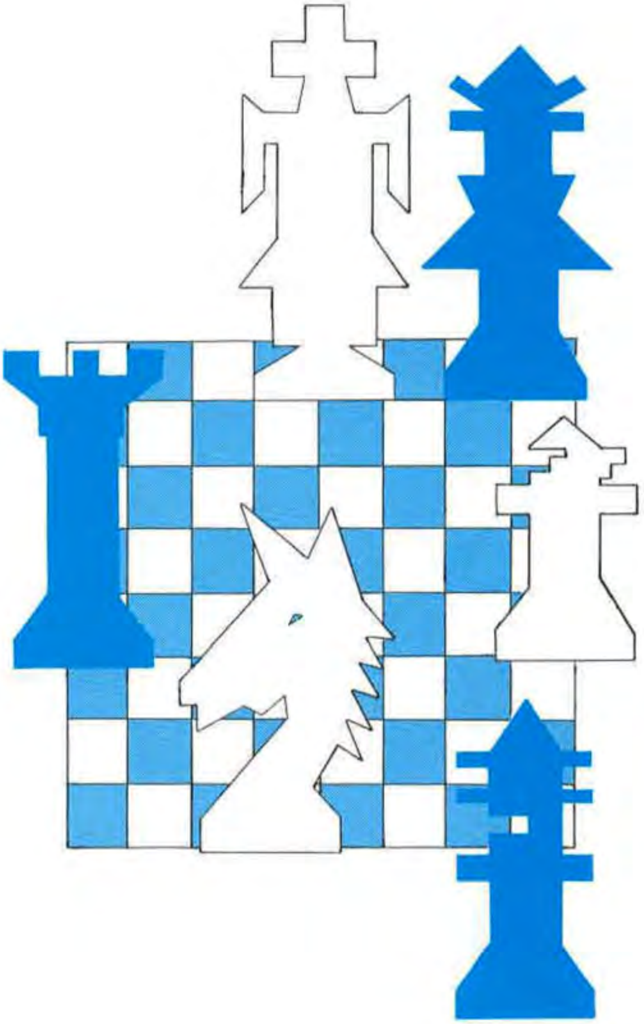
139



MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1989
28e ANNÉE

MATH-ECOLE 139

28e ANNÉE Paraît cinq fois par an SEPTEMBRE 1989

Editorial

Il y a:
- l'unité et le zéro,
- le positif et le négatif,
- le pair et l'impair,
- le vrai et le faux.

D'accord! Mais est-ce une raison suffisante pour tout ramener à un dualisme primaire? Que ce soit en politique, en religion, en économie, on entend de plus en plus des affirmations tranchées qui tiennent plus du slogan médiatique que de l'esprit d'ouverture. Pour peu, on demanderait aux maîtres de mathématiques un choix péremptoire entre
- la médiatrice et la bissectrice,
- le sinus et le cosinus,
- la règle et le compas.

Ces propos n'auraient guère leur place dans *Math-Ecole* si je n'avais lu dans un ouvrage récemment paru[1]:

«Nous subissons aujourd'hui le contrecoup de la réforme des mathématiques modernes (...). Une véritable schizophrénie du sens et de la forme – correspondant à la séparation de plus en plus étanche des littéraires et des scientifiques – s'est alors installée. Et cette situation étrange nous a conduits à la production d'un système éducatif polarisé sur deux catégories limites d'élèves:
- d'un côté, des «matheux», véritables «bêtes à concours» capables de calculer et de résoudre en un tour de main les problèmes les plus sophistiqués, mais, généralement, inaptes à les comprendre en profondeur et à en expliquer le sens dans une langue à la fois convaincante et charpentée;
- de l'autre, des «littéraires», les mieux placés pour extraire «la substantifique moelle» des problèmes, mais bien incapables d'en poser la première équation».

Face à ce réquisitoire, je réagis au nom de tous ceux qui ont travaillé à l'avènement des «mathématiques modernes». Loin de moi l'idée de plaider non coupable; ce serait aussi une position extrémiste. Mais j'invoque fermement les circonstances atténuantes.

Mis à part quelques excès assez tôt entrevus et corrigés, ne voit-on pas des améliorations indiscutables? Serait-il aussi aisé d'enseigner les probabilités si les élèves n'avaient jamais construit des diagrammes en arbres? Pourrait-on avoir un cours d'algèbre linéaire sans le support du calcul vectoriel développé pendant la scolarité obligatoire? Et que dire de l'analyse où la notion de fonction, d'application repose sur les nombreux graphes dessinés pour les fonctions élémentaires?

L'écart entre littéraires et scientifiques me paraît se combler. Il fut un temps où les bacheliers du type A représentaient une sorte d'élite gymnasiale. Aujourd'hui, ils se trouvent rejoints par les scientifiques pourvu qu'ils disposent d'une ouverture, par exemple du côté des arts. Dans une classe scientifique où un tiers des élèves pratiquent un instrument, je crois entrevoir quelques-uns des humanistes de l'an 2000.

André Calame

[1] A.-A. Upinsky – Clefs pour les mathématiques – Segehrs, Paris, 1988.

De l'expérimentation à la démonstration

par André Calame

L'enseignement des mathématiques élémentaires comprend un certain nombre d'activités dites de recherche. Nous nous limiterons ici à celles qui consistent à trouver une propriété générale à partir de l'examen de plusieurs cas particuliers. De ce point de vue, la mathématique apparaît comme une science naturelle: on observe des êtres mathématiques, que ce soit des nombres, des figures, des opérations, et on note les propriétés intéressantes; dans le meilleur des cas, on énonce une loi générale. On fait de l'**induction.**

Cette approche est conforme au Plan d'Etudes de CIRCE III qui précise que l'élève apprend les mathématiques «lorsqu'il a l'occasion de développer ses multiples facultés pour vivre toutes les phases d'une recherche et acquérir ainsi le caractère et les aptitudes que cela nécessite».

Lors de la phase inductive, on court évidemment le risque de voir apparaître des propositions fausses. On aurait d'ailleurs pu intituler cet article: «Les risques d'une généralisation hâtive». Mais, à la réflexion, il nous a semblé que ce titre serait trop pessimiste pour traiter d'activités au plus haut point enrichissantes.

Pour des raisons d'homogénéité, les exemples que nous citons dans la suite sont tous tirés du cours utilisé dans les sections prégymnasiales du canton de Neuchâtel, et partiellement introduit dans le canton du Jura [1]. Nous nous proposons de poursuivre la réflexion au niveau secondaire supérieur.

Un premier exemple concerne la somme des angles intérieurs d'un polygone (voir fiche n° 1). On expérimente sur différents polygones et le n qui figure en dernière colonne est plus une invitation qu'une exigence. On souhaite que les élèves se posent la question du cas général, même si tous n'obtiennent pas la formule:

$$s = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Le passage à la généralisation n'est pas évident. Balacheff [2] cite le cas d'élèves qui, après avoir remarqué que tous les pentagones ont cinq diagonales, concluent que dans n'importe polygone il y a autant de diagonales que de côtés.

Le deuxième exemple (fiche no 2) fait intervenir des dénombrements. Ici encore, la dernière ligne est plus suggérée qu'imposée. Mais notons que pour remplir les dernières lignes, il faut avoir acquis une assez bonne compréhension des relations en cause. Il est sans doute plus facile de trouver le périmètre et l'aire du grand triangle que de donner l'expression du nombre des points à six arêtes:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

POLYGONES

22. Somme des angles d'un polygone

Découpe un triangle de grandes dimensions (dans un journal).

Déchire-le en trois parties, dont chacune contient un de ses angles.

Détermine la somme de ces trois angles en juxtaposant les parties et en faisant coïncider leurs sommets.

Cette somme varie-t-elle, d'un triangle à l'autre ?

Refais l'expérience, avec un quadrilatère ou avec d'autres polygones à plus de quatre côtés.

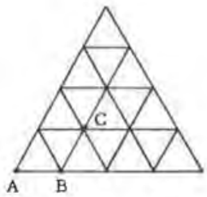
Résume tes résultats, et ceux de tes camarades, dans ce tableau :

nombre de côtés du polygone	(triangle) 3	(quadril.) 4	5	6	10	n
somme de ses angles, en degrés	180°	360°				

DENOMBREMENTS

3. Triangles

Exemple : Si tu regardes la figure ci-dessous, tu peux vérifier plusieurs choses intéressantes :



1) D'un point d'intersection peuvent partir

   2 arêtes (exemple : A)
   ou 4 arêtes (exemple : B)
   ou 6 arêtes (exemple : C)

2) Si l'on prend comme unité de longueur le segment AB, le périmètre du grand triangle vaut 12.

3) Si l'on prend comme unité d'aire un petit triangle, l'aire du grand triangle vaut 16.

a) Complète le tableau dont la 4ème ligne correspond à l'exemple donné.

Longueur du côté du grand triangle	Nombre de points à 2 arêtes : I	Nombre de points à 4 arêtes : II	Somme des colonnes I et II	Nombre de points à 6 arêtes	Périmètre du grand triangle	Aire du grand triangle
1	3	0	3	0	3	1
2	3	3	6	0	6	4
3				1		
4	3	9	12	3	12	16
5						
6	3	15	18	10	18	36
10						
20						
n						

Une fois obtenu un résultat général dans une phase inductive, les élèves sont convaincus de sa vérité. Une vérification sur de nouveaux cas particuliers peut tout au plus renforcer leur conviction. Au niveau de la mathématique expérimentale, aucun doute n'est plus possible. Si nous y insistons, c'est qu'une bonne part de l'enseignement des mathématiques dans les dernières années de la scolarité obligatoire se présente, de manière légitime, sous cet angle où aucune preuve supplémentaire ne semble avoir sa raison d'être.

Par opposition, examinons le climat de l'enseignement des mathématiques dans les écoles qui préparent à la maturité. Un résultat tiré de l'expérimentation n'est plus qu'une conjecture qu'il s'agit de démontrer. Le statut de la preuve est complètement modifié. On peut dire qu'il y a rupture du contrat pédagogique par rapport aux années précédentes. L'**induction** doit faire place à la **déduction.**

Les élèves sont souvent désemparés par ce revirement méthodologique. On note alors certains blocages qui peuvent tenir à deux raisons au moins:

- à quoi bon démontrer une proposition dont on sait parfaitement qu'elle est vraie? «A quoi ça sert?» Cette célèbre question ne porte pas ici sur les applications éventuelles des mathématiques, mais bien sur leur fonctionnement interne.
- comment s'y prendre pour construire une démonstration? Ici, les termes hypotèse – conclusion peuvent entraîner des confusions. En mathématiques, on tient pour vraie l'hypothèse en vue de prouver la conclusion dont on se permet de douter. Or, dans la langue courante, une hypothèse est plutôt une conjecture à vérifier. D'où le risque de voir s'échafauder des démonstrations dans lesquelles l'hypothèse et la conclusion sont inversées.

Il n'est pas aisé de persuader les élèves que les démonstrations permettent d'organiser les connaissances mathématiques. Certains résultats sont plus importants que d'autres. Il en est qui doivent être mis en évidence pour leur généralité; d'autres ne sont que de simples conséquences. Une hiérarchie des propositions conduit à une meilleure compréhension de l'ensemble.

Afin d'amorcer un passage en douceur de l'induction à la déduction, il convient d'étudier des situations où la généralisation ne mène pas toujours à une proposition vraie. Par exemple (fiche no 3), peut-on vraiment deviner ce qui va se passer d'une ligne à la suivante? A l'occasion du chapitre intitulé «Logique et raisonnement», on ne manque pas de préparer activement le passage à la démonstration (fiche nº 4).

On trouve dans la littérature de nombreux exemples intéressants [3]. Ils portent assez souvent sur les nombres premiers. Citons deux exemples:

- Les nombres 31, 331, 3331, 33331, ... sont-ils tous premiers? Aucun des nombres de cette suite n'est divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13 ou 37. Mais un tel nombre est divisible par 17 si le nombre des chiffres 3 est de la forme $16k+8$. Ainsi:

$$333\,333\,331 = 17 \cdot 19\,607\,843$$

4. Pyramides de nombres

Ta calculatrice peut t'aider à compléter les premières lignes, mais ses possibilités sont limitées, alors que les tiennes... !

a)

$9^2 = 81$	$6 \cdot 9 = 54$
$99^2 = 9801$	$66 \cdot 99 = 6534$
$999^2 = 998001$	$666 \cdot 999 =$
$9999^2 =$	$6666 \cdot 9999 =$
$99999^2 =$	$66666 \cdot 99999 =$
$999999^2 =$	$666666 \cdot 999999 =$

b)

$7^2 =$ 49	$1^2 =$ 1
$67^2 =$ 4489	$11^2 =$ 121
$667^2 =$ 444889	$111^2 =$ 12321
$6667^2 =$	$1111^2 =$ 1234321
$66667^2 =$	$11111^2 =$
$666667^2 =$	$111111^2 =$

c)

$2^2 =$ 4	$3^2 =$ 9
$22^2 =$ 484	$33^2 =$ 1089
$222^2 =$	$333^2 =$ 110889
$2222^2 =$	$3333^2 =$
$22222^2 =$	$33333^2 =$
$222222^2 =$	$333333^2 =$

d)

$11^2 =$ 121

$11^3 =$ 1331

$11^4 =$ 14641

$11^5 =$

$11^6 =$

$11^7 =$

$11^8 =$

$11^9 =$

Fiche No 3

17. Est-ce vrai ?

Si oui, essaie de le prouver !

a) Le produit de deux nombres consécutifs est pair.

b) Le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

c) La somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

d) Le carré d'un nombre impair vaut 1 de plus qu'un multiple de 8.

e) Le cube d'un carré moins ce nombre est un multiple de 6.

f) Le produit du pgdc par le ppmc de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres.

g) Les ensembles $A = \{1;6;7;17;18;23\}$ et $B = \{2;3;11;13;21;22\}$ ont des propriétés remarquables.

La somme de leurs éléments est la même :

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22$$

La somme de leurs carrés est la même :

$1^2 + 6^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{?}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Est-ce encore vrai pour la somme de leurs cubes ?

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{?}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Et pour la somme de leurs puissances d'exposant n ?

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overset{?}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Fiche No 4

– Les sommes alternées des factorielles donnent:

$$3!-2!+1!=6-2+1=5$$
$$4!-3!+2!-1!=24-6+2-1=19$$
$$5!-4!+3!-2!+1!=120-24+6-2+1=101$$

Ces nombres sont premiers. En est-il toujours ainsi?
La première exception est:

$$9!-8!+7!-6!+5!-4!+3!-2!+1!=326\,981=79\cdot 4139$$

Mais un des plus beaux exemples me paraît être celui de la «région perdue» qui a fait l'objet d'un article de Danielle Berney dans «Math-Ecole no 131» de janvier 1988. Les détails de l'expérimentation dans une classe 5 P y sont relatés de façon très suggestive. Rappelons ici la donnée du problème telle qu'elle figure dans la fiche no 5.

Nous avons proposé le même problème dans une classe de gymnasiens de 16 à 17 ans, en section scientifique, avec l'objectif de démontrer la formule exacte citée par Danielle Berney. Le nombre r de régions est égal à:

$$r=\frac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}$$

Il est difficile de dénombrer les régions; en revanche, il est relativement aisé de dénombrer les points et les arêtes du graphe. C'est l'occasion d'utiliser la célèbre formule d'Euler:

$$f-a+s=2 \qquad (1)$$

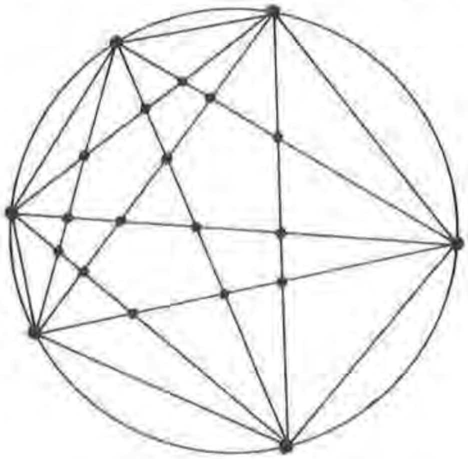
qui s'applique non seulement aux polyèdres convexes, mais aussi aux graphes planaires.

Dans notre problème, f est le nombre des régions, y compris la région extérieure au cercle:

$$f=r+1 \qquad (2)$$

a représente le nombre d'arêtes du graphe et ces arêtes sont de deux sortes: il y a d'une part les n arcs de cercle et d'autre part les segments. Chacun des n points du cercle est l'extrémité de n – 1 segments. Mais dans ce dénombrement, toute arête est comptée deux fois, si bien que:

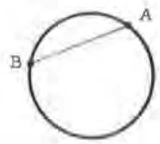
$$a=n+\frac{n(n-1)}{2}+2i \qquad (3)$$



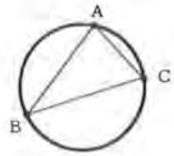
n = 6

5. Un disque dans tous ses états

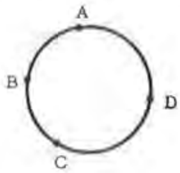
Une corde AB divise ce disque en 2 morceaux :



Les trois cordes AB, BC et AC le divisent en 4 morceaux :



Continue en ajoutant un point D et en traçant toutes les cordes qui relient les 4 points. Combien obtiens-tu de cordes et de morceaux ?



Et avec un cinquième point E, situé sur le cercle ?

Peux-tu prévoir le nombre de cordes et de morceaux obtenus avec 6 points du cercle ? Vérifie tes résultats !!!

Récapitulation :

Nombre de points	2	3	4	5	6	7
Nombre de cordes						
Nombre de morceaux						

où i désigne le nombre de points intérieurs au cercle. A noter qu'il n'existe des points intérieurs que si $n \geqslant 4$.

Il reste à déterminer le nombre i. Chaque point intérieur est l'intersection de deux codes; ces codes sont déterminées par un sous-ensemble de 4 points sur le cercle. Inversement, il y a autant de points intérieurs que de quadrilatères à sommets sur le cercle:

$$i = \binom{n}{4}$$

où $\binom{n}{4}$ est un terme du triangle de Pascal, le terme figurant dans la même ligne et dans la colonne $k = 4$:

	k= 0	1	2	3	4	5	6
n=1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$i = \binom{n}{4} = \frac{n!}{4!\,(n-4)!} = \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24}$$

On en déduit que le nombre des sommets du graphe est:

$$s = n + i = n + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24} \qquad (4)$$

En remplaçant dans (1) les expressions de f, a, et s trouvées en (2), (3) et (4), on obtient:

$$f = s + a = 2$$

$$r = f - 1 = a - s + 1$$

$$r = (n + \frac{n(n-1)}{2} + 2i) - (n + i) + 1 \qquad (5)$$

$$r = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + i - n + 1$$

$$r = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + 1$$

$$r = \frac{12n^2 - 12n}{24} + \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{24} + \frac{24}{24}$$

$$r = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$$

Toutefois cette expression est peu avenante. On pourrait même dire qu'elle est frustrante. En partant d'un problème de combinatoire, on arrive à un polynôme dont les coefficients n'ont plus rien de particulier. La formule n'est guère expressive et ne nous révèle rien en profondeur sur le problème enfin résolu. Pour mieux explorer la situation, repartons de (5):

$$r = \frac{n(n-1)}{2} + i + 1$$

Or: $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ et $i = \binom{n}{4}$

D'après la loi de formation du triangle de Pascal, on sait qu'un terme quelconque est égal à la somme de deux termes de la ligne précédente: l'un situé dans la même colonne, l'autre dans la colonne précédente.

$$\binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}$$

De même: $\binom{n}{4} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}$

Enfin: $1 = \binom{n-1}{0}$

On obtient alors:

$$\boxed{r = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}}$$

Le nombre de régions pour n points sur le cercle est la somme des 5 premiers termes de la ligne numéro n–1 dans le triangle de Pascal. Cette formule est valable pour $n \geqslant 4$ d'après notre remarque sur le nombre des points intérieurs. Toutefois, elle est encore vraie pour n = 2 et n = 3 si l'on complète par des 0 les termes manquants du triangle de Pascal.

nombre de points n						nombre de régions r
2	1	1	0	0	0	2
3	1	2	1	0	0	4
4	1	3	3	1	0	8
5	1	4	6	4	1	16
6	1	5	10	10	5	31
7	1	6	15	20	15	57
8	1	7	21	35	35	99

Cette fois, on voit mieux ce qui se passe et on comprend que l'induction fausse $r = 2^{n-1}$ n'était vrai que pour $n \leqslant 5$, tant que le nombre de termes dans la $n-1$ ème ligne du triangle de Pascal n'excède pas 5. La frustration a disparu et on en conclut que la conjecture fausse avait sa raison d'être. La démonstration a permis de mieux saisir les articulations internes du problème.

Références:

[1] J.-A.Calame, F.Jaquet – Mathématique – Septième année – DIP Neuch. 1986.
Mathématique – Huitième année–DIP Neuch. 1987.
Mathématique – Neuvième année – DIP Neuch. 1989.

[2] N.Balacheff – Processus de preuve et situations de validation – Educ.Stud. Math. 18 (1987).

[3] R.K.Guy – The Strong Law of Small Numbers – Amer.Math.Month.Vol.95–Nb.8 – oct.1988.

DOMINOns la différenciation

par Françoise Hirsig et Ninon Guignard

Activité réalisée en collaboration avec les enseignants et les élèves des classes spécialisées de l'école du Mail

Différencier l'enseignement est un objectif qui apparaît dans beaucoup de discours et de projets éducatifs, rarement dans la pratique scolaire.

– Avec vingt élèves, vous comprenez, Monsieur...
– Trouver des fiches différentes pour chacun, Madame...

La question de la différenciation rejoint celle de la motivation. Certes, le maître a envie de proposer à ses élèves des activités intéressantes et motivantes tout en gardant le souci de s'adresser à chacun en particulier. Nous ne contestons pas ce désir. Nous attirons seulement l'attention sur une autre forme de motivation et de différenciation: celles que l'élève produit lui-même pour lui-même, parce qu'il saisit le plaisir de la recherche, la fierté de la découverte, l'intérêt de la mathématique.

Se réalise alors l'interaction souvent méconnue des trois acteurs de l'enseignement: le maître, l'élève et le savoir. Le rôle actif n'est pas réservé au maître. Il appartient à l'élève de se battre avec un savoir qui résiste, sous l'égide d'un maître qui sait gérer et doser cette confrontation.

Favoriser l'auto-motivation, oser la différenciation dans la pratique?
En voici un exemple.
Un seul jeu. Une seule consigne de départ. Et des attitudes, des mises en route, des démarches aussi nombreuses et variées que les élèves!

L'activité

Les dominos font partie de ces jeux que tout enfant connaît et pratique comme les cartes ou les plots. Bien qu'il soit, apparemment, d'une facilité déconcertante quant à ses règles habituelles, ce jeu est structuré et cette structure même peut donner lieu à bien des recherches. Au fait, comment les dominos sont-ils construits? On peut mener l'exploration lorsqu'on pose la question:

COMBIEN Y A-T-IL DE DOMINOS DANS LA BOITE?

La boîte est évidemment fermée, les pièces bien cachées à l'intérieur.

Cette activité est présentée dans le document 25 du SRP[1], aussi ne revenons-nous pas à sa description. Notre intention est plutôt de partager une expérience et de réfléchir à cette occasion sur quelques thèmes propres à l'enseignement.

[1] Sur les pistes de la mathématique en division moyenne p. 86 à 103.

Nous avons travaillé dans trois classes (trois niveaux) du secteur spécialisé, avec des élèves de 8 à 12 ans.

Les enseignants face à l'activité

Un défi: réaliser la même activité dans les trois niveaux, d'abord avec les maîtres, puis avec les élèves, enfin opérer la synthèse.

La boîte, posée au milieu de la table est fermée pour eux aussi. Après avoir reçu la consigne, chacun se met à la tâche.

Observons-les.

Des collections se dessinent, des interrogations se formulent.

«Il y a des doublets» ... «l'arbre de classement, c'est lequel?» ... «ma fonction, est-elle assez générale?»...

Des solutions apparaissent. Puis les relances, les prolongements, l'exploitation des résultats et des procédures.

On discute sur le temps nécessaire, sur les moyens de représentation plus ou moins adéquats; (on profite de repréciser quelques aspects mathématiques, notionnels ou figuratifs), sur le fil conducteur, sur la diversité des démarches...

Et chaque maître repart avec des choses à creuser et à vérifier et, pour sa classe, du travail pour plusieurs séances et bien des observations à faire.

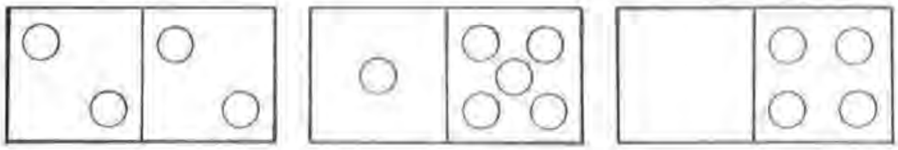
Déjà, il pense à son rôle dans l'interaction avec ses élèves et dans l'interaction des élèves avec la tâche. Et son apport sera d'autant plus fructueux qu'il s'est posé des questions, qu'il a interrogé la situation. Il rétablit des connexions avec quelques contenus de la mathématique et avec certaines démarches éducatives.

Il pourra ainsi se sentir à l'aise avec ses élèves et leurs questions, il saura relancer leurs recherches de façon personnalisée.

Les élèves face à l'activité

a) Mise en marche collective

La plupart des enfants connaissent bien les dominos. Ils parviennent aisément à décrire le jeu, à en dessiner quelques plaquettes au tableau noir.



On discute des doublets et des doubles[1], du maximum et du minimum de points par demi-plaquette, du zéro.

Les élèves émettent quelques commentaires sur le jeu, sur la façon de jouer.

Mais une situation est plus qu'un jeu, mathématiser autre chose que jouer.

Une situation offre l'occasion de s'initier à la recherche, de structurer soi-même les notions, d'envisager des démarches différentes, de se poser des questions, d'élaborer et d'utiliser des notations et des schémas, d'actualiser ses connaissances, en un mot, découvrir qu'on est intelligent et qu'on sait des choses.

La situation des dominos, plus spécifiquement, entraîne l'aptitude à combiner, à dénombrer, à mettre en ordre, à sérier, à mettre en relation.

COMBIEN Y A-T-IL DE DOMINOS DANS LA BOITE?

Ceci n'est pas une devinette, à qui dit mieux.
C'est une question qui appelle une recherche car le nombre à trouver n'est pas le fruit du hasard. Il sous-entend le mode de construction du jeu, sa structure. Il correspond au nombre de possibilités d'avoir toutes les combinaisons, deux à deux, depuis zéro jusqu'à six points.

Une situation implique un contrat qui est discuté avec les élèves: la recherche est un travail de longue haleine car la réponse n'est pas immédiate. Contrairement à la plupart des autres activités, il faudra se poser des questions, tâtonner, essayer des procédures différentes, répondre par soi-même, comparer, vérifier, généraliser...

b) Recherche individuelle

Après cette mise en train collective pour favoriser la représentation de la tâche à accomplir, les élèves passent à l'action. Chacun sur sa feuille dessine des plaquettes.

Les «doublets» viennent souvent en premier, probablement à cause de leur aspect de «bonne forme» et de symétrie. Puis d'autres plaquettes sont dessinées, de mémoire. On cherche celles qui manquent, celles qui se répètent... Petit à petit, parce que l'élève entre toujours plus profondément dans la tâche et surtout dans l'affinement de la représentation du but à atteindre, il ébauche des combinaisons. Sa production change: il ne s'agit plus de jeter sur le papier le plus de plaquettes possible, mais de penser les relations entre les demi-plaquettes. Une véritable organisation se fait jour. On combine, on trie, on série, on classe.

Le maître observe, encourage et s'étonne. Certes, il a fallu du temps pour tâtonner, pour se faire une représentation du jeu, de la consigne, de la tâche, pour

[1] Nous appelons «doubles» deux pièces équivalentes dessinées de façon inverse (2/5 et 5/2) et «doublets» les plaquettes comprenant deux fois le même nombre de points (3/3).

prendre conscience de la structure des dominos et des démarches appropriées pour en dresser la liste.

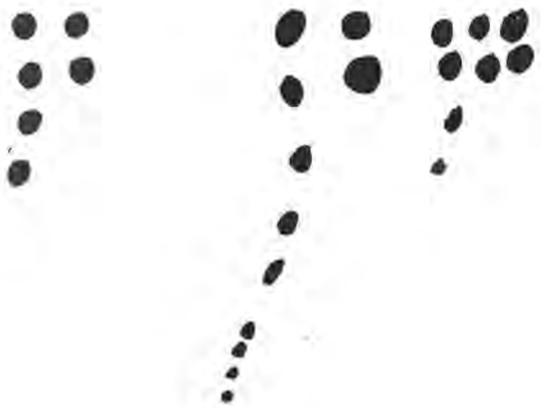
Trop souvent, on oriente les élèves pour éviter la perte de temps et on suggère finalement la démarche, celle qui mène directement au but, la plus économique. Et l'élève perd tout moyen d'apprendre à s'organiser, à utiliser ce qu'il sait pour élargir ses connaissances, à établir entre elles de nouvelles connexions, à donner du sens à ses actions et aux contenus sur lesquels elles portent.

Observations dans la classe de 1er niveau

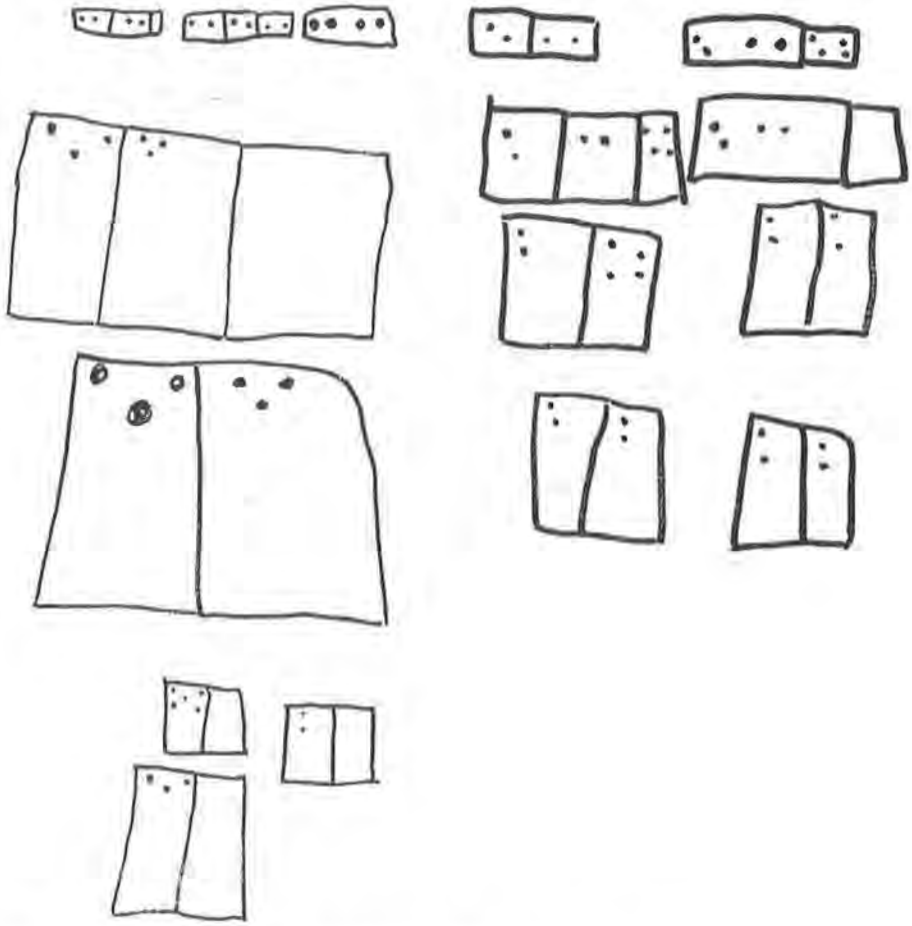
D'emblée jaillissent les différences entre élèves.

Sandra n'arrive pas à dessiner des plaquettes. Et l'enseignant découvre que ce jeu si commun, si simple, n'est pas si facilement appréhendable, et que la copie des plaquettes suppose tout plein d'aptitudes que cette élève n'a pas eu l'occasion de développer.

Le dessin d'une plaquette est constitué d'un cadre, d'une séparation par le milieu et de points dessinés de part et d'autre. Toute une organisation perceptrice qu'il s'agit de traduire sur le papier. Sandra n'en est pas capable. Elle dessine des points dans un espace non délimité.



Après diverses interventions de la maîtresse qui l'encourage à observer et à décrire l'objet, elle parvient à dessiner un rectangle qu'elle partage en trois parties, puis après plusieurs essais en deux mais dessine tous les points du même côté.

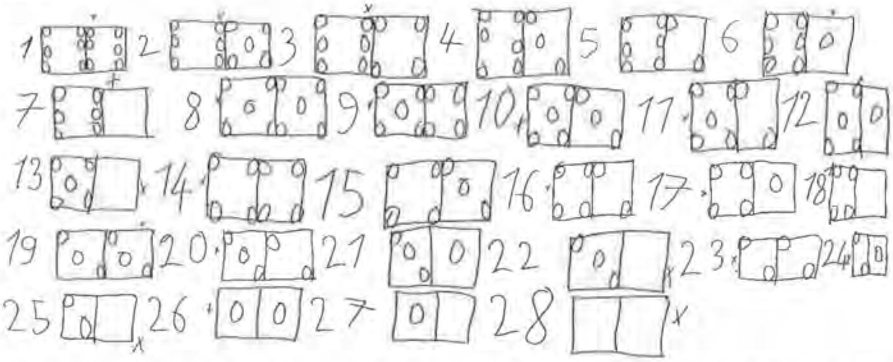


La maîtresse réajuste son projet en fonction de l'élève.
La situation devient autre: se familiariser avec le jeu, apprendre à repérer la structure des pièces, la configuration des points.
Sandra n'atteindra pas le but fixé par les autres élèves. Mais que de choses elle a découvertes, exercées, apprises!

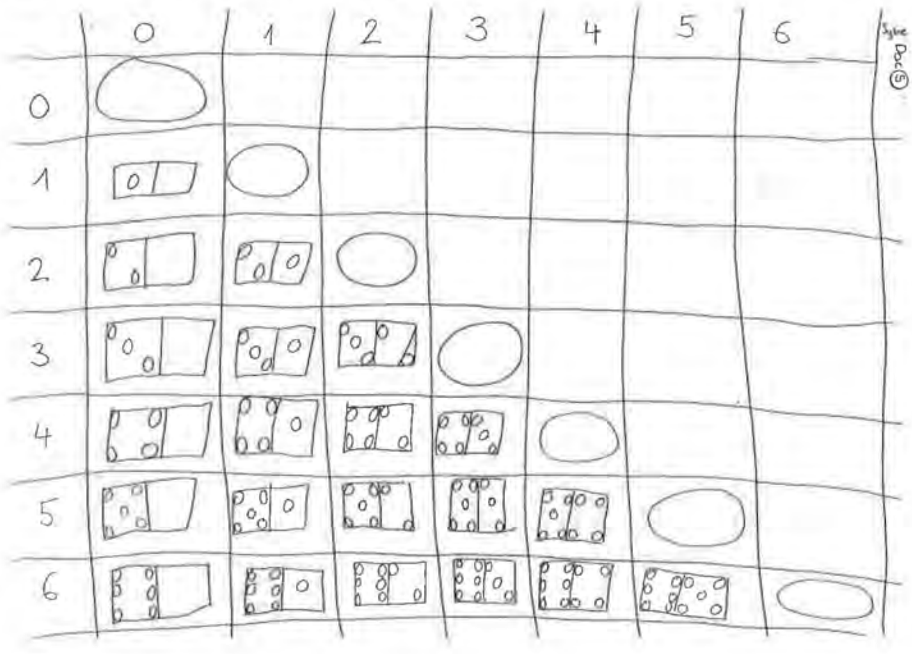
A l'opposé: Sylvie.
Entre ces deux élèves, toute une gamme de niveaux et de démarches. Cet écart n'est pas propre aux classes spécialisées. Chaque enseignant peut le vérifier dans sa classe.

Quand on se penche sur la première production de Sylvie, on n'observe apparemment aucune structure. Les plaquettes semblent être produites au hasard. En fait cette élève est organisée dans sa tête, à chaque fois qu'elle dessine une pièce de domino, elle vérifie si celle-ci n'est pas déjà dans la liste et ce premier jet ne comporte que peu d'erreurs. Elle a bien compris la tâche.

Il s'agit alors de relancer l'activité. Elle traque les «doubles» et met de l'ordre. Elle reconstruit sa collection en observant une règle qu'elle s'est donnée elle-même, à savoir combiner les points en partant de six (6,6; 6,5; 6,4...) jusqu'à zéro.



Elle arrange ensuite sa collection au moyen d'un tableau à double entrée et se livre à des observations: seule, la moitié du tableau est remplie avec, en plus, la diagonale formée par les «doublets».



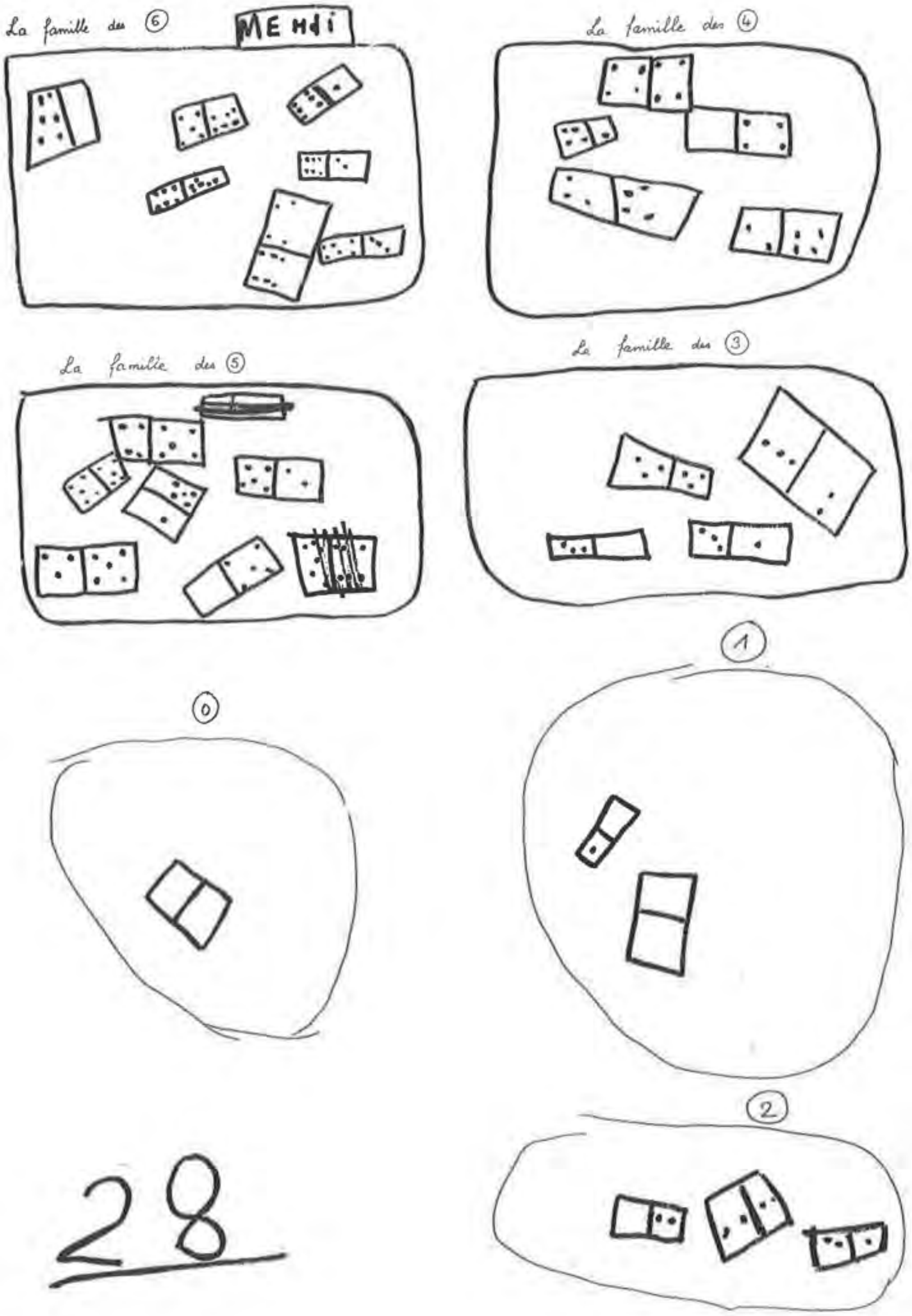
Nouvelle relance. Sylvie élabore un nouveau tableau qui regroupe et série les plaquettes par la somme de leurs points.

12 = 6+6
11 = 6+5
10 = 6+4 = 5+5
9 = 6+3 = 5+4
8 = 6+2 = 4+4 = 5+3
7 = 6+1 = 4+3 = 2+5
6 = 3+3 = 2+4 = 5+1 = 6+0
5 = 3+2 = 4+1 = 5+0
4 = 2+2 = 4+0 = 3+1
3 = 2+1 = 3+0
2 = 1+1 = 2+0
1 = 1+0   0 = 0+0

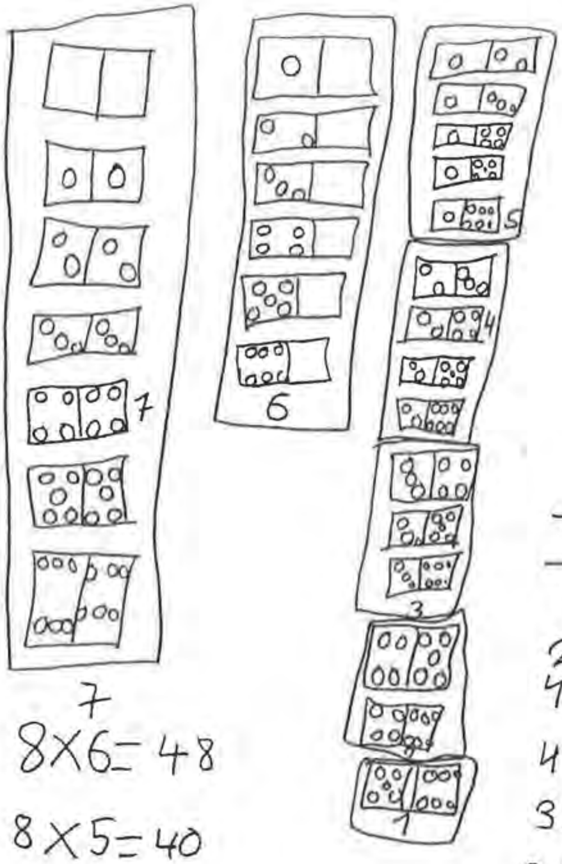
Pour Mehdi, l'engager dans la voie d'une mise en ordre par tableau ne servirait pas sa démarche. Lui, il se donne pour tâche de regrouper ses plaquettes en «familles».

La maîtresse intervient dans la représentation de l'élève. Celui-ci s'est donné pour tâche de classer ses plaquettes par familles, il est encouragé à poursuivre dans cette voie et à bien l'exploiter.

Il sera conduit à sérier ensuite ses familles et cette démarche lui permettra de trouver le nombre de plaquettes du domino après avoir éliminé les «doubles».


La famille des 6
MEHDI
La famille des 4
La famille des 5
La famille des 3
1
0
2
28

Alzira, après un premier jet, ordonne ses plaquettes en regroupant d'abord les «doublets» puis en sériant de zéro à six. Elle cherche ensuite le nombre total des points, découvrant ce faisant que chaque configuration apparaît huit fois.



$$
\begin{array}{r}
7\\
6\\
5\\
4\\
3\\
2\\
+\ 1\\
\hline
28
\end{array}
$$
plaquettes

$8 \times 6 = 48$

$8 \times 5 = 40$

$8 \times 4 = 32$

$8 \times 3 = 24$

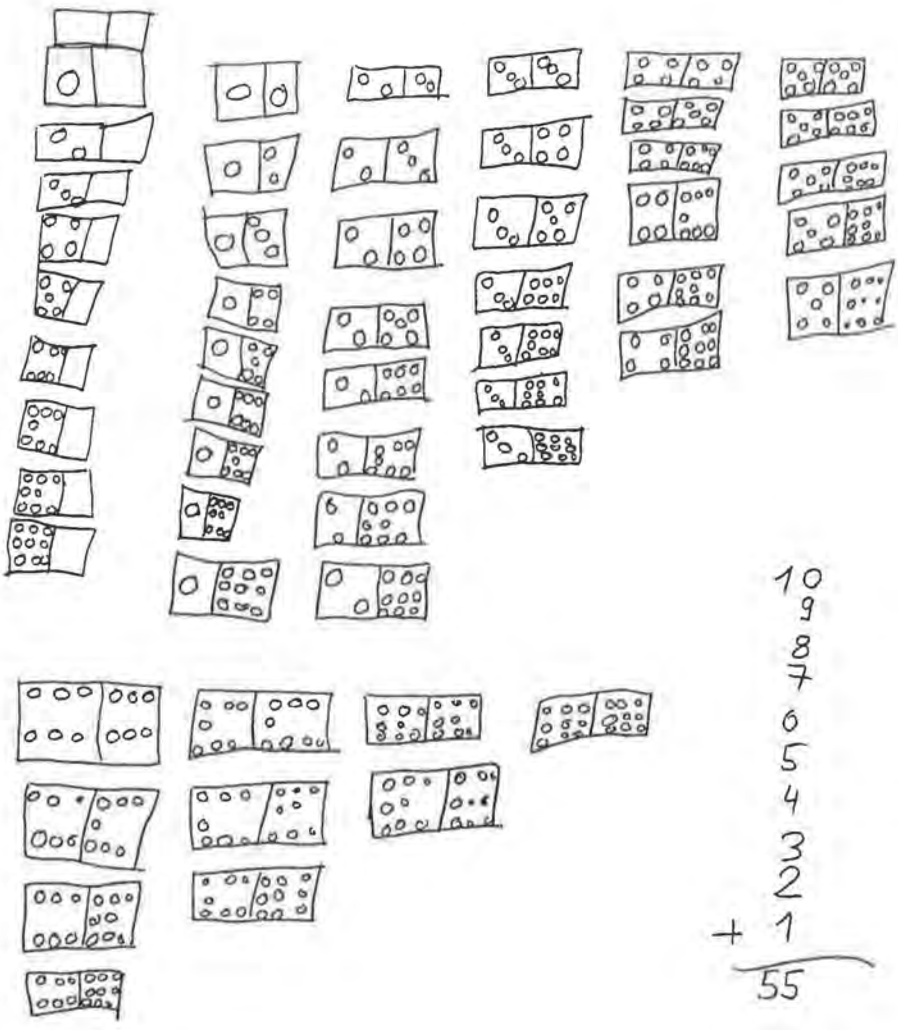
$8 \times 2 = 16$

$8 \times 1 = 8$

$8 \times 0 = 0$

$$
\begin{array}{r}
{}^{2}\\
48\\
40\\
32\\
24\\
16\\
8\\
+\ 0\\
\hline
168
\end{array}
$$
points

Puis elle suit une nouvelle piste, proposée par la maîtresse. Elle se demande combien de plaquettes comprend un domino de zéro à neuf points.



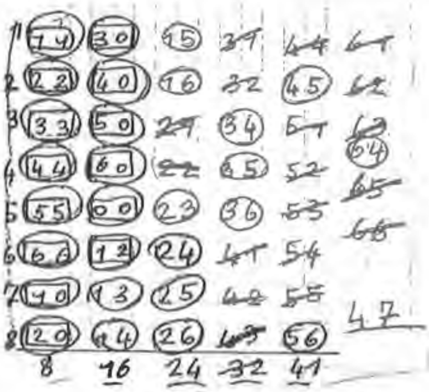
Tout le tâtonnement et le travail de structuration progressive menée lors de la première phase de sa recherche lui permettent d'aborder cette nouvelle question sans hésitation.

La nouvelle collection est d'emblée correcte aussi bien du point de vue des combinaisons que de celui de la sériation.

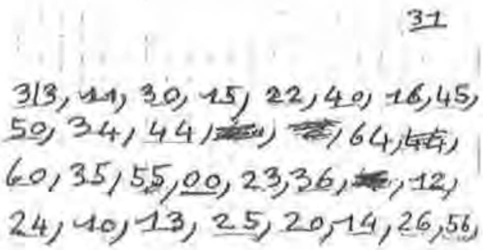
La relance veut vérifier qu'il y a eu réel apprentissage et que l'élève peut appliquer sa méthode.

Observations dans la classe de 2e niveau

Dès le début, Maria remplace le dessin des points par l'écriture des nombres. Elle supprimera même les cadres représentant les plaquettes.



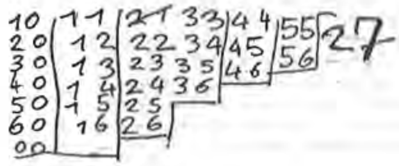
Après avoir dessiné 47 plaquettes, elle repère et barre celles qui sont dessinées deux fois, elle les récrit. Elle utilise différentes couleurs pour souligner les plaquettes qui font partie de la même famille.



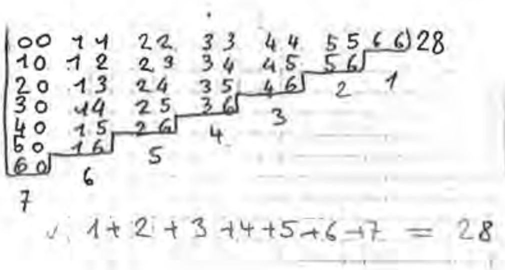
Cette première mise en ordre ne la satisfait pas et Maria décide d'ordonner les plaquettes en colonne mais en groupant tous les dominos qui ont zéro, un, deux... points.

Cette démarche plus structurée, ne l'empêche toutefois pas d'éliminer d'emblée les doublets.

A ce stade elle est capable d'établir la liste presque complète des dominos par famille. Elle élimine ensuite les doublets.

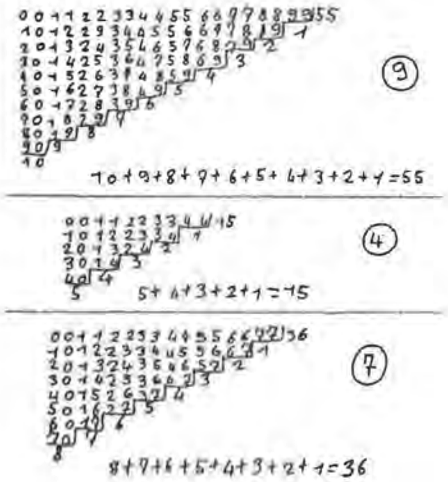


Comme il lui en manque un, elle recommence mais cette fois en ordonnant complètement chaque série.



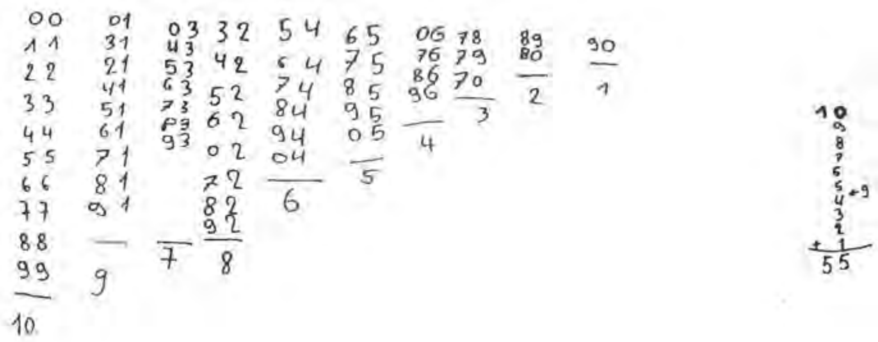
Ces mises au point successives lui serviront de modèle pour réaliser la série ultérieure.

En voici quelques exemples:



Finalement, elle organisera toutes ses données dans un tableau mettant en relation le nombre de points de chaque domino et le nombre de plaquettes.

Après avoir trouvé le nombre de plaquettes pour les dominos de six et de neuf, David devine très vite l'algorithme et abandonne le dessin des plaquettes au profit d'opérations mathématiques.



Et si on faisait un domino jusqu'à 10

11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66 ← 10

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 → 4

8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 ← 7

4 + 3 + 2 + 1 = 10 ← 3

6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 ← 5

9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 ← 8

Il cherche ensuite le nombre total de points en découvrant une régularité: pour le domino de six, il obtient huit fois le six, huit fois le cinq, huit fois...

Il pourra généraliser cette loi pour trouver le nombre total de points pour un domino donné.

Pour un domino → 6

8 × 0 → 8 × 0 = 0
8 × 1 → 8 × 1 = 8
8 × 2 → 8 × 2 = 16
7 7 × 3 → 8 × 3 = 24
6 × 4 → 8 × 4 = 32
5 × 5 → 8 × 5 = 40
7 × 6 → 8 × 6 = 48
As-tu bien observé ?
168

Pour le domino de 9

11 × 9 = 99
11 × 8
11 × 7
11 × 6
11 × 5
11 × 4
11 × 3
11 × 2
11 × 1
11 × 0

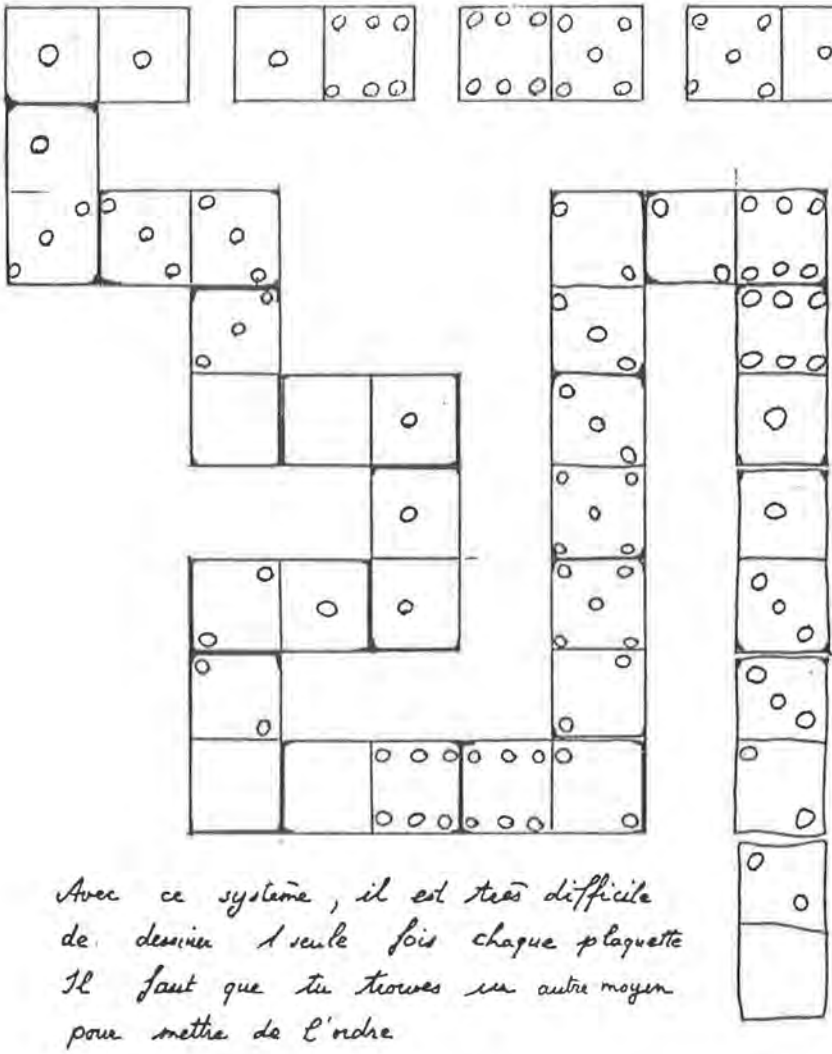
9 = 495 points

Il est temps pour David de mettre de l'ordre dans ses données et l'enseignant lui propose de faire un tableau. David est loin du dessin des plaquettes de domino, il réfléchit maintenant sur les nombres obtenus pour essayer de découvrir les lois qui les régissent. Le tableau de David est l'aboutissement d'une recherche très fournie.

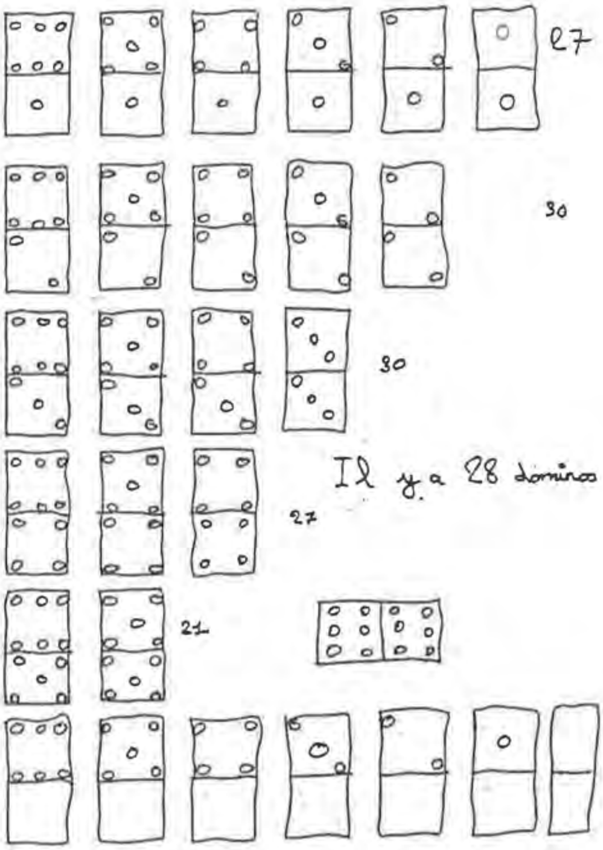
le plus grand nombre de points	le nombre total de plaquettes	le nombre de fois qu'apparaît chaque nombre	Total des points
0	1	2	0
1	3	3	3
2	6	4	12
3	10	5	30
4	15	6	60
5	21	7	105
6	28	8	168
7	36	9	252
8	45	10	360
9	55	11	495
10	66	12	660
11	78	13	858

Observations dans la classe de 3e niveau

La démarche de Pédro ressemble à celle que l'on observe chez les enfants plus jeunes. Contrairement aux autres élèves, il joue au domino. Il se fait une représentation différente de la tâche proposée.



La relance de la maîtresse lui permet néanmoins de s'organiser pour trouver le nombre de plaquettes et la somme des points pour un domino de six. Mais il n'aura pas le temps d'étendre sa recherche à d'autres dominos.



Il y a 28 dominos de zéro à sisc

C'est bien. Compte maintenant le nombre de points

0+1+2+3+4+5+6=21

7+6+5+4+3+2=27

8+7+6+5+4=30

9+8+7+6=30

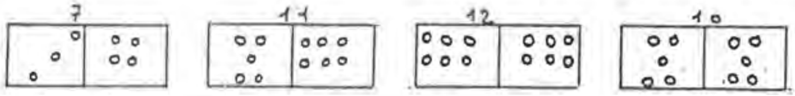
10+9+8=27

11+10=21

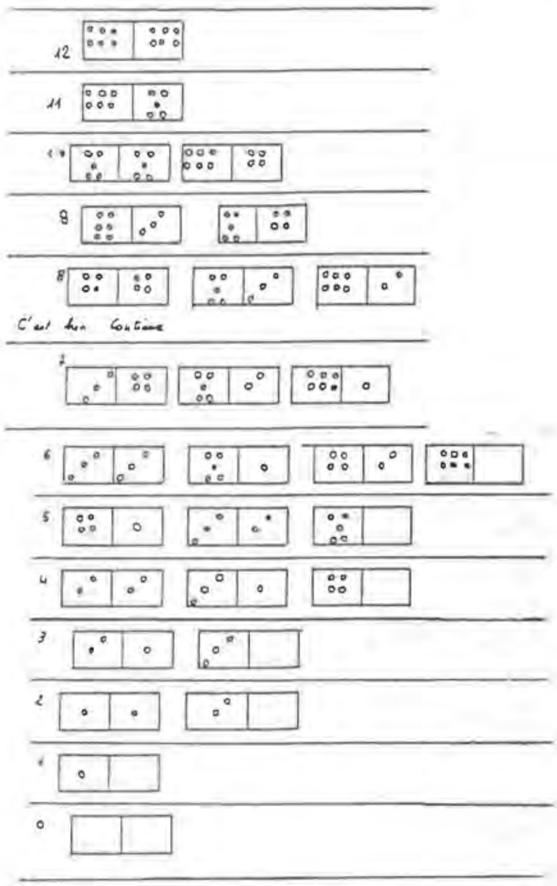
12

```
   1
  21  ←0
  27  ←1
  30  ←2
  30  ←3
  27  ←4
  21  ←5
+ 12  ←6
 168
```

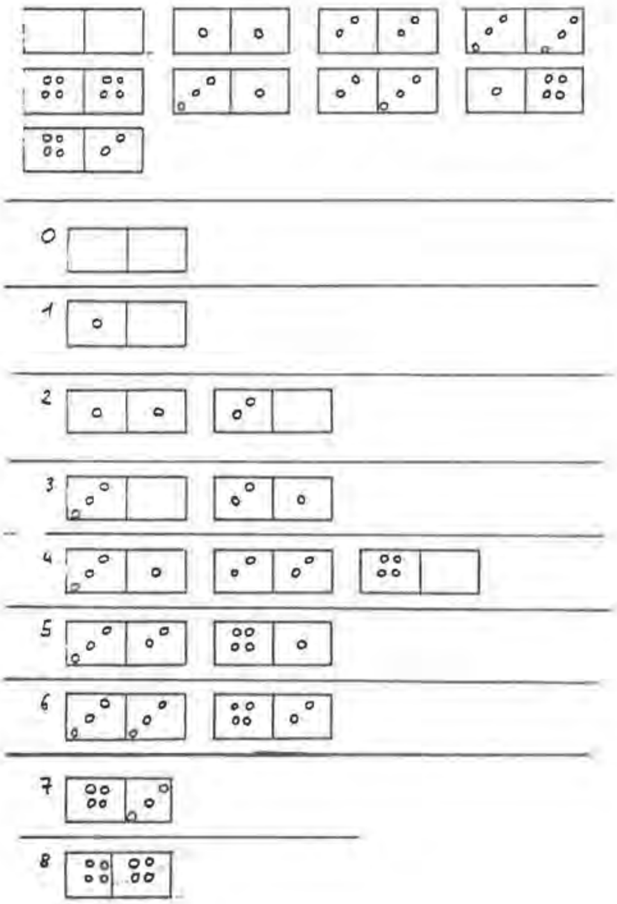
Rosa dessine élégamment quelques plaquettes et s'interroge d'emblée sur la somme des points pour chaque domino, somme qu'elle inscrit au-dessus des plaquettes.



En cours de travail, la maîtresse lui demande si elle va trouver plusieurs plaquettes différentes portant la même somme. Cette question sera le départ d'une recherche intéressante.



Le même travail est fait pour le domino de quatre. A ce propos, il faut souligner que Rosa éprouve la nécessité de redessiner au hasard quelques plaquettes, comme elle l'avait fait pour le domino de six avant d'organiser son travail en sériation.



Rosa organise ensuite une sorte de tableau où elle met en correspondance dans une colonne le nombre de plaquettes regroupées par la somme de leurs points et dans l'autre le total des points. On retrouve 28 plaquettes et 168 points mais avec des addendes différents.

Il y a 28 dominos	Nombre de points
1	12
1	11
2	20
2	18
3	24
3	21
4	24
3	15
3	12
2	6
2	4
1	1
+ 1	+ 0
28	168

Dominons la différenciation

Le rôle du maître est primordial.
Son observation des élèves en train de mathématiser lui ouvre l'accès à leurs représentations de la tâche et à leurs niveaux de connaissance. Ses relances servent à redonner du sens aux recherches et à les finaliser.

Cette pédagogie permet à l'enfant de se forger sa propre image du travail à accomplir, de progresser à son rythme, de découvrir qu'il est capable d'appréhender un problème, de s'approprier la tâche et de la mener au but.

La situation des dominos s'est déroulée en quatre séances d'environ 80 minutes.

Beaucoup trop vu la lourdeur du programme?

Juste ce qu'il faut pour que s'établissent des liens entre notions et qu'en surgisse une signification.

Les élèves apprennent à «faire de la mathématique» et cela est un puissant moteur qui alimente leurs motivations, qui satisfait leur besoin de savoir et qui revalorise l'image d'eux-mêmes.

Quatre fois 80 minutes de concentration, d'effort et de plaisir, de participation active et de productions fécondes.

Un travail de longue haleine qui ne faiblit pas... fût-ce en classe spécialisée!

A propos de la géométrie de Vincenot

par François Jaquet

F. Oberson, auteur de l'article «Que penser de la géométrie de Vincenot» (Math-Ecole no 137) a eu raison de proposer aux lecteurs de sortir leurs crayons, règles et compas pour vérifier les affirmations de Maître le Gallo. Il faut en effet toujours laisser la place au doute à propos de «révélations prodigieuses», comme Vincenot le suggère lui-même. C'est une attitude saine, que l'enseignant des mathématiques doit développer.

Ici, les connaissances requises pour les vérifications nécessaires sont du domaine de la scolarité obligatoire, degrés 8 et 9: triangles semblables, théorème de Pythagore, fractions (rapport), racines. Mais que sont devenues ces connaissances «acquises» à l'école secondaire? Sont-elles opérationnelles, transférables? L'ont-elles jamais été? Ou n'ont-elles été que prétextes à répétitions insistantes, entraînements dénués de sens, épreuves écrites pour aboutir à des constats d'échec et à une perte d'autonomie? La petite phrase de Vincenot est révélatrice: «Je n'ai pas vérifié ce que je récite là, car, j'en suis bien incapable». Bien des lecteurs qui ont suivi l'école secondaire ou ont même réussi leur baccalauréat de mathématique, doivent être dans la même situation.

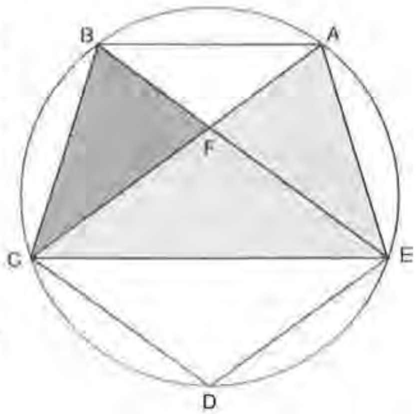
Mais venons-en aux **deux affirmations** de Maître le Gallo.

La première est vraie, la «divine proportion» qui conduit au «nombre d'or» se trouve bien entre le côté et la diagonale d'un pentagone régulier.

La démonstration repose sur la similitude des triangles isocèles ACE et BCF. Les deux triangles sont semblables, car leurs angles sont les mêmes (isométriques deux à deux).

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACE} = \widehat{BCF}\ (A) \\ \widehat{CAE} = \widehat{CBF}\ (E)\end{array}\right\} \text{ c'est une question d'angles inscrits}$$

$\widehat{CEA} = \widehat{CFB}$ par complémentarité à 180 degrés.



Le triangle ACE est isocèle car AC = EC (les diagonales d'un pentagone régulier sont isométriques), le triangle BCF, semblable, est donc aussi isocèle: on en déduit que la mesure du segment CF est celle du côté du pentagone: CB = CF.

Entre les mesures des côtés de triangles semblables il y a une application linéaire:

$$\left.\begin{array}{l} BC = CF \rightarrow CE = AC = k \cdot CF \Rightarrow k \Rightarrow \dfrac{AC}{CF} \\ BF = AF \rightarrow AE = BD = CF = k \cdot AF \Rightarrow k \Rightarrow \dfrac{CF}{AF} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{CF} = \frac{CF}{AF}$$

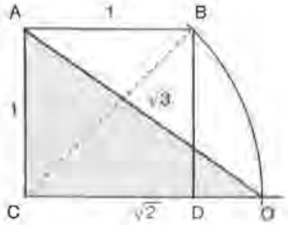
Le rapport AC/CF entre les mesures de la diagonale et du côté du pentagone est le «nombre d'or»: $\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$. *Il passionne les mathématiciens et artistes depuis bien longtemps déjà. On le retrouve dans la pyramide de Chéops. Pythagore et ses disciples avaient choisi le pentagone étoilé comme signe de ralliement et ils savaient que chacun de ses côtés partage deux autres dans le rapport du nombre d'or. Le moine Luca Pacioli y consacra un livre «De divine proportione» publié en 1504, illustré par Léonard de Vinci à qui nous devons l'appellation de nombre d'or («sectia aurea»). De Phildias au Corbusier («Modulor»), de nombreux architectes et peintres en furent d'ardents défenseurs.*

La deuxième affirmation est fausse, mais conduit à une approximation intéressante.Le «triangle d'or» de Maître le Gallo ne contient pas le nombre d'or. Il est semblable au triangle rectangle dont les côtés mesurent 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$:

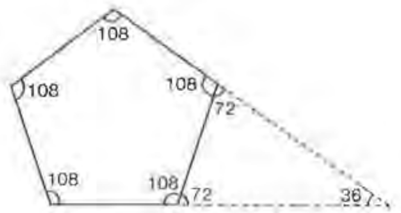
En effet, selon le théorème de Pythagore

$OB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
$OB = \sqrt{2} = OC$
$AO^2 = 1 + 2 = 3$
$AO = \sqrt{3}$

La mesure de l'angle $\widehat{AOC}$ est proche de 35,26 degrés.



Dans le pentagone régulier ,en revanche, deux côtés non adjacents forment un angle de 36 degrés comme le montre ce schéma.



La différence n'est donc pas grande et non perceptible à l'œil. Jehan le Tonnerre pouvait donc parfaitement retenir cette approximation et entrer dans la confrérie des compagnons constructeurs.

IRDP - 20 ans

Pour marquer le vingtième anniversaire de sa création, l'Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques avait mis sur pied, le 16 juin dernier, une journée d'étude sur le thème du concordat intercantonal. Magistralement organisée par M.Jacques-André Tschoumy, directeur de l'IRDP, elle a permis de se pencher sur une institution typiquement helvétique qui, parce qu'elle fait intimément partie de nos habitudes – pensons par exemple au concordat qui sous-tend la coordination scolaire intercantonale – ne suscite guère de réactions mis à part dans des cercles relativement restreints.

En d'autres termes, et pour caricaturer quelque peu le problème, il s'agissait de savoir si la formation scolaire en Suisse fonctionnerait mieux avec un ministre fédéral de l'éducation ou si la pratique actuelle des concordats, qui incite les cantons à conclure des accords en diverses matières, correspond encore aux besoins de notre temps.

L'enseignant, le professeur aux prises avec les problèmes quotidiens de sa classe, ne se passionnera probablement guère pour ce type de problème. La manière de le résoudre pourrait pourtant avoir des incidences notoires sur nos systèmes scolaires. Il est naturel de la part de nos représentants dans les grandes assemblées internationales comme le Conseil de l'Europe, de se sentir un peu frustrés de ne pouvoir s'exprimer au nom du pays tout entier et de devoir à tout moment rappeler que la Suisse compte quelque vingt-six ministres de l'Education. Par conséquent, la lutte entre partisans déclarés du centralisme et fédéralistes avoués n'est pas prête de s'éteindre. Et l'on sait bien que la tentation centralisatrice demeure latente chaque fois que les cantons ne parviennent pas à s'entendre dans un domaine sensible. Que l'on songe, par exemple, à ce qui s'est passé à propos du début de l'année scolaire où, faute d'un accord, plusieurs cantons ont dû s'incliner devant la volonté nationale.

Or, une telle démarche pourrait certainement se produire dans d'autres domaines. Par exemple, les cantons romands ont délibérément exclu de leurs débats le problème des structures scolaires. On admet des programmes communs, on accepte, plus difficilement, des manuels communs pour les premières années de scolarité, mais attention, pas question de débattre des grands problèmes de structure. De même, à l'heure où l'on parle de libre circulation des travailleurs dans l'Europe des douze, pas question non plus d'accepter, sauf en cas d'exception pour des raisons de pénurie, qu'un enseignant formé dans un canton donné puisse enseigner sans autre dans un canton voisin.

Cette conception ultrafédéraliste s'explique par des raisons historiques, sociales, économiques, confessionnelles, et nous ne saurions ici militer pour une solution ou pour une autre. L'école, même si elle tente de s'en défendre, demeure étroitement dépendante du milieu socio-professionnel dans lequel elle est implantée et se doit de répondre au mieux à l'expression souvent diffuse de ces besoins. De ce point de vue, chaque canton constitue une entité dont les valeurs et les nécessités socio-culturelles ne sont pas celles d'une autre région, même voisine. mais il était utile de prendre quelques heures pour débattre de ce thème et confronter divers points de vue. Si les cantons ne parviennent pas à s'entendre sur des questions qui pourraient devenir vitales à moyen ou long terme, il est vraisemblable que cela donnera des arguments aux tenants de décisions nationales et que ces même cantons en perdront quelques parcelles de leur autonomie.

Les problèmes ne sont jamais simples à résoudre et les points de vue divergent souvent. A cet égard, il était intéressant d'entendre le président de la Conférence suisse des conseillers d'Etat chefs de département de l'Instruction Publique, M. Jean Cavadini, par ailleurs président du conseil de direction de l'IRDP, se féliciter de la réussite de la coordination en Suisse romande de l'enseignement de la mathématique. Son intervention était suivie, quelques minutes plus tard, par celle de François Jaquet, président du cartel des associations d'enseignants secondaires, dont les lecteurs de Math-Ecole savent bien le rôle considérable qu'il a joué pour promouvoir cette coordination, qui lui, considérait comme un réel échec le fait que la création de manuels communs n'ait concerné que les années 1 à 6 et que, pour les années 7 à 9, on trouve en Suisse romande plusieurs dizaines de manuels différents. Faut-il se réjouir de ce qui a été réalisé ou s'inquiéter de ce qui n'a pas été possible? Le lecteur en jugera. Il est probable que, si un certain consensus s'est établi en Suisse romande sur les objectifs de l'école primaire, nous sommes encore bien loin de le voir s'étendre jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire. Mais rien non plus ne nous empêche de compter sur la marche de l'histoire. L'important n'est pas, finalement, que l'école soit la même pour tous, mais bien qu'elle soit la meilleure possible pour chacun.

Merci à l'IRDP et à son directeur de nous avoir permis ce moment de réflexion.

RH.

J. A. 1211 GENÈVE 11

TABLE DES MATIÈRES

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:

MM. Th. Bernet, A. Calame, M. Chastellain, R. Délez, P. Duboux, M. Ferrario, F. Jaquet, Y. Michlig, F. Oberson, D. Poncet.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 16.—, Etranger: F 18.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 20 bis, r. du Stand, CP 119; CH 1211 Genève 11.
(Tél. (022) 27 42 95)

Adresse: Math-Ecole; 20 bis, rue du Stand, CH-1211 Genève 11; CP 119

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion