Polygones en paille

André Scheibler

Groupe DDMES (didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé)

Introduction.

Cette narration est tirée d'une série d'expérimentations menées dans une institution spécialisée.

On entend par narration un exposé présentant un travail de recherche, ici en didactique des mathématiques. Pour une compréhension plus avancée de ce concept, voir sous http://www.ssrdm.ch/spip1/spip.php?article62 . Il ne s'agit pas d'une proposition d'activité. Mais le lecteur pourrait s'en inspirer pour en créer une.

Cette narration présente une phase d'une série de tâches concernant la géométrie des polygones, qui s'inscrivent ici dans l'espace. Des modèles de polygones sont fabriqués à l'aide de pailles (ou chalumeaux), ces tubes en plastique que l'on utilise pour consommer une boisson. On en coupe des sections, dans lesquels on passe une ficelle, et l'on referme la boucle en nouant serré, sans déformer les pailles.

L'intention de l'expérimentateur est, entre

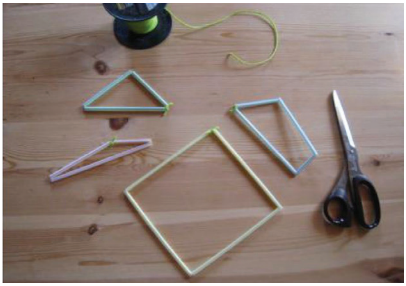

Image 1

autres, de mettre en évidence la rigidité d'un triangle ainsi fabriqué, contre la non rigidité de tout polygone à 4 côtés ou plus. Mais je laisse le soin au lecteur d'y voir quel intérêt cela pourrait avoir, ou non, avec les concepts de polygones tels qu'ils sont considérés dans l'enseignement obligatoire, ou plus fondamentalement, avec les concepts de géométrie plane et de géométrie spatiale. Il pourrait se demander aussi si de tels objets de l'espace, dont certains ne sont pas rigides (il y en a sur l'image 1), peuvent encore être considérés comme des polygones.

Il y aurait encore, dans ce chapitre de la géométrie, un débat à faire sur les définitions formelles d'objets mathématiques, comme par exemple l'ensemble des polygones, et des objets concrets de la vie courante qui sont systématiquement évoqués dans ce même enseignement, comme illustrations d'objets mathématiques, ou exemples d'applications de ceux-ci. Volontairement, cette narration ne dit pas tout ici, afin de laisser au lecteur ce champ de réflexion. Je l'invite d'ailleurs fortement à réaliser lui-même les objets demandés aux élèves et, avec ces objets, suivre, en tentant de les reproduire, les expériences dont ils parlent.

Narration.

Après avoir rappelé rapidement quelques définitions comme triangle, quadrilatère, polygone, la tâche consiste à construire avec des pailles un triangle, puis un quadrilatère, puis d'autres polygones. Je présente ici les dialogues qui ont ponctué les actions entre Bra, Bri (environ 13 ans) et l'expérimentateur (Exp.), après que chacun des élèves ait fabriqué rapidement un triangle.

Exp. : avec des pailles, faites un quadrilatère.

Sur la table se trouvent bientôt plusieurs réalisations : triangles et quadrilatères, celles faites par les élèves, et celles de l'expérimentateur.

Bra (qui a coupé 4 pailles isométriques) *: j'ai fait un carré.*

Exp. : Est-ce un carré ?

Bri : si on le met à plat oui, mais comme ça (le déformant entre ses doigts) *non.*

Exp : comme ça, tu veux dire quoi ?

Bri : un peu de traviole, ça bouge.

Exp : (saisissant d'autres quadrilatères se trouvant sur la table, et les articulant dans tous les sens) *ce sont des quadrilatères ?*

Bra : oui.

Bri : non, seulement si on les met à plat (désignant ceux sur la table).

Exp : ce sont tous des quadrilatères, parce qu'ils ont 4 côtés. Et puis avec ça (en montrant un triangle fait en chalumeaux) *ça bouge aussi ?*

Bra : non, parce qu'il n'a pas 4 côtés, on peut pas parce qu'il n'y a que 3 côtés.

Exp. : on peut dire que celui-là (montrant le quadrilatère que Bri tenait dans sa main) *n'est pas plat, est-ce un quadrilatère ?*

Bra : oui, parce qu'il a 4 côtés.

Bri : du moment qu'il a 4 côtés...

Exp : peu importe la forme, plat ou pas plat, du moment qu'il a 4 côtés, c'est un quadrilatère.

Bra : et celui-là, c'est un triangle, on peut pas le mettre pliable.

Exp. : il est tout le temps plat (Exp. lance ce triangle en l'air)*, on peut pas le plier, pour le plier, il faudrait tordre les côtés.*

Exp : je vous demande un truc difficile. Est-ce que l'on arriverait à faire un quadrilatère tout le temps plat ?

Bra : je pense que oui, si vous le demandez, je pense que c'est possible.

Exp : attention, parfois je demande des trucs impossibles !

Bra : il faudrait qu'il y ait jamais un côté l'un en face de l'autre, un angle l'un en face de l'autre ; comme ici (montrant le triangle)*, il y a quand même un angle l'un en face de l'autre, mais c'est sur la même barre.*

Cette affirmation de Bra est présentée ici mot à mot ; l'expérimentateur se trouve dans la situation d'en interpréter le sens ; ce qu'il fait à cet instant, mais avec réserve, ce n'est qu'une hypothèse, et il reprend alors une même expression de Bra pour évoquer la tâche suivante à réaliser. Au lecteur : qu'auriez-vous interprété à ce moment-là, et fait ? (Vous lirez en fin d'article quel a été l'interprétation de l'expérimentateur).

Exp : donc il faut trouver une forme qui n'a pas d'angle l'un en face de l'autre ?

Bra : c'est faisable.

Bri : j'ai trouvé ! Une grande barre, une petite, une grande, une petite. C'est en serrant que ça marche (il construit un tel modèle).

Bra : il est faux, même en serrant ça marche pas.

Bri : il faut bien serrer, justement pour que les pailles entrent l'une dans l'autre.

Bra : oui, mais si tu as quatre barres non creuses ?

L'interprétation de l'expérimentateur ici est que Bra évoque une construction de triangles ou quadrilatères selon le même modèle, mais avec des tiges pleines, comme des tiges fines de fer par exemple. Les propriétés physiques sont identiques, mais les tiges pleines ne peuvent plus entrer les unes dans les autres comme une paille creuse pourrait entrer dans une autre paille creuse. Mais ici, ces dispositifs expérimentaux utilisés pour argumenter (polygones fabriqués avec des tiges non creuses, ou faire entrer une paille dans une autre), sont pensés, mais non réalisés.

Bri : peut-être si tous les côtés sont différents... (il essaie) *je les ai pas fait avec précision, je les ai fait à l'arrache.*

Bra : à moins que le polygone ressemble beaucoup... (désignant le triangle).

Exp. : et si l'on colle deux triangles l'un contre l'autre, dessinez cela à main levée (ils le font).

Figure 1

Bra : si l'on colle l'un contre l'autre deux triangles comme celui-ci (montrant un triangle réalisé en paille)*, si on colle avec de la colle, c'est plat, avec de la ficelle, c'est pas plat.*

L'interprétation de l'expérimentateur est que Bra évoque le côté commun comme jouant le rôle d'une charnière : utiliser de la colle consisterait à souder la charnière lorsque les deux triangles sont posés sur la table. Coller avec de la ficelle serait laisser sa mobilité à la charnière.

Bri : ça va faire ça (geste mimant avec ses mains deux triangles attachés par un côté commun, jouant le rôle de charnière).

Exp : (réalise ces deux triangles)

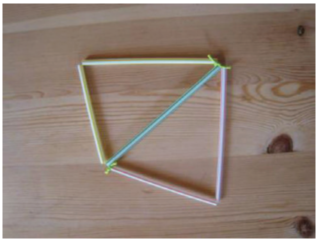

Image 2

Bri : ça va faire ça (même geste, avec la réalisation ci-dessus cette fois).

Exp : (reprenant les deux triangles joints par un côté) *c'est quoi ce que je viens de faire ?*

Bra + Bri : un quadrilatère.

Exp : et ce segment là (désignant le côté commun) *?*

Bra + Bri : c'est la diagonale.

Exp : et si l'on mettait deux diagonales (Exp. présente une deuxième diagonale en tendant un morceau de paille séparément) *?*

Bra + Bri : tout serait bloqué.

Exp : alors on aurait la réponse à ma question, comment faire un quadrilatère rigide, qui n'est pas mobile ?

Bra + Bri : et ben, on met ses diagonales.

Exp. : alors, que se passe-t-il si on met une deuxième diagonale, peut-on faire un quadrilatère plat ?

Bra : pas possible, parce qu'il faudrait faire un trou dans une paille pour laisser passer l'autre.

Interprétation de l'expérimentateur : Bra a compris mentalement que lorsque les deux diagonales ne se coupent pas, le quadrilatère avec ses deux diagonales constituent un objet rigide, mais non plat, un tetraèdre (mais ce terme n'est pas prononcé). Par contre, si ces deux diagonales se coupaient, le quadrilatère serait plat. Mais une telle réalisation est ici techniquement non réalisable, parce qu'il faudrait déformer l'une des pailles diagonale, ou « *faire un trou dans une paille pour laisser passer l'autre* ».

Revenons à la première condition exprimée par Bra pour répondre à la tâche :

Exp : je vous demande un truc difficile. Est-ce que l'on arriverait à faire un quadrilatère tout le temps plat ?.

Bra répond très vite

Bra : il faudrait qu'il y ait jamais un côté l'un en face de l'autre (se reprenant)*, un angle l'un en face de l'autre ; comme ici* (montrant un triangle en paille)*, il y a quand même un angle l'un en face de l'autre, mais c'est sur la même barre.*

L'interprétation de l'expérimentateur fut à ce moment-là que *angle*, pour Bra, était un angle-plan, et que deux angles l'un en face de l'autre, cela désignait alors deux angles-plan se faisant face dans un même plan commun. Autrement dit, s'ils ne se font pas face, ils ne sont pas dans le même plan. Cette interprétation suppose que Bra a exprimé une condition négativement (« *il faudrait qu'il y ait jamais* ») et que l'expression de Bra est une fausse négation. De telles erreurs d'expression sont fréquentes dans les échanges, et parfois le contexte les corrige sans qu'il soit nécessaire de le dire sur le moment. Cette interprétation de l'expérimentateur sera reprise par lui lors de la leçon suivante, dans un rappel qu'il fait de ce que les élèves ont dit. Il dira :

Exp : Bra a dit que un quadrilatère est tout le temps plat si il y a deux angles en face l'un de l'autre.

Bra démentira catégoriquement avoir dit cela. Et la suite de l'expérimentation montrera que ce que Bra voulait dire, et qui donne une nouvelle interprétation à l'expérimentateur, c'est que s'il y a deux angles en face l'un de l'autre, c'est qu'une charnière les sépare, qu'il peut donc s'articuler autour de cette charnière, et de cette manière ne pas être plat.

Se révèle donc dans cette leçon suivante, le fait que Bra fait référence à un modèle de sa pensée, avec lequel il peut jouer en pensée, il imagine déjà cette charnière autour de laquelle s'articule le quadrilatère, et le rend non plat. L'expérimentateur ne l'avait pas perçu ainsi sur le moment.

La dernière réplique de Bra ci-dessus présentée :

*Bra : pas possible, parce qu'il faudrait faire un trou dans une paille pour laisser passer l'autre*laisse penser que Bra a en fait énoncé le critère de « platitude » d'un quadrilatère. Il l'exprimera d'ailleurs plus tard en termes directs : « *il faut que les diagonales se coupent* ». Lors d'une leçon suivante, la tâche étant de dessiner sur les faces d'un cube un quadrilatère, une face du cube ne pouvant contenir qu'une seule arête du quadrilatère, les productions suivantes sont réalisées assez rapidement sur des cubes en polystyrène (sagex), et sur des cubes dessinés en perspective cavalière :

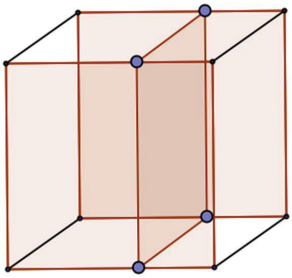

Image 3

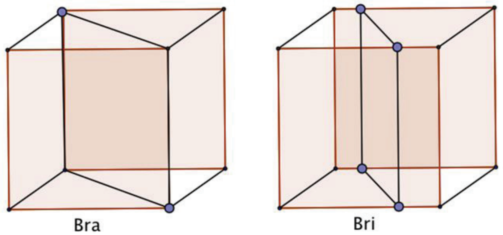

Image 4

Mais dans une production suivante :

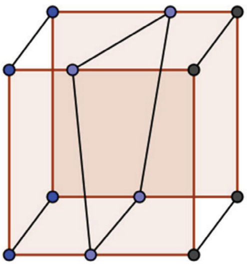

Image 5

La tâche étant de s'assurer que le quadrilatère est plat, Bra ne se souviendra pas de la condition qu'il avait pourtant exprimée.