Recherches en didactique des Mathématiques, nº 7.1, La Pensée Sauvage, Genoble 1986.

J. A. 1211 GENÈVE 11

TABLE DES MATIÈRES

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:

MM. Th. Bernet, A. Calame, R. Délez, P. Duboux, M. Ferrario, F. Jaquet, Y. Michlig, F. Oberson, D. Poncet.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 16.—, Etranger: F 18.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 20 bis, r. du Stand, CP 119; CH 1211 Genève 11.
(Tél. (022) 27 42 95)

Adresse: Math-Ecole; 20 bis, rue du Stand, CH-1211 Genève 11; CP 119

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion