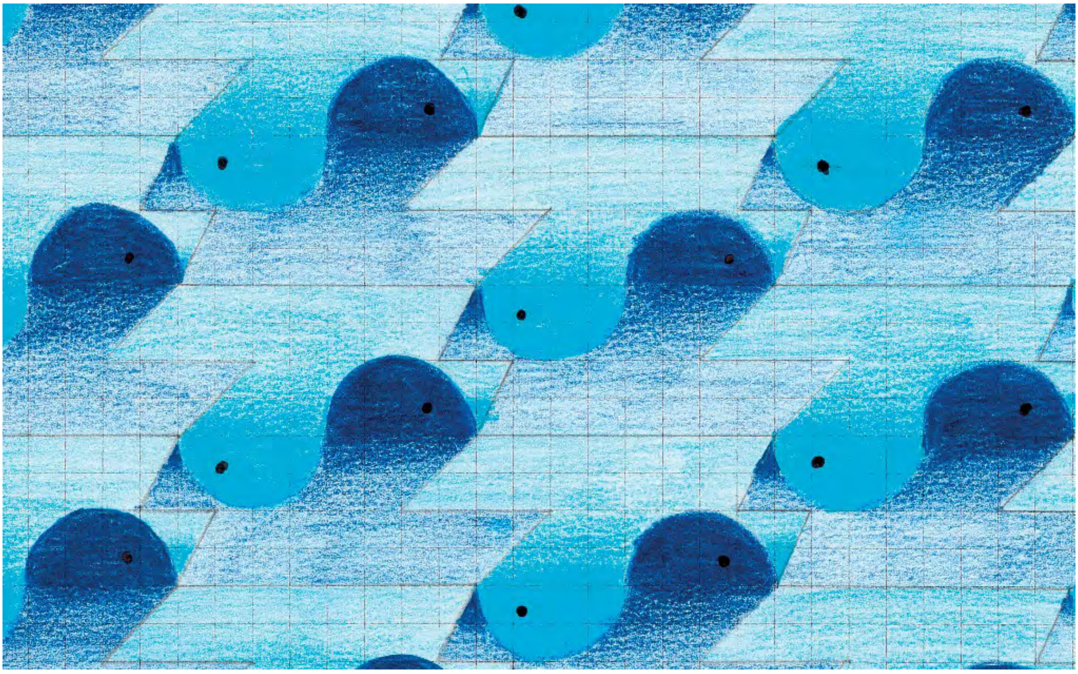
Novembre 2014

MATH-ÉCOLE

222

Numéro spécial
Enseignement de la géométrie



Math-Ecole (web)
ISSN 2296-715X

Math-Ecole

222
Novembre 2014

sommaire

Numéro spécial :
Enseignement de la géométrie

Éditorial 3
Jean-Luc Dorier

Que peut nous apprendre l'observation d'élèves de 11 ans confrontés à un problème « spatio-géométrique » ? 4
Marie-Hélène Salin

A la recherche de l'angle droit avec un enfant aveugle de naissance 10
Jean-Daniel Monod

Joyeux anniversaire Olga ! 16
Michel Brêchet

Pourquoi la géométrie est devenue l'espace ? 20
Laura Weiss

Des mathématiques expérimentales en route pour Londres ? 27
Thierry Dias

De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés 28
Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Marc Godin

Le Mathscope ouvre ses portes en février 2015 ! 39
Shaula Fiorelli Vilmart, Pierre-Alain Cherix

Geogebra dans l'enseignement spécialisé 40
Germain Von der Mühll

Comment les activités géométriques pourraient-elles contribuer au développement de la résolution de problèmes arithmétiques ? 45
Lucie DeBlois, Annette Braconne-Michoux, Sylvie Tremblay

La Géométrie, domaine mal-aimé des mathématiques scolaires genevoises ? 50
Laura Weiss

La géométrie au service de la construction du dessin figuratif auprès d'enfants TED 59
Emmanuelle Monnier

Quelle initiation à la géométrie déductive ?
Quelques propositions issues de la recherche en didactique des mathématiques 64
Ruhal Floris

A propos de triangles 69
François Jaquet

Autour du concept de propriété 76
Sylvia Coutat

Éditorial

Jean-Luc Dorier

Université de Genève

La géométrie occupe une place privilégiée dans les mathématiques. Elle est selon son étymologie liée à la mesure des terrains, qu'il fallait redistribuer après les crues du Nil dans l'Egypte ancienne. Elle a aussi constitué dans la Grèce classique, le lieu d'élaboration d'un corpus théorique basé sur la démarche hypothético-déductive, dont les Eléments d'Euclide (III^e siècle av. J.-C.) représentent le modèle. La question des fondements de la géométrie, après la crise des géométries non euclidiennes, a trouvé une réponse dans le travail de Hilbert à l'aube du 20^e siècle. Cet aboutissement théorique, qui a consisté à définir un ensemble complet, non redondant et non contradictoire d'axiomes de la géométrie est bien défini par Hilbert lui-même comme « l'analyse de notre intuition de l'espace ».

De fait dans l'enseignement, la géométrie occupe une place bien spécifique à tous les degrés. Les mutations de son enseignement dans le contexte genevois sont retracées par deux articles de Weiss, pour l'enseignement primaire et le secondaire 1.

Depuis les mathématiques modernes, le travail géométrique est préparé dès les premiers degrés de la scolarité au travers de nombreuses activités sur ce qu'il est convenu d'appeler depuis les années septante la « structuration de l'espace ». A la suite de travaux fondateurs cités dans plusieurs articles de ce numéro (essentiellement de Berthelot & Salin et Houdement & Kuzniak), on distingue généralement la géométrie du primaire où l'on travaille sur des dessins avec des validations par la lecture visuelle de propriétés parfois avec des instruments (géométrie physique) de celle du secondaire dont les objets d'étude sont les figures avec une validation par des théorèmes et démonstrations (géométrie déductive ou théorique). Les articles de Floris et Coutat s'intéressent directement à cette rupture et à la difficulté didactique qu'elle représente. Au niveau de l'enseignement primaire il existe déjà des enjeux didactiques forts. Ainsi, l'article de Salin montre l'importance de la dialectique entre les connaissances spatiales et les savoirs géométriques dans les dispositifs d'enseignement et les apprentissages de la géométrie au primaire. L'article de Perrin-Glorian et Godin montre qu'il existe une rupture au sein même de la géométrie du primaire liée au regard sur les dessins et à l'évolution dans la géométrie à travers des activités de tracés. Enfin l'article de Deblois, Braconne-Michoux et Tremblay interroge l'intérêt d'activités de géométrie pour faire acquérir des fondamentaux de la démarche scientifique voire contribuer à des apprentissages arithmétiques.

Les textes de Brêchet et Jaquet nous proposent deux études de cas de situations de géométrie permettant des activités de recherche avec des élèves du secondaire et du primaire. Enfin les trois articles de Monod ,Von der Mülh et Monnier analysent des situations en contexte d'enseignement spécialisé. Dans le premier, on découvre comment un élève aveugle de naissance peut concevoir la notion d'angle droit. Le second présente l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique comme dispositif d'aide à des élèves en difficulté. Le troisième partage une analyse du travail d'un élève autiste, où la décomposition des objets à partir de formes géométriques a pu aider à s'en faire une représentation symbolique.

Ce numéro nous offre un large panorama de questions didactiques liées à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Il resterait peut-être à amorcer une réflexion et des études, de l'impact des usages quotidiens de jeux vidéos ou systèmes de géolocalisation, qui nous plongent dans des environnements virtuels reproduisant la réalité, sur le rapport à l'espace (et donc à l'entrée dans la géométrie). Ce changement radical de notre rapport à la représentation de l'espace qui risque de faire disparaitre la lecture de plan est une révolution importante dans nos usages quotidiens, que la didactique des mathématiques devrait rapidement analyser et prendre en compte.

Que peut nous apprendre l'observation d'élèves de 11 ans confrontés à un problème « spatio-géométrique » ?

Marie-Hélène Salin

Maître de conférences honoraire
Université de Bordeaux

Les standards nationaux de la formation adoptés par la CDIP[1] distinguent un domaine de compétences « Espace » (s'orienter, utiliser des plans, etc.) et un autre appelé « Géométrie » (propriétés géométriques, figures planes, etc.)

Le module MSN 21 du plan d'études romand, destiné aux élèves entre 8 et 12 ans, a pour titre : « Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace ». Les attentes fondamentales pour ce cycle y sont précisées ainsi que les champs auxquels s'applique la résolution de problèmes. Une remarque apparaît en conclusion :

> *« Veiller à proposer des problèmes de géométrie et de repérage dans différents espaces, non seulement dans le « micro-espace » mais aussi dans le « méso-espace » voire dans le « macro-espace » »*

Les observations dont il est rendu compte dans la suite de cet article peuvent éclairer cette dernière remarque et ouvrent un questionnement sur la « qualité » des apprentissages géométriques quand ils sont limités à la résolution de problèmes dans la feuille de papier.

L'adaptation a des élèves de 11 ans d'un problème de « la vie courante »

Supposez que vous ayez à transporter un très lourd tapis de gymnastique rectangulaire à l'autre bout d'un gymnase, dans un espace très limité, que vous ne puissiez pas agrandir et dont vous n'êtes pas sûr qu'il puisse être suffisant pour contenir le tapis :

- si l'effort physique ne vous fait pas peur, vous pouvez faire un essai,
- une autre sorte d'essai, un peu plus élaboré, consisterait à confectionner un gabarit du tapis dans des feuilles de journaux, par collage et découpage,
- si par contre, vous préférez réfléchir avant d'agir, vous allez vous munir d'un mètre pliant, d'une équerre ou de quelque chose en tenant lieu, prendre les dimensions du tapis, et soit dessiner un futur contour soit marquer seulement l'endroit où les sommets du rectangle seront placés.

Pour savoir dans quelle mesure des élèves étaient capables de réinvestir des connaissances sur le rectangle semblant bien maîtrisées dans l'espace graphique, nous[2] avons transformé ce problème spatial et nous avons réalisé des observations individuelles de 38 élèves scolarisés en France en CM2[3] (7è HarmoS).

Un tapis de sol (rectangulaire) de 1,5 m sur 90 cm environ est posé à plat sur le sol à un bout de la pièce (description image 1) ; l'expérimentateur (E) propose à l'élève de prévoir (et de marquer par des pastilles) les endroits précis où se placeront les quatre « coins » du tapis lorsqu'on le déplacera à l'autre bout de la pièce (en rendant impossible une position où un côté serait parallèle au mur ou au mobilier).

Voici la consigne précise :

> *« Regarde, j'ai mis 4 pastilles, sous le tapis, une à chaque coin du tapis. »*

Puis E amène l'élève près de la zone déjà dessinée et dit :

> *« Maintenant viens voir ce que je vais te demander : tout à l'heure, nous allons déplacer le tapis ici. J'ai déjà posé une pastille, tu vas poser les 3 autres, mais pas dans le même ordre que moi : il faut d'abord poser les pastilles, ensuite le tapis. Et il faut qu'une deuxième pastille soit dans la zone que j'ai dessinée. Sur la table, ici, tu as des instruments que tu*

1 Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique.

2 Le « nous » désigne l'équipe formée avec R. Berthelot pour mener nos recherches sur l'enseignement de la géométrie et de l'espace.

3 Élèves de 10-11 ans.

peux utiliser si tu penses en avoir besoin. Quand tu auras fini, comment allons-nous vérifier que c'est réussi ? ».

La vérification se fait en déplaçant le tapis sur la position prévue. Les élèves disposent des instruments usuels de géométrie utilisés au tableau par le maître, de craies, de mètres déroulants. Après vérification, un deuxième essai est proposé.

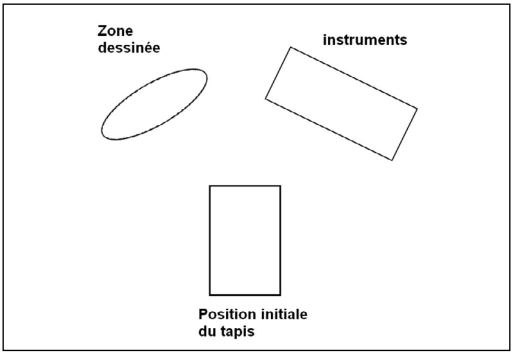


Image 1

C'est la contrainte (artificielle ici) de ne pas déplacer le tapis qui oblige à analyser la figure formée par le tapis et à recourir à ses propriétés géométriques pour pouvoir anticiper la position du tapis après déplacement.

Comment qualifier la tâche « prévoir la position du tapis ? »

Est-ce un problème de géométrie que les élèves ont à résoudre ?

Non, si on s'en tient à une définition stricte du mot « géométrie », celle à laquelle on veut introduire les élèves dans le cycle 3[4] : les situations de géométrie mettent un sujet « mathématicien » en interaction avec un milieu qui n'est pas l'espace physique et ses objets, mais un espace conceptualisé, que les figures matérielles[5] tracées par ce sujet ne font que représenter. La validité des déclarations n'est pas établie empiriquement, mais s'appuie sur des raisonnements qui obéissent aux règles du débat mathématique.

Ici la validation de la solution est matérielle, il n'y a pas de démonstration à faire, il y a « seulement » à savoir mobiliser des connaissances de base sur le rectangle pour pouvoir les transférer dans une situation concrète. Ce n'est donc pas un problème de géométrie au sens strict. Il y a bien un problème pourtant, qu'on peut qualifier de problème spatial puisque la solution met en interaction le sujet avec l'espace sensible et que la validation de la solution est elle-même spatiale. Et il y a intervention de connaissances géométriques pour une résolution experte du problème. C'est pourquoi nous proposons de le qualifier de « spatio-géométrique »

Précisons de manière plus générale les caractéristiques des problèmes spatiaux :

- leur finalité concerne l'espace sensible ;
- ils peuvent porter sur la réalisation, soit d'actions (fabriquer, se déplacer, déplacer, dessiner, etc.), soit de communications à propos d'actions ou de constats ;
- le langage et les représentations spatiales permettent de communiquer des informations qui se substituent à la perception ;
- la réussite ou l'échec est déterminée par le sujet en comparant le résultat attendu avec le résultat obtenu.

Nous rencontrons une multiplicité de problèmes spatiaux au cours de notre vie, que nous résolvons avec des moyens plus ou moins élaborés, moyens acquis au fur et à mesure de notre développement et des apprentissages réalisés dans la famille, à l'école ou dans la pratique professionnelle. La maîtrise de l'espace, c'est à dire la possibilité d'un contrôle efficace par le sujet de ses relations à l'espace sensible est facilitée s'il dispose des connaissances géométriques qui s'appliquent au problème qu'il a à résoudre. Dans la plupart des professions portant sur des situations spatiales pour lesquelles il faut anticiper des décisions, la modélisation géométrique constitue un instrument professionnel important.

Différents types de problèmes spatiaux

Selon la taille de l'espace dans lequel ils sont posés, la résolution des problèmes spatiaux usuels suppose des connaissances plus ou moins élaborées. Le micro-espace,

4 Cycle 3 élèves de 12 à 15 ans ans.

5 Voir dans l'article de Perrin et Godin dans ce même numéro la note 5.

un espace où les rapports spatiaux correspondent à la manipulation familière des petits objets, est associé à un domaine si familier au sujet que la plupart des problèmes qu'il y rencontre ne nécessitent pas de conceptualisation. Une action dirigée par les sens sur des objets qui demeurent sous le contrôle de la vue et de la préhension permet en effet de résoudre tous les problèmes courants d'identification, de déplacement, d'assemblage.

Résultats observés sur la situation du tapis proposée à 38 élèves

Concernant la réalisation effective

Lors du premier essai, deux élèves seulement ne pensent pas à mesurer ; presque tous prennent les mesures des (4 ou 2) côtés, placent deux pastilles, et ajustent les deux autres par tâtonnement pour que les trois distances restantes correspondent aux longueurs. Sept élèves seulement contrôlent un angle droit entre les deux directions déterminées par trois pastilles consécutives.

Les élèves constatent donc un échec massif à la réalisation, lorsqu'on tente de placer les coins du tapis sur les marques faites au sol.Trente et un constatent le décalage, mais vingt l'imputent aux longueurs et ne savent pas comment le corriger (six d'entre eux essaient en vain de le faire à partir de la longueur des diagonales).

Moins de 50% des élèves sont donc capables soit de réussir directement en utilisant une équerre, soit d'interpréter leur échec en repérant le problème de l'angle droit entre les directions choisies pour les repérages.

A la fin de l'entretien, interrogés sur la forme du tapis, tous savent pourtant que c'est un rectangle.

Les difficultés à s'exprimer sur les causes de non-réussite

A la vue du décalage, deux réactions des élèves sont très fréquentes :

« *Je n'ai pas bien mesuré* » (pour placer les pastilles). Une rapide vérification leur montre que les longueurs de côté conviennent.

« *Ce n'est pas droit* ». Mais l'ambiguïté du terme « *droit* » est énorme, certains élèves confondent l'angle droit, les côtés droits et « *ce n'est pas droit* » car penché par rapport à l'environnement des murs.

Les nouveaux essais

Au cours du deuxième essai, certains élèves « découvrent » qu'il faut contrôler la direction de l'équerre, soit par visée, soit en ayant recours au support d'une règle.

Quelques réactions possibles

La plus simpliste serait l'affirmation : « *Ils n'ont rien appris ou si peu* ». Pourtant, presque tous ces élèves savent terminer le dessin d'un rectangle dont un angle est déjà tracé en biais par rapport aux côtés de la feuille en utilisant leur équerre à bon escient, avec une précision de moins d'1mm sur les longueurs des côtés. Et tous savent qu'un rectangle a 4 angles droits.

Une analyse plus réaliste consiste à dire : « *ils ne sont pas en mesure de mobiliser leurs connaissances dans cette situation précise* ». En effet, mais quelles sont donc les connaissances qu'il faut pouvoir mobiliser pour réussir ? Répondre à cette question demande une analyse plus détaillée de la situation des élèves interrogés.

Analyse de la situation

Etat initial : un ensemble de 5 objets matériels : le tapis et les 4 pastilles, dans une position 1.

Etat final visé : 4 autres pastilles devant occuper la même place par rapport au tapis dans une position 2, position en partie contrainte puisque deux des pastilles doivent être placées dans une zone empêchant le repérage avec l'espace environnant.

Quelles connaissances sont nécessaires pour réussir ?

Au moment de la prise d'informations, il faut faire un raisonnement en deux étapes :

Etape 1 :

La forme est invariante par déplacement ; ce sont des positions de points qui sont visées, les distances entre ces points sont les mêmes que les longueurs des côtés du tapis, il faut donc prendre en compte les dimensions du tapis et placer les 4 pastilles en respectant ces distances entre elles.

Etape 2 : Deux raisonnements sont possibles :

1) le tapis a la forme d'un quadrilatère, or la connaissance des longueurs de côté est insuffisante pour le reproduire[6], il faut prendre en compte en plus soit un angle, soit la longueur d'une diagonale, ou bien 3 côtés et deux angles ;

2) le tapis a la forme d'un rectangle, je le sais ou je le vois ou je le vérifie, il suffira de construire un rectangle de mêmes dimensions sur le sol ou de repérer les sommets d'un rectangle de mêmes dimensions.

Le premier « raisonnement » de l'étape 2 a peu de chance d'apparaître, les élèves ne connaissent pas cette propriété, qui n'est d'ailleurs pas enseignée. On peut penser que la plupart des élèves observés qui ont réussi, ont implicitement fait le deuxième raisonnement.

Au moment du positionnement des pastilles

Plusieurs solutions sont possibles, il faut pouvoir contrôler 3 longueurs et 2 angles droits, ou les 4 longueurs et 1 angle droit.

La prise en compte des seules longueurs des côtés du tapis conduit à un placement aux sommets d'un parallélogramme. Si on ne dispose pas d'instruments adaptés, il est possible de s'en approcher par corrections successives. C'est ce que font la majorité des élèves qui arrivent assez bien à placer les pastilles aux sommets d'un parallélogramme, non tracé, respectant les distances entre les pastilles.

Avoir reconnu le rectangle et avoir l'intention de repérer ses sommets ne suffit pas aux élèves pour réussir : Pourquoi ?

Nos réponses sont plus des hypothèses que des certitudes, et devraient être étayées par davantage d'études que ce que nous avons pu faire. Deux caractères de la situation sont à prendre en compte.

Le problème posé ne demande pas de tracer le contour du tapis mais seulement de positionner les pastilles aux sommets.

De ce fait, les élèves ne « pensent » pas à tracer le rectangle. Pour un adulte avec une certaine culture mathématique, l'espace est homogène, l'existence des droites qui bordent la future position du tapis est assurée, même si elles ne sont pas tracées. Les tracer permet d'utiliser les instruments de manière presque aussi aisée que pour un tracé sur une feuille de papier. Ceci n'est pas encore conceptualisé par un élève de cet âge et les professeurs du début de l'enseignement secondaire savent le temps qu'il faut à leurs élèves pour tracer les droites supports de segments, et tracer des sur-figures. Aussi, ici, la tâche de l'élève est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît à première vue : il doit reconstruire mentalement tout le modèle géométrique : lignes joignant deux points (places des sommets), et contrôler la position relative des lignes avec des angles ; plus précisément, il faut concevoir qu'un rectangle peut être décomposé en 4 droites perpendiculaires. Ce n'est pas si simple.

Le passage de l'espace de la feuille de papier à un espace plus grand (ici le méso-espace) a deux conséquences :

D'une part, le contrôle global par la vue est difficile ; quand un élève de CM2 trace un rectangle sur une feuille de papier, soit il a appris à le faire avec une équerre, soit il y a recours quand il s'aperçoit par un contrôle visuel que le rectangle n'en a pas l'air. Ici, le contrôle visuel n'est pas suffisant pour l'alerter.

D'autre part, l'usage des instruments est modifié par la taille de l'espace de travail. Le plus souvent, la taille de la figure n'oblige pas l'élève à contrôler que son équerre est bien positionnée, puisque le côté de l'équerre est plus grand que le côté du rectangle à tracer. Ici, la plupart des élèves qui, d'emblée, prennent une équerre car elle est associée pour eux au rectangle, la positionnent à un sommet mais ne contrôlent pas que son côté est dans l'alignement de l'autre sommet. Notons toutefois que les quelques-uns qui le font dans le deuxième

6 *Rappelons que deux quadrilatères dont les côtés sont respectivement isométriques ne sont en général pas superposables.*

essai réussissent.

Trois remarques

L'enseignement usuel, en s'appuyant largement sur l'évidence perceptive, attribue implicitement un grand rôle aux représentations spontanées que les élèves ont de l'espace. Nos travaux nous ont permis de conforter l'hypothèse (Brousseau 2000) de l'existence, chez les élèves comme chez de nombreux adultes, d'une représentation spontanée hétérogène de l'espace. L'étude de ces représentations nous a permis de faire apparaître le décalage existant entre ces représentations et les notions géométriques visées. Les contraintes dues à la taille des espaces, dans lesquels se déroulent les interactions usuelles de la vie courante, structurent fortement les connaissances « naturelles » de l'espace en trois représentations : le micro-espace (qui correspond à la préhension), le méso-espace (qui correspond aux situations de déplacement dans l'espace domestique) et le macro-espace (qui correspond aux interactions avec des espaces inconnus urbains, maritimes ou ruraux). La représentation de l'espace issue de l'expérience courante extrascolaire n'est pas homogène et est assez différente de la géométrie élémentaire. Lorsque les principales caractéristiques des rapports entre les sujets et l'espace peuvent être assimilées à celles des rapports usuels de manipulation des objets de petite taille, les élèves feraient appel à cette représentation micro-spatiale, interprétant les figures géométriques comme des objets du micro-espace, munis des propriétés (et des limitations) correspondantes. Ici, les élèves utilisent des procédures perceptives qui permettraient de réussir dans le micro-espace mais pas dans le méso-espace.

Le type de tâche présenté ci-dessus n'est pas proposé dans l'enseignement, ni primaire, ni secondaire, ni même professionnel. C'est pourtant bien à anticiper les résultats de son action que sert la géométrie pour le plus grand nombre (par exemple pour les métiers du bâtiment).

A quoi renvoie la surprise manifestée par la plupart des enseignants face à ces résultats ? Leur maîtrise du modèle fait qu'ils projettent leur connaissance de l'espace géométrique sur l'espace sensible sans difficultés, tout au moins dans des cas simples et que l'évidence de la solution les empêche de saisir tout le chemin que doit faire l'élève pour s'approprier les concepts géométriques et acquérir les compétences évoquées.

Quelques références de situations d'enseignement

Le questionnement sur l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire est aujourd'hui important, plusieurs équipes de recherche françaises ont publié des travaux touchant aux questions abordées ici.

1) Sur la résolution de problèmes posés dans le méso-espace, avec recours à la feuille de papier comme « laboratoire d'expérimentation graphique ». (Berthelot et Salin (2001) ; Gobert (2001) ; Maurin (2001) ; Bloch et Salin (2004)

Un exemple de cette démarche, concernant le rectangle, est donné par Maurin :

> *On propose [aux élèves] de construire un rectangle dans un espace dont la taille ne permet plus d'avoir recours à l'image mentale comme référent. Ils reviennent alors vers la feuille de papier pour interroger une figure réduite afin d'en tirer des propriétés qui puissent leur permettre de résoudre, dans l'action sur le terrain, le problème de construction posé.*

2) Sur l'élaboration de « *situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie* ». Je renvoie le lecteur à l'article de Perrin et Godin dans ce numéro.

3) L'équipe ERMEL a publié en 2006 un ouvrage présentant des « *propositions d'enseignement expérimentées privilégiant la construction des savoirs [...] à travers des situations de résolution de problèmes, la prise en compte des connaissances spatiales et géométriques des élèves, l'apprentissage progressif du vocabulaire, de l'usage des instruments, et des méthodes de validation.* »

Références

Berthelot, R., Salin, M.H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie. In M.H. Salin et al. (Ed.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp.125-142). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bloch, I., Salin, M.H. (2004). Espace et géométrie : Géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège, *Actes du 30ième Colloque de la COPIRELEM. (oo. 293-306)*. Avignon : IREM de Marseille.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire [Page Web]. Accès : /http://guy-brousseau.com/155/les-proprietes-didactiques-de-la-geometrie-elementaire/

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes,* Hatier.

Gobert, S. (2001). *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*. Thèse, Université Paris 7.

Maurin, C. (2001). La feuille de papier comme laboratoire d'expérimentation graphique In Commission interirem premier cycle et Commission Permanente des IREM pour l'enseignement élémentaire (COPIRELEM), *Articulation école–collège : des activités géométriques,* IREM : Paris 7.

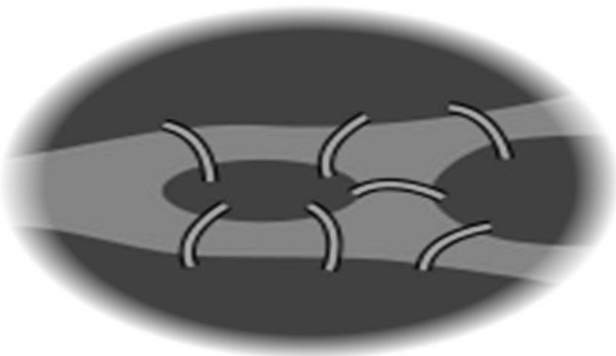
Perrin, M. J. & Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole,* 222, 26-36.

Le problème des sept ponts de Königsberg (tiré de Wikipedia)

(solution dans ce numéro)

Le problème des sept ponts de Königsberg est un problème mathématique connu pour être à l'origine de la théorie des graphes. Résolu par Leonhard Euler, il se présente de la façon suivante :

La ville de Königsberg est construite autour de deux îles situées sur la rivière Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.



À LA RECHERCHE DE L'ANGLE DROIT AVEC UN ENFANT AVEUGLE DE NAISSANCE

Jean-Daniel Monod

Groupe DDMES[1]

Pour rappel

Au cœur des préoccupations du groupe *DDMES* se pose la question de l'expérience et de son rapport avec le savoir mathématique. Nous considérons en effet que l'on n'accède jamais directement aux objets mathématiques et que, par conséquent, la connaissance mathématique est toujours référée à quelque expérience tangible.

Dans l'enseignement spécialisé, nous espérons trouver, dans l'expérience, des moyens d'enseigner les mathématiques à des élèves qui ont accumulé des retards notables dans leurs apprentissages scolaires. Le défi est d'autant plus grand si l'on souhaite y parvenir sans faire trop injure à l'âge des élèves, leur pensée ou leurs intérêts.

Introduction

La narration qui suit concerne des observations au sujet des interactions avec du matériel de géométrie d'un enfant d'une dizaine d'année, non voyant de naissance, élève du CPEHV (Centre Pour Enfants Handicapés de la Vue) à Lausanne.

Cette rédaction est exempte de références théoriques pour ne pas en briser la structure narrative. Son but est d'inviter les enseignants à mettre en œuvre une suite de tâches en étant stimulés, je l'espère, par la description de celles qui sont choisies ici.

Narration de deux séances de geometrie

1ère séance : travail avec des formes en carton épais

Matériel

Cadre pour photos en bois avec moulures.

Cartons fort A4, tapis de découpage, cutter.

Formes prédécoupées en carton léger : triangles équilatéraux, carrés, rectangles, trapèzes, losanges, parallélogrammes.

Intentions

Lors d'un précédent travail avec Ben[2], qui date de plus d'un an, j'avais vécu la surprise de l'entendre décrire un angle droit comme le rebord d'une table ou comme le rebord d'une planche découpée en biseau, ou même le rebord d'une corniche en quart de rond. J'en ai inféré que sa notion d'angle droit était associée aux objets ayant un rebord rectiligne.

Poursuivant l'exploration sur cette voie, Ben avait rencontré des rectangles à 4 angles droits, rassurants, et des triangles à 3 angles droits, complètement choquants pour un non mathématicien. Rappelons que pour un mathématicien des triangles à 3 angles droits sont fréquents sur une sphère, mais pas sur une surface plane…

La notion d'angle droit était solidement installée pour des objets familiers, ainsi au coin d'une table, Ben en parcourant le bord avec la main rencontrait un angle droit puis un autre, en suivant le bord de la fenêtre aussi et le bord de la porte de classe itou.

Fort de cette connaissance, je me suis invité avec l'intention de voir l'évolution de sa notion d'angle et d'angle droit en particulier.

1 Le groupe de recherche ddmes (didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé) est composé de chercheurs, de formateurs et d'enseignants spécialisés : Christian Cange (Institut Pré-de-Vert, Rolle), Mireille Cherix (Gy Bugnon), François Conne (Groupe DDMES, Etoy), Luca Del Notaro (Ecoles primaires, Genève), Philippe Depommier (Ecoles secondaires, Pully), Stéphanie Dénervaud (Eben-Hézer), Thierry Diaz (HEP-Vd), Jean-Michel Favre (CFPS du Château de Seedorf, Noréaz), Delphine Jean Richard (CPEHV, Lausanne), Céline Vendeira-Maréchal (DiMaGe, FPSE, Université de Genève), Jean-Daniel Monod, (Groupe DDMES, Bussigny), André Scheibler (groupe DDMES, Aigle), Jimmy Serment (Ecoles secondaires, Pully).

2 Ben est un prénom d'emprunt. Toute précision supplémentaire concernant son âge ou son enseignant de référence pourrait le faire reconnaître au vu des petits effectifs des classes de cette structure d'école.

Suite des tâches

Je lui présente le cadre pour photos avec moulures, il s'en saisit et dit que c'est un carré.

Je lui demande pourquoi.

Et ben il y a deux côtés qui avancent la même chose devant moi et deux autres qui sont la même chose devant moi.

Comment en être sûr ?

Ben *: si c'était un rectangle il y aurait deux côtés plus longs.*

Je lui demande de caresser les moulures du cadre, pour voir s'ils sont droits et il me dit:

Non, là c'est rond.

Sa notion d'angle a évolué, il ne décrit plus un rebord rectiligne comme un angle droit.

Poursuivant la tâche, je lui demande de toucher un carton placé dans le cadre et de dire ce que c'est. Face à un rectangle il dit *carré*, face à un carré, il dit *carré*. Je lui demande combien ces formes ont d'angles. Il les parcourt du doigt :

Le rectangle a 4 côtés, le carré en a 5.

Il y en a un qu'il compte deux fois.

Je lui propose de tenir un « coin » de la forme en carton avec la main gauche et de parcourir son bord avec la main droite.

Il a 4 côtés.

Ensuite je passe à des formes plus complexes, pentagone, hexagone, heptagone. Il compte les côtés, à 5 il dit *pentagone*, à 6, *hexagone* et à 7 me demande comment on l'appelle. Je dis heptagone, mais sans intention d'enseigner.

Je passe aux angles. Je lui demande de décrire la forme des angles. Sans hésiter il me parle *de quelque chose qui a deux bords,* il mime la chose avec les mains. On passe à la forme en carton. Où sent-il un angle droit ?

Les coins dont l'angle au sommet est légèrement obtus sont appelés droits comme les « vrais » angles droits, les coins dont l'angle au sommet est plus aigu sont rejetés car trop mou au toucher, ils s'écrasent sous la pression de l'index qui cherche à en faire le tour.

En manipulant diverses formes il décrit des pentagones à 4 angles droits et même un hexagone à 6 angles droits. Mais cela lui paraît bizarre, dit-il.

Au fond, c'est quoi vraiment un angle droit ?

Il me propose la direction du bord de la table touchant son ventre et la direction de son bras tendu en face de lui. Je lui demande de réaliser cela avec deux baguettes. Il les place dans les directions qu'il vient de décrire.

Je lui propose un critère pour savoir si un angle est droit : planter une baguette sur la table comme un poteau et l'autre couchée sur la table avec des extrémités qui se touchent.

Ensuite j'appuie les coins en carton contre ce montage pour voir si cela coïncide.

On teste cette méthode sur diverses formes en carton. Bien que j'assure la pointe de la baguette verticale moi-même le dispositif présente des limites au toucher. Il faut que les coins du carton présentent des angles au sommet de mesure sensiblement différente de 90° pour que Ben puisse affirmer :

Là ce n'est pas un angle droit.

Je propose autre chose : fabriquer un triangle avec deux angles droits. Ben pense que c'est possible. Je lui présente un carton en forme de quadrilatère avec deux angles droits. Il en fait le tour, hésite, puis me dit :

Ce n'est pas un triangle.

Je lui demande pourquoi.

Il n'a pas 3 côtés, il en a 4.

Et alors qu'est-ce que c'est ?

Je ne sais pas mais ce n'est pas un carré.

Je lui présente alors un grand carton en forme de triangle isocèle avec deux angles quasi droits. Il me dit :

Il a deux angles droits, ça joue.

Tu es sûr ?

On vérifie avec trois baguettes, une courte posée sur la table et les deux autres placées à ses extrémités, à la quasi verticale. Ben les frôle en s'éloignant de la table :

Là ça joue pas, il faut un peu courber les baguettes pour qu'elles se touchent.

Je résiste en disant que ce n'est plus un triangle alors. J'insiste :

> *Y a-t-il des triangles avec deux angles droits ?*
>
> *Alors là vous me posez une colle ? Je ne suis pas sûr.*

Je réponds qu'au vu de notre expérience la question reste ouverte.

La séance se termine par un jeu de robot. Je découpe des cartons à coups de traits rectilignes au cutter en demandant à Ben de me guider pour réaliser un triangle, un carré, un pentagone, ou ce qu'il veut, en respectant la règle : une fois que j'ai commencé à tracer un segment il doit dire si je dois tracer un angle droit, ou non, à chaque arrêt de mon cutter.

Il prédit la forme découpée et il vérifie avec son doigt. Cela correspond parfois, parfois non.

Ben rit et moi aussi. On poursuit encore en observant le trou que laisse la découpe dans le carton support.

Si la découpe est à angle droit, le trou a aussi un angle droit. Sinon, quand la forme découpée a *un angle qui sort de la forme* (je l'interprète comme obtus) le trou du carton *a un angle qui rentre dans la forme*. *Spécial* affirme Ben.

En rejoignant la salle de classe avec lui, je profite de lui demander de montrer un angle droit sur la porte juste avant de l'ouvrir. En palpant un rebord, il me dit *non ce n'est pas un angle droit* ; il longe ce rebord vertical de la porte, arrive à la limite et touche le rebord horizontal : *là il y a un angle droit.*

Observations

Ben parle de l'angle comme quelque chose qui a deux bords.

Un « coin » est un angle droit.

Un triangle est rapidement reconnu et décrit.

Un triangle avec un angle droit est reconnu aussi.

On a essayé de construire un triangle avec deux angles droits, Ben pensait qu'on pouvait essayer, mais on n'y arrive pas avec un carton. Par contre avec trois bâtonnets en bois on arrive presque, car si on assure la verticalité d'un premier bâton et celle d'un second à proximité, on plie un peu pour les réunir au bout !

S'il touche un objet à bord rectiligne, il va chercher un angle droit à une extrémité de l'objet comme en suivant le bord d'un rectangle.

Avec mes mots je dirais : d'abord il perçoit une ligne droite, puis atteint une limite entre matière et vide et doit changer de direction. Comme la plupart des objets architecturaux sont rectangulaires (plutôt Le Corbusier que Steiner) il conclut qu'il rencontre un angle droit.

Comment garantir un angle droit ? Utiliser un carré.

Un carton A4 est un carré tout comme un carton carré : limite de perception manuelle sans contrôle visuel. Même si pour Ben un carré a tous ses côtés égaux et un rectangle deux côtés plus longs que les deux autres.

Un coin en carton est perçu comme plus ou moins pointu. Le plus pointu est l'angle droit. Les angles plans dont la mesure est plus petite que 90° sont reconnus comme moins pointus, ce qui constitue une surprise pour un voyant, mais cela s'explique car le carton s'écrase sous la pression de l'index. Les angles-plans de mesure plus grande que 90° sont reconnus, car quand on suit le bord de la pièce en carton avec le doigt, on ne sort pas de la pièce. Pour les angles-plans de mesure plus petite que 90°, Ben dit que *l'on rentre dans la pièce, on fait une sorte de trou.*

Ben ne signale à aucun moment avec qui il a appris quelque chose au grand étonnement de son éducatrice qui me raconte que Ben dit très souvent à ses profs *ah !, ça j'ai appris avec Sabrina, ça avec Magali, ça avec, …*

Ses connaissances géométriques locales ont-elles évolué en savoir ou n'y a-t-il que des accords verbaux sur des registres de réalité différents ?

2E SÉANCE : TRAVAIL AVEC DES FEUILLES PLIABLES À LA MAIN.

MATÉRIEL

Papier A4 très léger.

Papier légèrement cartonné découpé en formes arrondies, cadre photo en bois.

Formes prédécoupées en carton léger : triangles équilatéraux, carrés, rectangles, trapèzes, losanges, parallélogrammes.

Ciseaux.

TÂCHES

Reconnaissance du cadre carré ou rectangle, critère ? Reconnaissance des angles droits.

Pliage en deux : reconnaissance d'une ligne droite.

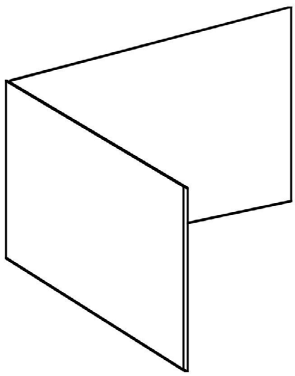


Image 1

Pliages en deux (deux fois pli sur pli) : fabrication d'un angle droit, vérification par dépose verticale (comme un paravent dont l'axe est le deuxième pli) sur une table.

Ajustement de la feuille pliée en 4 avec des « coins » de formes en carton.

Détection des angles droits et des autres : les non droits.

Pliage, puis second pliage, pli sur pli ou non, découpe des coins et comparaison entre les pièces découpées et les « trous » obtenus.

DÉROULEMENT

Je retrouve Ben dans un coin de la bibliothèque. Je lui présente le cadre photo et lui demande ce que c'est :

Un carré.

Comment en être sûr ? Rectangle ou carré ?

Il parcourt le pourtour avec un doigt.

C'est un rectangle.

Pourquoi ?

Deux côtés plus longs que les deux autres.

OK mais pourquoi pas un losange ?

Ben : *parce que là c'est droit* (il me montre un coin qu'il caresse avec le pouce).

Comment être sûr que c'est droit ?

Ben : *là vous me posez une colle.*

Je propose donc un moyen pour être sûr d'avoir un angle droit : le double pliage pli sur pli.

Ben empoigne une feuille A4 qu'il plie bord sur bord, il marque le pli :

Ça fait quelque chose de tout droit.

Je lui demande si ça fait un angle. Si le pli est bien marqué, *non*.

Il replie la feuille bord sur bord, mais différent du premier pli. Il marque le pli. Il caresse la feuille pliée.

Elle a 4 angles droits.

Pour être sûr, je place la feuille pliée debout sur ses plis, comme un paravent. Je lui demande de sentir la surface de la table, puis le pli (vertical).

Quel angle y a-t-il ici ?

Vous me posez une colle.

Comme pour les baguettes de la dernière séance, je lui dis que cela fait un véritable angle droit entre la table et le pli.

Il tâte, mais en tâtant le long du pli vertical et ensuite la table on est dans un creux à l'intérieur du paravent. Il hésite, alors qu'en tâtant l'angle du paravent à l'extérieur on est dans un angle saillant, il manifeste un grognement de satisfaction.

Je lui présente cette fois une feuille préalablement découpée avec des bords ronds et lui demande de refaire le double pliage pli sur pli.

Après hésitation due à la recherche des bords correspondant comme pour une feuille A4, et avec mon aide, et un double-pli, il obtient un « coin de papier » de même forme que le premier.

Spontanément, il caresse le pourtour de la feuille pliée et ne repère rien. En mettant le doigt sur le coin droit, il reconnaît un angle droit.

Je lui propose de refaire l'expérience avec une autre feuille ronde. Même démarche, mais il n'hésite plus à plier en deux sans s'occuper des bords. Le résultat ressemble aux deux précédents. Il dit :

Ça fait un angle droit.

Mais est-ce pour me faire plaisir ? Y a-t-il malentendu ? Comment pourrait-il en être sûr sans reconnaissance visuelle ? Et sans reconnaissance manuelle par superposition des coins en papier ? Aurait-t-il le doute du mathématicien débutant : tous les angles droits sont-ils égaux ?

J'évite cette piste pour cette séance, réservant cette question fondamentale à plus tard avec la situation d'un triangle à deux angles droits.

Comment utiliser ce pliage comme dispositif qui fait voir des phénomènes ?

Je présente diverses formes en carton en lui demandant de juxtaposer le coin du modèle avec chacun des coins du carton. Il passe et repasse les doigts sur les bords du carton et les bords de la feuille, la feuille bouge, il est troublé.

Là il y a un angle droit, là il n'est pas droit.

Comment en être sûr sans vérification visuelle ?

Je me résous à maintenir la feuille fixée sur le carton lorsqu'il le manipule pour diminuer le trouble. Il manifeste un contentement : *comme ça j'arrive mieux*. Un trapèze en carton avec deux angles droits est correctement décrit. Avec d'autres formes en carton le travail se poursuit : les angles obtus sont repérés comme non droits. Les aigus sont un peu camouflés par la feuille modèle et Ben hésite : *là je ne sais pas.*

Je me rends compte des limites du modèle de la feuille pliée en 4 quand il s'agit de l'utiliser à l'aveugle, c'est-à-dire avec la palpation comme seul moyen d'essai et de vérification.

A l'avenir je pense à apporter une belle équerre en bois verni et de m'assurer que la superposition bord à bord présente un argument valide, aussi bien pour Ben que pour moi, d'être en présence d'un angle droit.

Pour la fin de la séance j'ai prévu de découper des coins de feuille pliée en double pli et d'observer les trous produits.

Première expérience : pli sur pli et découpe.

Cela donne un ?

Carré !

Tu es sûr ?

Non il y a quelque chose en diagonale, ah, c'est un losange.

Oui, comment le sais-tu ?

Parce que c'est comme un carré, mais en diagonale.

Malgré ma surprise je décide de ne pas m'arrêter sur une définition, car j'ai l'impression qu'il a un truc pour repérer les losanges, mais je n'ai pas envie de le percer maintenant.

J'ai l'intention d'observer les trous.

Deuxième expérience : plier deux fois pli sur pli et une 3e fois pli sur pli. J'aide à garantir le pli sur le pli. Ben coupe la pointe, ouvre et découvre un carré.

Tu es sûr ?

Il fait le tour avec les doigts.

Non c'est pas un carré c'est un hexagone[3].

Je l'aide en marquant un sommet avec un doigt, il en fait le tour,

Il y a six côtés.

Est-ce qu'il y a des angles droits ?

Non.

Je propose de refaire le pliage, mais non pas pli sur pli. Ben découpe la pointe, il déplie la feuille :

Il y a deux trous.

Ben me dit :

Vous devez bien vous marrer à faire des maths avec moi.

---

3 En fait il s'agit d'un octogone, mais Ben le nomme hexagone.

J'interprète sa réaction comme conséquence de sa surprise d'avoir observé deux trous au lieu d'un.

Je prends congé et le remercie pour son travail assidu.

Remarques de synthèse

Le pliage avec une feuille A4 appelle d'ajuster les bords entre eux, de rabattre bord sur bord. Si la feuille est arrondie, Ben perd ses repères et dès le départ ne sait pas comment effectuer un pli. Le pliage au hasard d'une feuille de papier n'est pas spontané, il nécessite une intention ou invite à la prudence comme si la trace du pli empêchait un retour en arrière de l'action.

Le pliage effectué quand même avec une feuille ronde livre une forme avec un angle-plan identique à celui produit par la feuille A4, Ben reste perplexe. Au nom de quoi une seule expérience pourrait-elle le convaincre, même si selon certains cognitivistes, l'intuition géométrique serait universelle ?

Je suppose une évolution chez Ben du concept angle. Le bord d'un carton est accepté comme modèle, le rebord rectiligne d'un cadre ou d'une table n'est plus évoqué à aucun moment dans cette séance. Cela ne veut pas dire qu'il est abandonné pour autant. Le contexte feuille 2D et l'accès à la 3D par des pliages seulement lui permet de prendre de la distance avec sa représentation de l'angle droit comme rebord de table, voire même simplement de bout droit. Je fais comme si une feuille pliée deux fois, le deuxième pliage effectué pli sur pli pouvait servir de modèle de l'angle droit.

Il faudra y revenir avant de faire adopter l'équerre comme outil de vérification.

Conclusion

Le lecteur pourrait très bien émettre d'autres remarques de synthèse à la suite du récit de cette expérimentation. Pour ma part je voudrais insister sur le caractère profond de la notion d'angle et en particulier d'angle droit. Ce n'est pas parce qu'on emploie couramment ces deux vocables qu'ils correspondent à une connaissance simple et solidement partagée. Lisez donc une définition de ces termes dans un dictionnaire de mathématiqueS pour vous en convaincre. Le travail avec un enfant aveugle met en lumière, au vu de l'impossible contrôle visuel, la part de connivence maître-élève que recèle l'emploi des mêmes mots pour désigner des réalités différentes et parfois contradictoires. Le fait de ne pas pouvoir se mettre d'accord en disant « tu vois bien que » aiguise la vigilance à propos des registres de pensée toujours différents entre élève et maître (ou expérimentateur).

Cela n'empêche pas d'avancer dans des apprentissages en imaginant une suite de tâches liées à des notions mathématiques à la fois profondes et élémentaires (la droite, les polygones, le cercle, …) productrices d'expériences et d'y revenir pour tenter de comprendre ce qui se passe.

Le fait de rédiger une narration du déroulement de ces tâches est stimulant pour l'auteur et, je souhaite, que sa lecture le soit aussi pour le lecteur.

Labo-maths[1] : Trapézoïdons

Narration d'expérience à propos de l'énigme du numéro 219 de la revue.

Nous rappelons ici que l'objectif de la rubrique « labos-maths » est de proposer aux enseignants des situations de recherche assez ouvertes afin qu'ils puissent les expérimenter en classe avec leurs élèves. Si le contexte de la recherche est imposé, les questions à poser, les dispositifs de travail, le matériel et les démarches envisagées peuvent être divers et donc adaptés à plusieurs niveaux de classe. La finalité de la rubrique est également de favoriser la constitution d'un réseau d'échanges et de partage d'expériences entre les enseignants. Nous leur offrons en effet la possibilité de devenir des narrateurs quand ils le souhaitent en témoignant dans la revue de leurs essais, de leurs réussites et de leurs difficultés à mettre en œuvre les problèmes proposés. Ainsi chaque enseignant peut dire comment il a posé le problème, pourquoi il a choisi certaines questions et pas d'autres, et aussi témoigner de sa réflexion sur le travail de ses élèves.

Voici donc narrée pour vous une toute première expérience de classe conduite à propos de la recherche « Trapezoïdons » du numéro 219 de la revue. Il s'agit d'une énigme dont l'intérêt principal est de faire des liens entre les registres numériques et géométriques. Une recherche permettant également aux élèves d'investiguer dans le domaine du tracé et de la dénomination des figures particulières.

N'hésitez pas à faire comme cet enseignant en nous[2] envoyant vos comptes-rendus d'expériences à propos d'une des énigmes de la rubrique labo-maths. Vous pouvez joindre des photos des recherches, des traces de travaux d'élèves ou tout autre document qui vous paraît pertinent pour raconter vos moments de mathématiques en classe. Toutes les énigmes proposées dans les différents numéros de la revue sont utilisables à tout moment, disponibles en ligne sur notre site : http://www.mathecole.ch.

1 *T. Dias, auteur de la rubrique Labo-Maths.*

2 *mathecole@ssrdm.ch*

Joyeux anniversaire Olga !

Michel Brêchet

Enseignant au Collège de Delémont et formateur HEP BEJUNE

La rubrique LABO-MATHS du numéro 219 d'avril 2013 de votre revue préférée présente la situation de recherche « Trapézoïdons ! », dans laquelle interviennent notamment les notions de figures géométriques planes, de périmètre et d'aire ainsi que celle de fonction. Intéressé par ses potentialités, notamment par les multiples domaines mathématiques auxquels elle touche, je l'ai proposée à une classe jurassienne à exigences élevées de 10e HarmoS[1]. Notons au passage qu'une telle situation convient parfaitement à tous les types de classes.

Ne souhaitant pas y consacrer plus de 3 leçons, étendue du programme oblige, je l'ai reformulée de façon à la rendre un peu moins ouverte, à accroître en quelque sorte le balisage de la route à suivre, afin d'éviter que les élèves ne s'égarent sur d'innombrables chemins de traverse. Bien entendu, il ne s'agit pas de remettre en question le bienfondé des activités ouvertes, qui gardent toute leur pertinence dans l'enseignement des mathématiques. L'intention était notamment de renforcer les connaissances des élèves au sujet des figures géométriques usuelles (triangles, quadrilatères, polygones réguliers) par le biais d'une activité plaisante et inédite, et non de travailler prioritairement sur les démarches d'investigation. L'énoncé proposé aux élèves est sur la page suivante.

1 *Élèves de 13-14 ans.*

Joyeux anniversaire Olga !

Olga est une petite fille qui aime faire la fête ! Et c'est bientôt son anniversaire...

Elle organise un goûter dans son jardin, et invite beaucoup de monde : sa famille et ses amis.

Comme il n'y a pas assez de tables dans sa maison, elle décide d'en louer.

Olga est originale, elle choisit des tables identiques en forme de trapèze isocèle. Elle les trouve plutôt jolies.

Les trois petits côtés sont de même longueur et le grand côté mesure le double d'un petit côté.

Autour de ces tables, on peut installer une personne sur chaque petit côté et deux personnes sur le grand côté. Dans son jardin, pour qu'aucun invité ne tourne le dos à un autre, Olga veut assembler ces tables de telle sorte qu'elles forment une figure convexe.

Q1) Quelles figures géométriques particulières peut-elle former en assemblant plusieurs de ces tables ? Et combien de personnes peuvent-elles prendre place autour de chacune d'elles ?

Q2) Olga : Si il y a plus de 5 personnes, alors il est toujours possible d'assembler des tables de telle façon que toutes les places soient occupées.

Hilda :Pas d'accord ! Il y a une seule exception.

L'une des deux filles a-t-elle raison ? Justifie ta réponse.

Q3) Comment Olga devra procéder pour connaître le nombre minimum de tables à louer selon le nombre de personnes présentes ?

En classe

Avant de laisser les élèves démarrer leur recherche, seuls ou par groupes de deux, nous examinons ensemble les propriétés de la figure qui représente la table, en particulier la manière de procéder pour la construire à la règle et au compas de façon efficace. Les regards se portent tout d'abord sur les longueurs des côtés du trapèze (trois petits isométriques, un grand qui est le double d'un petit), puis sur ses diagonales (isométriques) et enfin sur son axe de symétrie. Malheureusement, ces propriétés-là ne sont pas d'une grande utilité pour la construction de la figure. Les angles montrent ensuite le bout de leur nez. Quelques hésitations et tâtonnements sont alors nécessaires pour mettre en exergue que le trapèze isocèle est formé de trois triangles équilatéraux, ce qui peut sembler immédiat pour l'enseignant. En fait, la décomposition – mentale ou effective – d'une figure en sous-figures juxtaposées particulières (ici les triangles équilatéraux) implique des capacités étendues liées à la reconnaissance des figures. « Voir » une figure non tracée (et donc qui n'existe pas ?)… tout un art !

Question 1 (45 minutes)

Afin d'augmenter la productivité de leur recherche, les élèves travaillent sur des feuilles à trame triangulaire. Ils laissent tout d'abord libre cours à leur imagination pour dessiner à main levée les nombreuses figures géométriques convexes particulières issues de l'assemblage de plusieurs « tables ». La question « Qu'est-ce qu'une figure particulière ? » apparaît rapidement. En guise de réponse, je les renvoie aux rubriques de leur aide-mémoire traitant des triangles et quadrilatères remarquables ainsi que des polygones réguliers[2].

Après un premier temps de recherche durant lequel personne ne reste en panne, des élèves viennent écrire au tableau les noms exacts des figures qu'ils ont représentées. J'invite dans la foulée les autres élèves à dessiner toutes ces figures, dont la liste s'allonge au fil de la leçon. Parallèlement,

2 Il s'agit de l'aide-mémoire qui accompagne les moyens d'enseignement de mathématiques en Suisse romande pour les degrés 9-10-11. Les informations mentionnées figurent aux pages 83 pour le polygone régulier, 85 pour les triangles remarquables et 88 pour les quadrilatères remarquables.

je leur demande de varier la taille de leurs figures remarquables, d'en faire si possible des petites ou des grandes, voire de formes différentes (voir ci-dessous).

La diversité des productions est relativement étendue, ce qui est fort enrichissant. Le but est ici de revoir la dénomination exacte de certaines figures remarquables, leurs propriétés relatives aux isométries d'angles et de côtés, au parallélisme de leurs côtés, à leur(s) symétrie(s) interne(s). A ce propos, je demande encore aux élèves de représenter, le cas échéant, le (les) axe(s) de symétrie et le centre de symétrie de chaque figure.

Pour information, Olga peut former plusieurs figures géométriques remarquables, dont celles-ci :

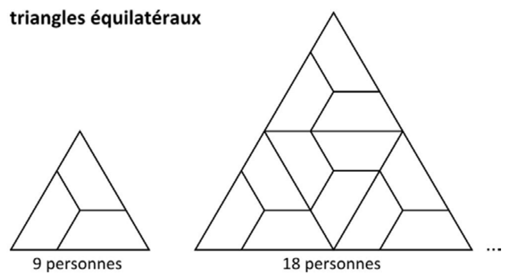


Figure 1

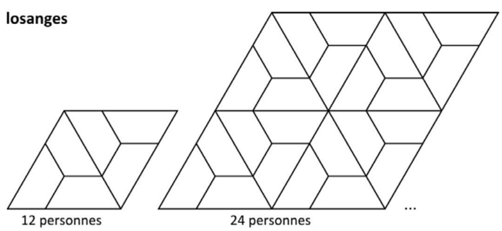


Figure 2

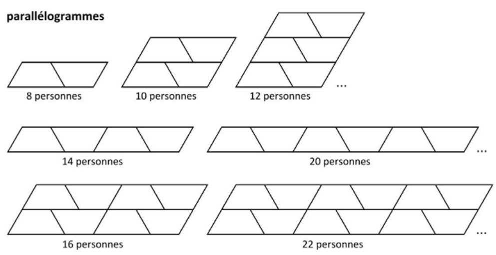


Figure 3

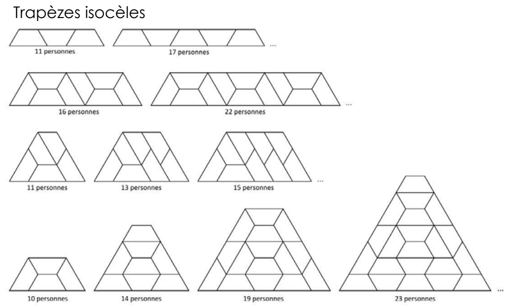


Figure 4

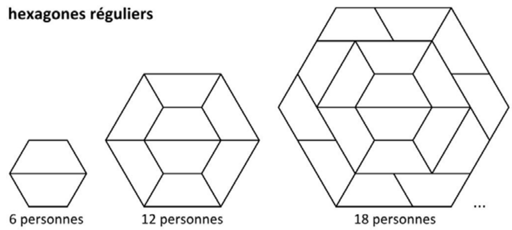


Figure 5

D'autres figures possèdent au moins un axe de symétrie. En plus des triangles équilatéraux, des losanges, des trapèzes isocèles et des hexagones réguliers présentés ci-dessus, on peut former par exemple des hexagones irréguliers :

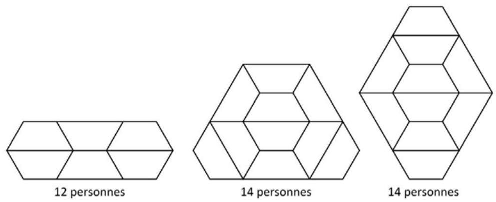


Figure 6

Question 2 (45 minutes)

Les élèves se réfèrent à leurs dessins pour apporter les premiers éléments de réponse à cette question. Ils trouvent assez vite que pour 7 personnes, il est impossible d'assembler des tables de telle sorte que toutes les places disponibles soient occupées. Olga a donc tort ! Mais comment montrer que, pour n'importe quel autre nombre de personnes, on peut toujours trouver une configuration qui convient, et donc qu'Hilda a raison ?

L'idée de trouver un algorithme d'assemblage des tables ne vient pas à l'esprit des élèves. Ils cherchent plutôt de façon désordonnée une configuration pour 8 personnes, puis pour 9 personnes, 10 personnes, et ainsi de suite. Le maître : « Et s'il y avait 47 invités, comment faire ? » Profil bas des élèves ! Quinze minutes de réflexion plus tard, sans qu'aucun résultat significatif n'émerge, je leur donne la solution pour les nombres impairs de convives (voir ci-dessus, sous trapèzes isocèles, 3e ligne), puis leur suggère de chercher du côté des parallélogrammes pour les nombres pairs. La solution est apportée par quelques élèves perspicaces et reproduite par l'ensemble de la classe (voir ci-dessus, sous parallélogrammes, 1ère ligne). C'est donc bel et bien Hilda qui a raison.

Question 3 et prolongement (45 minutes)

Minimiser le nombre de tables revient à chercher des figures convexes d'aire minimale et de périmètre maximal.

On obtient alors la suite de figures ci-contre :

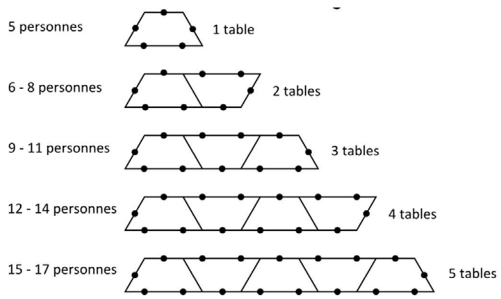


Figure 7

Cette phase ne présente pas trop de difficultés. Elle est réussie par bon nombre d'élèves.

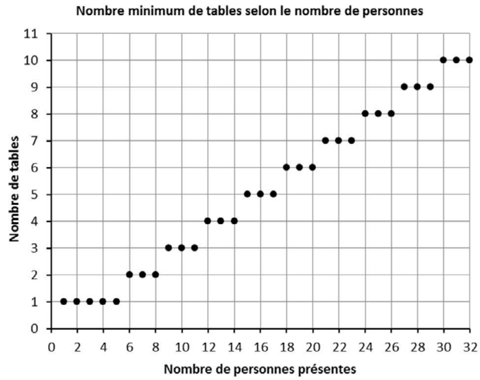
Vient ensuite le calcul à effectuer. Comme les multiples de trois font signe (2 tables → <u>6</u> à 8 personnes, 3 tables → <u>9</u> à 11 personnes, 4 tables → <u>12</u> à 14 personnes…), j'observe à plusieurs reprises la règle suivante (formulée en langage élève) :

> *On fait moins 2 au nombre de personnes, on divise par 3 et on prend le nombre entier qui vient tout de suite après, sauf si on a déjà un nombre entier.*

Et ça marche ! Je leur demande tout de même d'écrire « ma » règle, qui me paraît plus « claire » :

> *Pour connaître le nombre minimum de tables à louer selon le nombre de personnes présentes, Olga devra prendre le tiers du plus grand multiple de trois inférieur ou égal au nombre de personnes (supposé supérieur à 2).*

En guise de prolongement, sous ma conduite, chaque élève représente par un diagramme cartésien le nombre minimum de tables à louer selon le nombre de personnes présentes. Une telle représentation - bien différente de celles réalisées habituellement - aide à comprendre la situation (voir ci-dessous).



Et pour terminer on s'intéresse encore à la fonction qui donne le nombre maximum de personnes en fonction du nombre de tables, à savoir la fonction $x \rightarrow 3x + 2$ ($x \in \mathbb{N}^*$), qui est mise en exergue à la suite de la réalisation d'un tableau de valeurs.

En guise de synthèse

Originale et inhabituelle, cette situation a entre autres permis à tous les élèves d'être constamment actifs, d'éprouver puis d'ajuster leurs idées. Elle n'a guère appelé d'incitations au travail de ma part et s'est déroulée quasiment sans temps mort. Elle a débouché sur un large panorama de figures géométriques planes - à propos desquelles les élèves ont pu revoir les propriétés -, sur les notions de minimisation (de l'aire) et de maximisation (du périmètre), sur une belle petite recherche dans le domaine numérique ainsi que sur la bizarrerie de fonction « en escalier ».

Et si vous la proposiez à vos élèves ?

Pourquoi la géométrie est devenue l'espace ?

Laura Weiss

Université de Genève

Introduction

Le plan d'études romand (PER), introduit en 2011 pour les trois cycles d'enseignement obligatoire, structure les contenus notionnels des mathématiques en quatre grands chapitres : *Espace, Nombres, Opérations et Grandeurs et mesures*. A l'école primaire, les objectifs d'apprentissage concernant l'Espace, dont on remarquera qu'il est le premier du réseau d'objectifs, sont formulés de la façon suivante : pour le premier cycle (enfants de 4 à 8 ans), il s'agit d'« *explorer l'espace* », pour le deuxième (enfants de 9 à 12 ans) de « *poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace* ». Ce domaine se décline au premier cycle en « *figures et transformations géométriques* », qui sont séparées au deuxième cycle, et « *repérage dans le plan et dans l'espace* » qui garde son intitulé. L'autre chapitre, qui faisait traditionnellement partie de la géométrie, à savoir la mesure et le calcul des grandeurs d'où le suffixe « métrie », n'arrive qu'en 4e position, peut-être pour mieux le distinguer de l'*Espace*. Les objectifs d'apprentissage « *Comparer et sérier des grandeurs* », puis « *Utiliser la mesure pour comparer des grandeurs* », ne mentionnent d'ailleurs pas prioritairement les dimensions de l'espace.

Ces objectifs découpent selon une certaine logique des contenus qui auparavant appartenaient tous à la géométrie. Quand cette modification a-t-elle eu lieu ? Dans quel but ? Cela permet-il un meilleur enseignement-apprentissage de ces objets ? Conscients qu'il ne nous est pas possible de répondre à la dernière de ces questions, nous pensons cependant intéressant d'explorer l'enseignement de l'espace du temps où il s'appelait géométrie, en particulier dans le canton de Genève.

Corpus et methode d'analyse

Notre recherche pourrait être caractérisée de « *didactique historique* » par Bishop (2010). En effet, nous avons recherché les plans d'études et programmes (PE) genevois de mathématiques de l'Ecole primaire (EP) en ayant pu remonter jusqu'en 1867, d'où le terme historique. Mais comme nous nous intéressons aux contenus, et si possible aux démarches d'enseignement, cette recherche appartient aussi au champ de la didactique. La période parcourue part de la fin du XIXe siècle pour arriver au dernier PE avant le PER actuel. Au vu du nombre d'années et de la difficulté à trouver ces documents, nous travaillons par « carottage », en analysant l'enseignement prescrit de la géométrie à différents moments.

Comme nous nous basons sur des documents officiels, nous ne prétendons pas brosser le tableau de ce qui était effectivement enseigné dans chaque classe avec ses caractéristiques propres, ses degrés uniques ou multiples et encore moins de ce qui était réellement appris par chaque élève avec ses difficultés spécifiques, mais bien présenter ce que la direction de l'enseignement primaire considérait devoir faire partie d'un programme de mathématiques préparant les élèves à entrer dans les multiples écoles du secondaire inférieur[1], puis après son unification, au cycle d'orientation. C'était ensuite de la responsabilité de chaque enseignant, sous le contrôle des inspecteurs et en s'appuyant sur les manuels scolaires rédigés souvent à Genève par des mathématiciens enseignants secondaires, de suivre ces prescriptions en adaptant son enseignement à ses élèves par la transposition didactique interne (Chevallard, 1985).

Notre analyse des PE se fait à plusieurs niveaux. D'abord, nous relevons les degrés concernés par l'enseignement de la géométrie, la durée hebdomadaire qui lui est accordée, les contenus d'enseignement à travers des intitulés des sujets. D'une année à l'autre ou d'une période à l'autre, nous

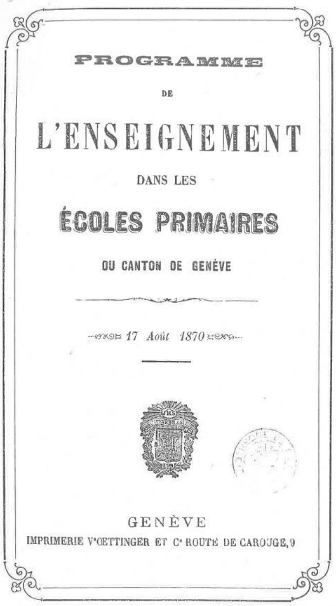
1 Le secondaire inférieur regroupait jusqu'en 1969 plusieurs institutions différentes selon le sexe, les ambitions scolaires et le lieu d'habitation des élèves, ville ou campagne.

notons les changements. A un niveau plus fin, nous tentons de dégager les finalités de cet enseignement. Nous prenons note des liens proposés avec d'autres disciplines, qui permettent aussi de comprendre le type d'enseignement prescrit. Nous cherchons ainsi à catégoriser « quelle géométrie pour quel âge ? ».

La fin du XIXe siècle et le début du XXe

En 1867, la géométrie n'est pas une branche mentionnée à part. Elle apparaît dans le programme du 6^{e} degré sous l'intitulé « *Arithmétique* » : « *Toisé*[2]*, notions élémentaires de géométrie appliquée à la mesure des surfaces et des solides – Lignes, angles, figures* ».

En 1870, elle a gagné le statut de branche scolaire enseignée à partir de la 5^{e}[3] primaire, mais tient en une seule ligne : « *Lignes, angles, Figures. Mesure des surfaces planes* ». Pour la 6^{e}, le programme indique « *Notions élémentaires de géométrie appliquée à la mesure des surfaces et des volumes; applications à l'arpentage* ». A l'époque, il n'y a pas d'indication du temps hebdomadaire à lui accorder.



PROGRAMME

DE

L'ENSEIGNEMENT

DANS LES

ÉCOLES PRIMAIRES

DU CANTON DE GENÈVE

17 Août 1870

GENÈVE

IMPRIMERIE Vᵉ ŒTTINGER ET Cᵉ ROUTE DE CAROUGE, 9

2 Mesures et calculs de dimensions.

3 Actuelle 7^{e} HarmoS (élèves de 10-11 ans). Nous gardons les dénominations de l'époque.

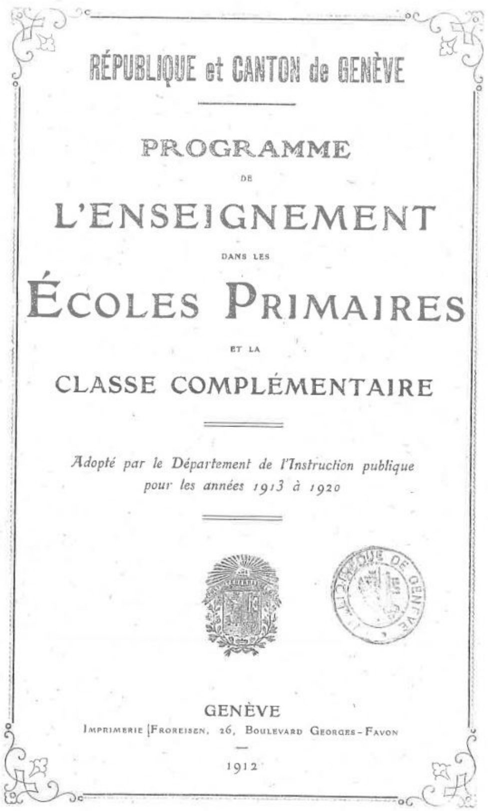
Bien que ces prescriptions soient très concises, elles montrent que la géométrie est ici essentiellement assimilée à la mesure de l'espace (longueurs, aires et volumes). Toutefois, sa « descente » en 5^{e} et sa séparation de l'arithmétique montrent qu'elle a gagné de l'importance. Une autre branche est apparue dans le PE en 1870, c'est le dessin qui prévoit dès la 3^{e} le « *Tracé des lignes et des angles. Figures élémentaires* » pour continuer en 4^{e} avec « *Figures géométriques tracées d'après le modèle graphique, à main levée, sans règle ni compas. Combinaison de ces figures* » et progresser encore en 5^{e} et 6^{e} où il est prévu « *Dessin des figures géométriques* » sans autre précision. Sans que cela soit de la géométrie de construction aux instruments, le dessin vient ici apporter complément à la géométrie.

Vingt ans plus tard (1893), les élèves ont un programme de géométrie très chargé : elle est prescrite dès la 3^{e} primaire et jusqu'à la 6^{e} à raison de 2h par semaine sur un total de 30 heures hebdomadaires d'école. De plus, déjà en 2^{e}, il est fait mention de « *notions de géométrie* » intégrées aux 6 leçons d'une demi-heure de dessin, comme « le *point, la ligne horizontale et verticale, les figures géométriques les plus simples* » dont l'étude doit se faire à l'aide d'objets concrets. En 3^{e} année, les élèves apprennent « *le tracé et l'explication du triangle, du carré et du rectangle* ». La géométrie comprend toujours la mesure qui est indiquée explicitement « *la mesure de ces deux dernières figures* », sans précision s'il s'agit de l'aire ou du périmètre[4], mais probablement la première. En 4^{e}, le programme ajoute aux triangles « *les quadrilatères et la construction de ces figures* », introduisant implicitement les techniques d'utilisation des instruments et une autre facette de la géométrie : la construction. En 5^{e} le programme est encore plus complet avec les « *tracé et mesure des polygones réguliers, irréguliers et du cercle* » et l'introduction des solides, « *cube, paral-*

4 La confusion persiste dans la langue française entre la ligne polygonale fermée et la surface comprise dans cette ligne pour les polygones, à la différence du cercle dont les termes « circonférence » avant les années soixante pour la ligne et disque aujourd'hui pour la surface permettent de distinguer ces deux concepts.

lélépipède, leur surface et leur volume; prisme, cylindre pyramide et cône, leur surface ». Enfin en 6e, on trouve le « *développement des surfaces* » et la « *construction de ces développements* ». Le programme ajoute encore les « *solides tronqués par un plan parallèle à la base* » et de « *nombreuses applications pratiques* ». Les élèves ont donc étudié non seulement les formes géométriques, mais leur construction et par conséquent au moins quelques-unes de leurs propriétés.

En 1913, le programme a été augmenté et des précisions sont ajoutées. D'abord, l'intitulé est devenu « *géométrie et travail constructif* » et en 5e et 6e, il est différencié selon le sexe, les filles n'ayant qu'une heure par semaine de géométrie, alors que les garçons en ont deux. Cette différenciation sexuée existe aussi pour le dessin dès la 1ère primaire, les garçons devant pratiquer le dessin pendant trois heures alors que les filles ne bénéficient que de deux heures, comme pour l'écriture en 1ère et 2e. Si pour l'écriture nous supposons que la meilleure motricité fine des filles leur permet de progresser plus rapidement que leurs camarades, nous supposons que l'heure supplémentaire de géométrie est une différenciation voulue pour mieux préparer les garçons aux métiers manuels. Ensuite, les instruments sont mentionnés : rapporteur pour la mesure des angles, et compas, règle, équerre et rapporteur pour la construction des figures (triangles et quadrilatères) en 3e et la « *construction de rectangles équivalents à ces diverses figures* » qui prépare les calculs d'aires. Les garçons doivent aussi faire du travail constructif avec le cube et le parallélépipède, « *coupe, développement et construction de ces solides* ». En 4e, les garçons, qui apprennent parallèlement la perspective cavalière en dessin, continuent le travail constructif et le développement des solides, y compris celui du cylindre. Garçons et filles apprennent à tracer la « *circonférence* » et « *sa division en 4, 6 et 8 parties pour la construction du carré, de l'hexagone et de l'octogone* » et étudient les « *polygones réguliers inscrits* ». Les aires des polygones réguliers sont calculées en déterminant « *graphiquement*[5] » les apothèmes[6]. Enfin en 6e, les filles complètent ce qu'elles n'ont pas vu précédemment pour les développements, les aires et les volumes, alors que les garçons étudient les aires des polygones irréguliers, le développement et l'aire de la pyramide et du cône, et leur volume[7]. A la campagne les garçons font en plus des « *exercices de toisé et de cubage d'après des mesures prises sur place* ».


RÉPUBLIQUE et CANTON de GENÈVE

PROGRAMME

DE

L'ENSEIGNEMENT

DANS LES

ÉCOLES PRIMAIRES

ET LA

CLASSE COMPLÉMENTAIRE

Adopté par le Département de l'Instruction publique pour les années 1913 à 1920

GENÈVE

Imprimerie Froreisen, 26, Boulevard Georges-Favon

1912

Plan d'étude de 1912

La géométrie à cheval entre les deux siècles se concentre donc sur la définition des formes géométriques, leur mesure (aires et volumes) et leur construction aux instru-

5 *Nous l'interprétons par mesure de la longueur sur un dessin à l'échelle.*

6 *L'apothème est la hauteur des triangles isocèles qui composent un polygone régulier. Elle permet de calculer l'aire du polygone.*

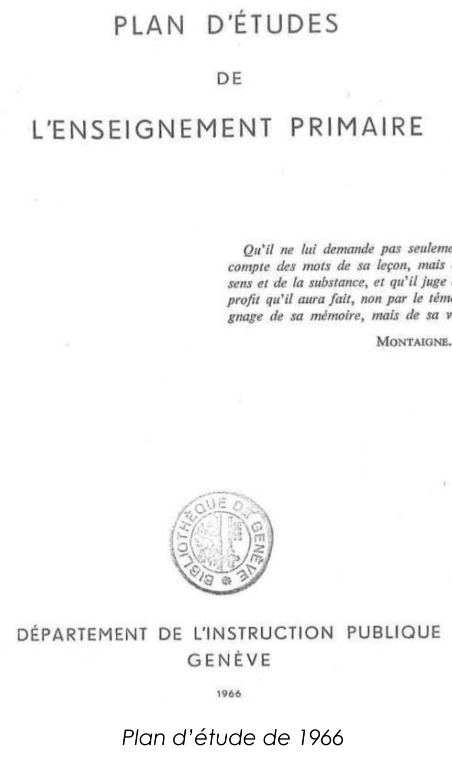
7 *Avec le PER, c'est en 11e HarmoS (élèves de 14-15 ans) que sont étudiés développements et cylindre et pyramide, le cône et sphère ne devant qu'être reconnus.*

ments. Les propriétés des objets de géométrie ne sont pas explicitement mentionnées, mais elles sont nécessaires pour la construction. Nous ne pouvons qu'être impressionnés par la quantité de matière que comportent ces PE pour des enfants aussi jeunes.

Le milieu du XXe siècle

En 1951, est réédité le plan d'études épuisé de 1942. La géométrie est toujours une branche séparée de l'arithmétique et n'est, à nouveau, enseignée qu'à partir de la 5e, pendant une heure hebdomadaire pour les filles et les garçons. Ce PE est enrichi de commentaires sur les disciplines. Pour la géométrie, il est rappelé à l'enseignant d'initier la géométrie déjà dans les petites classes, à travers des comparaisons avec des objets du monde concret, mais il s'agit surtout de la mesure et de l'estimation de celle-ci. Pourtant le programme, donné par trimestre, comporte en 5e les définitions des objets (ligne, point, angles, perpendiculaires, parallèles), la construction des angles et leur mesure, des quadrilatères et l'observation de leurs propriétés et des triangles ; en 6e l'étude des différents triangles et la somme des angles ; la construction du trapèze ; la construction de l'hexagone et de l'octogone. En 7e[8], le PE prévoit les droites remarquables du triangle et le développement du parallélépipède et du cube.

Quinze ans plus tard (1966), un nouveau changement a lieu : arithmétique et géométrie se rapprochent dans la mesure où la durée hebdomadaire d'étude de ces deux sous-disciplines (qui ne sont pas encore appelées collectivement mathématiques[9]) est indiquée globalement : 3h15 en 2e et 3e années, 3h45 de la 4e à la 6e[10]. Les contenus sont précédés d'un texte qui explique l'objet de la géométrie et comment elle doit être enseignée. On retrouve l'insistance sur les « *jeux éducatifs* » d'observation et de comparaison « *des volumes, des surfaces et des lignes* » dès les petits degrés, l'enseignement systématique ne commençant toutefois qu'en 5e année. Sont alors mis en valeur « *les connaissances* », « *le sens de l'exactitude* », « *l'observation* », « *la réflexion* », « *le choix des éléments permettant la reproduction des formes* », mais toujours à partir d'« *activités sensorielles et manuelles* ». Le PE propose aussi « *d'habituer les élèves à utiliser un croquis pour traduire l'énoncé d'un problème* ». Certains contenus sont abordés déjà en 5e année, comme les angles et la bissectrice, la perpendiculaire et la distance d'un point à une droite, la symétrie axiale et les « *caractères généraux des quadrilatères* ». Les « *caractères généraux des triangles* », les triangles particuliers, les polygones réguliers et le cercle sont traités en 6e.


PLAN D'ÉTUDES

DE

L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

Qu'il ne lui demande pas seulement compte des mots de sa leçon, mais du sens et de la substance, et qu'il juge du profit qu'il aura fait, non par le témoignage de sa mémoire, mais de sa vie.

MONTAIGNE.

DÉPARTEMENT DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
GENÈVE

1966

Plan d'étude de 1966

Par rapport au début du siècle, on constate l'absence de l'étude des solides, mais en

8 *La 7e regroupait à l'époque toutes les filles et les garçons qui n'étaient pas entrés au collège inférieur (3 premières années du collège, élèves de 13 à 15 ans).*

9 *Le terme mathématique apparaît dans les PE qui sont édités après la généralisation de la réforme des « maths modernes ». Le choix du singulier veut mettre en évidence qu'il n'y a qu'une seule mathématique, unifiée grâce aux travaux de Hilbert et à l'entreprise Nicolas Bourbaki.*

10 *Avec l'ouverture du Cycle d'Orientation (CO), l'EP compte 6 années pour tous les élèves.*

revanche la mention nouvelle de la symétrie axiale. Les « *caractères généraux* » des figures font référence aux propriétés et dans cette mesure peuvent être considérés comme une initiation à la géométrie théorique. Enfin, dans ce PE il n'y a encore aucun signe des mathématiques ensemblistes enseignées au CO à la même époque[11].

L'avènement de la mathématique moderne

En 1971, le Service de la recherche pédagogique publie un rapport (Hutin, 1971) *L'enseignement de la mathématique. Année scolaire 1969-1970,* dans lequel est décrite la « *vaste expérience devant aboutir à une réforme profonde de l'enseignement de la mathématique dans les écoles enfantines et primaires genevoises* » (p.1). Dans la définition du programme on trouve déjà pour la deuxième enfantine l'expression : « *exploration de l'espace* » à côté d'« *ensembles et relations* » et « *idée de nombre* ». En 1ère, cela devient « *découverte de l'espace* » avec « *notion de voisinage et de position* », « *domaines et frontières* », « *déplacements sur un réseau* » et « *formes géométriques simples* », contenu plus proche de celui du PER que des PE précédents. En 2e, on trouve des « *exercices de topologie* », « *déplacements* », « *formes géométriques* », « *initiation à la mesure* ». En 3e sont ajoutés des « *jeux de symétrie, rotation et translation* » et l'« *étude des formes géométriques régulières* ». La mesure des surfaces, longueurs et volumes arrive en 4e avec, à propos des formes géométriques simples, les « *rabattements, développements et enveloppements* » et en 5e il est prévu de prolonger le travail fait en 4e toujours sous la dénomination découverte de l'espace[12]. Si la géométrie, sous sa nouvelle dénomination espace, est étendue à des concepts de topologie, de repérage et de transformations du plan, ce qui l'enrichit. On remarquera toutefois que les exercices produits par les enseignants après expérimentation sont regroupés en trois fascicules : « *ensembles et relations* », « *numération* » et « *opérations* », l'espace ne faisant pas encore l'objet d'exercices ad hoc. Justement pour la 5e, une tentative d'utilisation du manuel de Dienes, *La géométrie par les transformations* (1969), n'a pas donné satisfaction et sera remplacé par une brochure élaborée spécifiquement pour le programme romand. En effet, Genève ayant « exporté » cette mathématique moderne, une première série de manuels romands, et non plus genevois, va être publiée, graduellement, entre 1971 et 1979.

En 1972, est édité le livre de Burdet[13], *Mathématique de notre temps à l'usage du corps enseignant*, qui synthétise les notions proposées en formation continue aux enseignants. Dans l'introduction, les résultats des apports scientifiques du XIXe siècle sont résumés dans les « *trois structures fondamentales des mathématiques : algébriques, d'ordre et topologiques* » (p.7). Sa troisième partie concerne la topologie, qu'il compare à la géométrie traditionnelle (géométrie euclidienne) :

> *La géométrie traditionnelle est avant tout quantitative. Elle s'occupe des dimensions des objets : distance, longueur, aire, etc. La topologie au contraire est essentiellement qualitative. Elle fait abstraction de toute idée de mesure et s'intéresse aux rapports de position et d'inclusion entre les objets. (Burdet 1972,p.140)*

D'autres qualités de l'enseignement de la topologie à de jeunes enfants sont soulignées :

> *Ces activités [sur les propriétés des figures indépendantes des longueurs et des*

11 Cependant en 1966 une dizaine d'écoles primaires sont en expérimentation de la « mathématique moderne » avec des enseignants volontaires formés par Ch. Burdet, mathématicien enseignant au collège (début de l'expérimentation en 1ère à la rentrée 1965). (Entretiens avec Mme Bernet, enseignante expérimentatrice et avec M. Burdet, mathématicien formateur que nous remercions vivement de leur disponibilité).

12 En 1969-70, le nouveau programme n'est pas encore arrivé en 6e.

13 Initialement instituteur, Ch. Burdet a étudié les mathématiques qu'il a ultérieurement enseignées au Collège. Au moment de la réforme des maths modernes à Genève, il a été chargé de la formation des enseignants primaires. Il a fini sa carrière comme directeur du Collège pour adultes et représentant genevois dans diverses commissions nationales à propos de l'enseignement des mathématiques.

formes] ne sont pas dépendantes de tracés géométriques et de l'emploi d'instruments qui peut présenter un obstacle, lorsque la précision des constructions est indispensable à la découverte des propriétés géométriques. (Burdet 1972, p142)

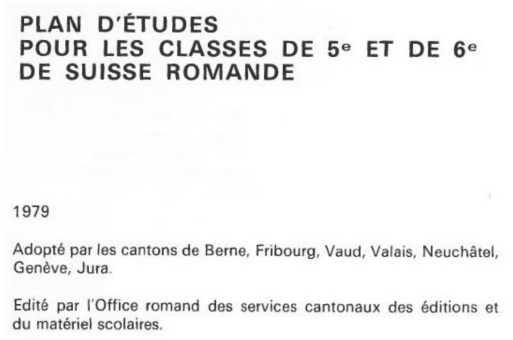
Parmi les exemples d'exercices pour découvrir ce nouveau domaine des mathématiques pour les instituteurs, on trouve des classiques de la topologie comme les ponts de Koenigsberg et le coloriage des cartes (voir exercices dans ce numéro).

Nous avons ainsi trouvé une première réponse au questionnement initial : la géométrie est devenue espace quand des concepts de topologie ont été introduits dans le programme d'enseignement de l'école primaire à la fin des années 60, à la suite du grand chamboulement des mathématiques modernes. Toutefois à l'école primaire, l'introduction des « maths modernes » n'a pu se faire que graduellement, puisqu'elle nécessitait la formation des enseignants, au contraire du cycle d'orientation qui les a adoptées dès sa création en 1962, entre autres en engageant des enseignants belges déjà formés dans ce domaine.

Les plans d'études romands

En 1979, la Conférence des chefs de départements de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP) adopte le PE romand proposé par la Commission Intercantonale Romande pour la Coordination de l'Enseignement pour les classes 5e et 6e (CIRCE II) après l'adoption de CIRCE I pour les 4 premiers degrés primaires. Les mathématiques ensemblistes sont cette fois bien présentes avec leur formalisme, mais la géométrie reste mentionnée comme suite à la « *Découverte de l'espace* » des petits degrés.

En 1986, les PE de CIRCE I et CIRCE II sont revus par le Groupe d'étude Romand pour l'Aménagement des Programmes (GRAP), afin de définir « *les acquisitions essentielles dans les programmes pour assurer un passage harmonieux d'un degré à l'autre* » (p. 1). La mathématique est découpée en 8 chapitres dont 4 concernent, bien que non nommés explicitement, la géométrie et



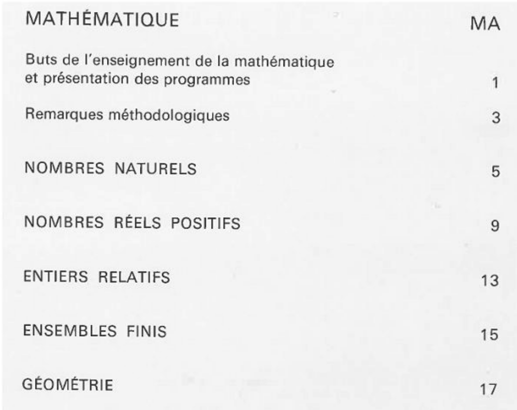
PLAN D'ÉTUDES
POUR LES CLASSES DE 5e ET DE 6e
DE SUISSE ROMANDE

1979

Adopté par les cantons de Berne, Fribourg, Vaud, Valais, Neuchâtel, Genève, Jura.

Edité par l'Office romand des services cantonaux des éditions et du matériel scolaires.

Plan d'étude de 1979



MATHÉMATIQUE	MA
Buts de l'enseignement de la mathématique et présentation des programmes	1
Remarques méthodologiques	3
NOMBRES NATURELS	5
NOMBRES RÉELS POSITIFS	9
ENTIERS RELATIFS	13
ENSEMBLES FINIS	15
GÉOMÉTRIE	17

Chapitres de mathématique du plan d'études pour les classes de 5e et de 6e de Suisse romande (1979)

l'espace : chapitre « *repérage et systèmes de coordonnées* » qui fait le lien entre topologie et numérique pour « coder » les positions dans un quadrillage ; chapitre « *formes géométriques* » qui prévoit de manipuler, décrire, comparer, représenter, construire des figures planes et des solides ; chapitre « *transformations géométriques* » qui part de l'idée de « mouvement » d'objets pour arriver à « penser ces mouvements comme des objets en soi » ; chapitre « *mesurage et mesure* » qui comprend les unités de mesure et leurs conversions, l'estimation et les calculs des aires et volumes. Les notions citées sont classées selon le degré scolaire en trois catégories : sensibilisation, fondamentum, développements.

En 1997, un nouveau PE romand de mathématiques est publié par COROME[14] sous

14 COmmission ROmande des Moyens d'Enseignement. Elle sera dissoute en 2000.

la forme d'une brochure d'une dizaine de pages, le « petit bleu ». En réalité, il ne présente pratiquement pas de différences avec le GRAP de 1986 pour l'organisation et les contenus, sauf l'adjonction de finalités plus précises. Là aussi il n'y a plus de titre regroupant d'une part le numérique (l'arithmétique d'avant les mathématiques ensemblistes) et d'autre part le géométrique. Cependant, il est intéressant de noter que pour les formes géométriques, on retrouve cité le développement de la motricité fine « *en lien avec les activités créatrices, l'écriture et le dessin* » déjà présent dans les PE du XIXe siècle. Trois ans plus tard, l'école primaire genevoise complète ce PE par des Objectifs d'apprentissage (DIP, 2000) qui, en toute fidélité avec le PE romand de 1997, proposent un texte de cadrage et surtout des productions d'élèves illustrant l'évaluation des différents sujets à traiter en classe. Mais le besoin d'harmonisation de l'enseignement au niveau suisse est ressenti de plus en plus, ce qui aboutit, au début du nouveau millénaire, à la décision de produire un plan d'études romand pour toutes les disciplines : le PER est ainsi mis en œuvre dès la rentrée 2011 à Genève. Toutefois si le PER peut être considéré comme révolutionnaire pour certaines disciplines, ce n'est que peu le cas pour les mathématiques, surtout du point de vue de leur structure. Cette discipline était effectivement romandisée depuis 40 ans et avait vécu une vraie révolution dans les années 70, suivie d'une lente contre-réforme avec suppressions (par exemple des bases) et élagage des propositions dienesiennes (transformations abstraites).

Conclusion

Ce qu'on peut remarquer en ce qui concerne les contenus de ces PE de la fin du XXe siècle pour la partie géométrie, c'est leur faible variabilité au cours des années. En effet, si les notions d'ensembles et de relations ont été graduellement abandonnées après quelques dizaines d'années de pratique, la révolution des mathématiques ensemblistes a eu un effet important et durable sur l'enseignement de ce qu'on appelait classiquement géométrie. Non seulement de nouvelles notions ont été introduites, mais aussi un regard, plus riche sur l'espace, a été développé, encore élargi par l'idée de modélisation, nouveau paradigme arrivé dans les programmes de mathématiques et de sciences au début du nouveau millénaire.

Ces nouvelles notions trouvent leur origine dans d'autres domaines des mathématiques que la géométrie « classique » de l'école primaire, comme les transformations géométriques provenant du rapprochement de l'algèbre et de la géométrie des mathématiques axiomatiques, ou comme le repérage provenant de la topologie[15]. Parallèlement le domaine de la mesure en a été détaché. La géométrie, qui avait pour objets, jusqu'au milieu des années 60 à l'école primaire, les triangles, les quadrilatères, le cercle, les polygones, les solides etc. et leur mesure, à savoir des concepts créés à partir d'objets concrets du monde réel, s'est vue complètement transformée. Le changement de nom s'en trouve entièrement justifié.

Références

Bishop, M.-F. (2010). Didactique et perspective historique : à propos d'une recherche sur les écritures de soi à l'école. *Revue Pratiques*, 145-146, 231-248.

Burdet, Ch. (1972). *Mathématique de notre temps à l'usage du corps enseignant*. Lausanne : Payot.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dienes, Z. P. (1969). *La Géométrie par les transformations*. Paris : O.C.D.L .

DIP (2000). *Objectifs d'apprentissage de l'école primaire genevoise*. Genève : DIP.

Hutin, R. (1971). *L'enseignement de la mathématique. Année scolaire 1969-1970*. Genève : SRP.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), (2010). *Plan d'études Romand, 1e-2e cycle, Mathématiques et Science de la nature. – Sciences humaines et sociale,* CIIP.

Plans d'étude et programmes de l'enseignement primaire, entre 1867 et 1997. Genève : DIP.

15 On peut aussi argumenter que le repérage provient de la géométrie analytique et vectorielle mais les premières notions (dedans, dehors, au-dessus, en dessous, à gauche, à droite) sont issues, elles, des premiers concepts topologiques (voir Hutin, 1971).

Des mathématiques expérimentales en route pour Londres ?

Thierry Dias[1]

HEP Vaud

Le festival international Sciences on Stage réunit tous les deux ans quelques 350 enseignants de 25 pays qui s'y rencontrent pour échanger des idées d'enseignement pour les sciences. La prochaine édition se déroulera à Londres en juin 2015 et sera une fois encore l'occasion de riches rencontres scientifiques.

En vue de la préparation de ce colloque, une sélection des projets « made in Switzerland » aura lieu le 15 novembre 2014 à Winterthur. Parmi les 15 propositions suisses retenues, celle de Thierry Dias et Jimmy Serment[2] concerne les mathématiques, ce qui témoigne de la place de cette discipline au sein du groupe des sciences expérimentales. L'un des projets, qui concerne l'élaboration de polyèdres en s'appuyant notamment sur une forte dimension esthétique, permet de faire découvrir aux élèves la géométrie sous une forme expérimentale. Il sera question de privilégier des activités relevant de la démarche scientifique faisant la part belle à l'investigation et aux découvertes inattendues.

L'atelier de pratique qui sera présenté à Winterthur proposera trois mises en situation d'apprentissage novatrices, esthétiques et ludiques :

- Le puzzle de Platon : un surprenant pavage de l'espace.
- Les « grands réguliers » : un jeu collaboratif de constructions géantes. (Image 1)
- La mystérieuse Boule-cube : une expérience origamique magique.

La manipulation des objets et l'observation des phénomènes induits permettent une construction progressive des savoirs qui s'appuie sur une dialectique épistémologique célèbre: intuition/expérience.

Lien : http://www.science-on-stage.eu

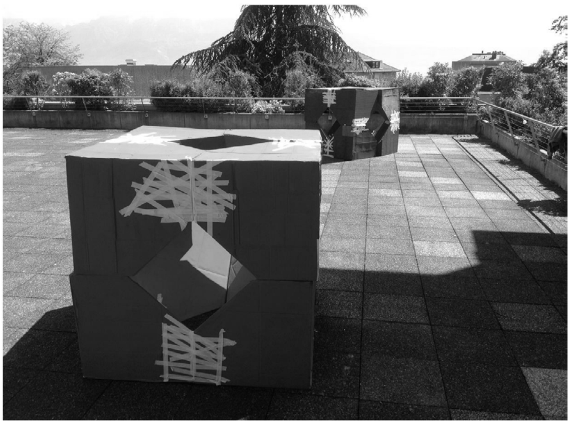


Image 1

1 Thierry Dias est formateur à la HEP Vaud et auteur de la rubrique Labo-maths dans la Revue Math-École.

2 Jimmy Serment est enseignant spécialisé dans le canton de Vaud et auteur d'un article dans la Revue Math-Ecole spécial EMF 2012 où il présente une activité de même type, c'est-à-dire novatrice, esthétique et ludique.

De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés

Marie-Jeanne Perrin-Glorian[1], Marc Godin[2]

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot et Université d'Artois

Introduction

Les recherches en didactique des mathématiques (voir par exemple Berthelot et Salin, 1994) aussi bien que l'expérience des professeurs soulignent une rupture entre la géométrie de l'école primaire où la validation des propriétés des figures se fait par des procédures matérielles à l'aide d'instruments, ce que nous appellerons géométrie physique et la géométrie du secondaire où la validation se fait par des démonstrations qui supposent la manipulation d'énoncés, que nous appellerons géométrie théorique. Par ailleurs, il faut distinguer la simple perception de la vérification de propriétés avec des instruments[3]. Trois étapes semblent ainsi se dessiner : la reconnaissance perceptive des formes et l'introduction d'un vocabulaire pour les désigner, l'identification de propriétés qu'on vérifie ou qu'on produit avec des instruments, la déduction à partir d'axiomes et de théorèmes. C'est dans le passage de la deuxième à la troisième étape qu'est souvent identifiée une rupture alors que le passage de la première à la deuxième étape semble peu questionné et l'apprentissage de l'usage des instruments souvent considéré comme l'acquisition d'une technique de manipulation. Le but du présent article est d'interroger la possibilité de penser cette évolution dans sa continuité et de proposer quelques jalons pour une approche de la géométrie permettant une progression cohérente de l'enseignement de 6 ans à 13 ans environ.

Formes et Figures planes Quelques repères

Evolution des moyens de reconnaissance des formes

La géométrie plane est l'étude (à différents niveaux) des formes planes et des figures qu'on peut tracer sur une surface plane. Mais qu'appelle-t-on figure ? Le sens qu'on peut donner à ce mot évolue au cours de la scolarité.

Au tout début de la scolarité : reconnaissance perceptive et premiers tracés de figures simples

A l'école maternelle et au tout début du primaire, on parle en général de formes géométriques pour des objets matériels qu'on peut déplacer, retourner et assembler dans des puzzles par exemple. Ce sont des objets plats de l'espace (en fait des cylindres de faible hauteur avec des bases de formes variées) qu'on peut reconnaître perceptivement par leur forme et leur taille. La géométrie permettra de caractériser de plus en plus précisément ces formes et leur taille. En utilisant ces objets comme gabarits dont on repasse le contour avec un crayon, on peut dessiner ce que nous appellerons des figures simples. La figure est ainsi la trace d'un objet matériel, une surface avec un bord ; ce bord peut présenter des points anguleux qu'on appellera sommets ; entre deux sommets, le bord peut être arrondi ou droit. De telles figures simples peuvent aussi être obtenues en traçant le contour intérieur d'un pochoir (forme évidée) ; deux objets différents (le gabarit et le pochoir dans lequel s'emboîte exactement le gabarit) laissent la même trace. On peut faire des assemblages de figures simples en utilisant plusieurs gabarits ou plusieurs fois le même gabarit, par exemple en faisant coïncider des sommets et des bords droits. On obtient ainsi des figures contenant des lignes intérieures au contour. Ces tracés et assemblages demandent le développement à la fois d'habiletés motrices et de techniques

---

1 marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr

2 marc.godin@654321.fr

3 *Les programmes de 2002 pour l'école primaire en France parlaient du passage d'une géométrie de la perception à une géométrie instrumentée.*

liées à de premières connaissances sur les objets, en particulier la reconnaissance de sommets, de bord droits, d'égalité de longueur … Nous ne développerons pas cet aspect ici. Retenons seulement que des comparaisons directes peuvent déjà être effectuées, des propriétés identifiées, en s'appuyant sur la perception. Le langage est le langage courant.

Les figures dans la géométrie théorique

Dans la géométrie du secondaire, une figure est un objet géométrique défini par des propriétés avec une axiomatique sous-jacente, même si elle n'est pas toujours explicitée. Les propriétés sont énoncées en langage mathématique ou codées sur la figure et expriment des relations entre des points et des lignes (droites ou cercles). Faire de la géométrie consiste à déduire des propriétés nouvelles à partir d'axiomes, de théorèmes et des propriétés données pour définir la figure. Formuler une preuve, argumenter, rédiger une démonstration en langage géométrique présentent des difficultés étudiées par de nombreuses recherches. Cependant, ces recherches se sont plus rarement intéressées au regard qu'il faut porter sur les figures pour trouver la solution. Il est en général nécessaire d'isoler des sous-figures, de reconnaître des sous-figures identiques dans des positions différentes, de faire intervenir des lignes ou des points qui ne sont pas donnés dans la description initiale, pas tracés sur la figure. A travers les figures matérielles qui représentent le problème, qu'elles soient tracées sur du papier ou sur un écran d'ordinateur, il faut voir les objets géométriques sur lesquels doit porter le raisonnement. Comment un tel regard géométrique sur les figures peut-il se construire ?

Entre les deux : la géométrie avec les instruments

Au cours du primaire, sont introduits progressivement les instruments usuels (règle[4], équerre, compas) pour tracer des figures et vérifier leurs propriétés, donnant ainsi des moyens de reconnaître, décrire et reproduire plus précisément des figures. Nous considérons aussi non pas les instruments de mesure (règle graduée, rapporteur) qui demandent de passer par les nombres, mais des instruments qui permettent de reporter des grandeurs sans passer par les nombres (longueurs et angles principalement) et dont nous donnerons des exemples dans la suite. En effet, l'appui sur les grandeurs géométriques nous paraît essentiel pour construire le sens des nombres ; il est donc nécessaire de les travailler directement sans passer par la mesure et donc par les nombres.

Les instruments de tracé et de report de grandeurs permettent de produire des caractéristiques visuelles des figures dont certaines se traduisent par des propriétés géométriques (par exemple angle droit, parallélisme, égalité de longueur…). Inversement, les propriétés géométriques se représentent par des caractéristiques visuelles qu'on peut produire avec des instruments. Comment peut-on concevoir l'usage des instruments pour qu'il puisse aider à passer d'un regard ordinaire sur le dessin qui représente une figure géométrique à un regard géométrique sur ce même dessin[5] ? Avant d'aborder cette question plus précisément dans le cas des polygones, revenons sur les différents regards qu'on peut porter sur une figure.

Différentes visions des figures

Le géomètre expert (le professeur de mathématiques du secondaire par exemple) est capable, suivant les questions qu'il se pose, de changer de regard sur les figures, d'y voir des surfaces en même temps que des lignes et des points, d'imaginer et de définir de nouvelles lignes ou de nouveaux points à partir de ceux qui sont déjà définis. Ce n'est pas le cas d'un élève en cours d'apprentissage. Dans la poursuite des travaux de Duval (2005), de Duval et Godin (2006), nous distinguerons trois visions des figures suivant les regards qu'on est capable

4 *Dans tout le texte, il faut entendre règle non graduée quand nous parlons de règle sans préciser.*

5 *Nous utilisons le terme dessin dans cette phrase pour bien distinguer la figure géométrique de sa représentation, que nous préférons en général appeler figure matérielle car ce n'est pas n'importe quel dessin. Dans tout le présent texte, le terme « figure » désigne un dessin qui peut s'interpréter comme une figure matérielle représentant une figure géométrique.*

d'y porter :

- Dans une <u>*vision « surfaces » des figures*</u>, on voit un assemblage de figures simples, c'est-à-dire des surfaces juxtaposées ou à la rigueur superposées. Des lignes et des points peuvent apparaître mais les lignes sont seulement des bords de surfaces, les points sont des sommets de surfaces ou, en cas de superposition, des intersections de bords. On ne peut pas créer de nouvelles lignes sans déplacer de surface. Par exemple dans la Figure 1, on peut voir trois triangles juxtaposés ou deux triangles superposés dans un quadrilatère, leurs côtés, leurs sommets.

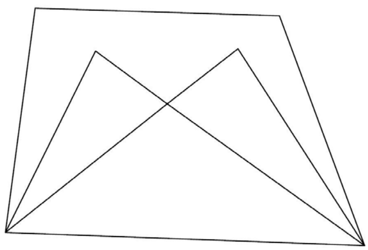


Figure 1

- Dans une <u>*vision « lignes » des figures*</u>, les lignes intérieures ont une existence propre. La figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments : la règle non graduée pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments ; le compas pour les cercles ou les arcs de cercles. Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes déjà tracées. On peut tracer des segments (voire des demi-droites ou des droites) qui relient des points déjà présents. On ne peut pas créer de nouveaux points à partir de lignes qui ne sont pas tracées. Il peut rester difficile de prolonger des lignes pour définir des points dont le lien avec la figure n'est pas direct. Ainsi, sur l'exemple (Figure 2), on voit plus ou moins de droites supports des côtés et il est difficile d'imaginer la possibilité de prolonger les côtés du quadrilatère pour obtenir leur point d'intersection. Il en est de même des côtés des triangles qui ne sont pas portés par les diagonales du quadrilatère (Figure 2).

- Dans une <u>*vision « points » des figures*</u>, on peut créer des points par intersection de deux lignes qu'on trace à cet effet et les

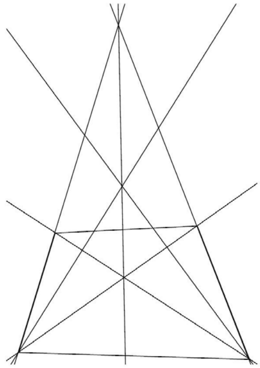


Figure 2

points peuvent définir des lignes : il faut deux points (ou un point et une direction) pour déterminer une droite, une demi-droite ; pour un segment, il faut deux points ou un point et une longueur sur une demi-droite déjà tracée ; il faut deux points pour déterminer un cercle (le centre et un point du cercle) ou un point et une longueur.

Sur l'exemple (Figure 3), on peut identifier des points qui permettent de définir les lignes : la donnée de A, B, C, D (le quadrilatère) détermine E et F. Le choix de G sur (EF) détermine les petits triangles.

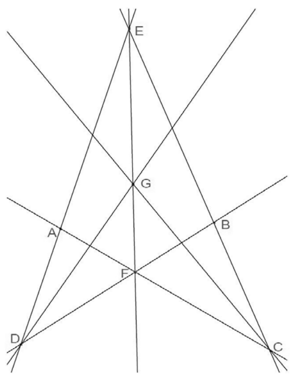


Figure 3

La vision « surfaces » est la vision première[6] des figures ; l'apprentissage de la géométrie va permettre d'enrichir cette vision naturelle d'une vision « lignes » et d'une vision « points ». Nous allons maintenant l'illustrer dans le cas de la reproduction d'un polygone.

6 Naturelle pour les adultes comme pour les enfants, sauf peut-être pour les professeurs de mathématiques !

Reconnaissance et caractérisation d'un polygone. Des jalons pour une progression

De la maternelle au secondaire, comment faire évoluer le regard sur les polygones ?

Du gabarit à la règle et au report de longueur

Avant même la scolarisation, le petit enfant peut réaliser des puzzles par encastrement à une pièce où il s'agit de loger une forme dans un trou ; il dispose alors du gabarit et du pochoir et doit reconnaître la pièce parmi d'autres et la tourner pour l'encastrer dans son logement. Si le recto et le verso ne sont pas distingués (par un petit bouton ou par une couleur), cela peut s'avérer difficile pour des pièces qui ne présentent aucun axe de symétrie (comme le parallélogramme du tangram). Considérons le moment, en début de primaire, où l'enfant sait réaliser le contour d'un gabarit ou d'un pochoir pour tracer la figure qui représente la forme et voyons comment, en jouant sur quelques variables didactiques, on peut aider l'élève à évoluer vers une vision « lignes » de la figure.

Gabarit grignoté

Une souris vient grignoter les gabarits et déchirer les pochoirs[7].

Il s'agit de reproduire une figure superposable à un modèle fourni (exemple en Figure 4) avec pour instruments ces gabarits grignotés et pochoirs déchirés.

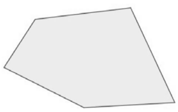


Figure 4

Les pochoirs se réduisent bientôt à une règle, c'est-à-dire une surface avec un bord droit.

- s'il manque un coin et si l'on ne dispose pas de la partie utile du pochoir (Figure 5) mais seulement d'une règle (Figure 6), il devient nécessaire de prolonger les traits pour obtenir le sommet comme intersection de deux droites (Figure 7). Mais si l'on veut obtenir le sommet sans déborder et sans gommer, un report de longueur est nécessaire (Figure 8).

7 Voir le site http://www.aider-ses-eleves.com/pour-les-5-12-ans

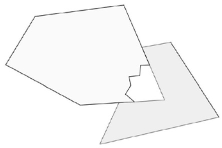


Figure 5

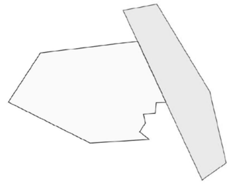


Figure 6

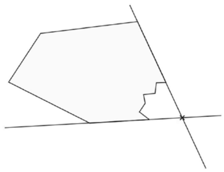


Figure 7

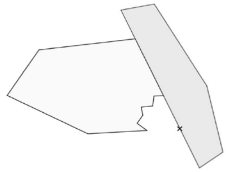


Figure 8

Nous entendons ici le report de longueur comme se faisant sur une droite déjà tracée, à partir d'un point déjà tracé, avec un instrument de report de longueur (bande de papier avec un bord droit sur lequel on peut écrire ou sur lequel il y a un repère coulissant), que nous appellerons un *réglet*. S'il n'y a pas de support droit, le report ne peut se faire dans le plan qu'avec un compas[8].

- s'il manque tout un côté du polygone, il faut reconstituer deux sommets limitant les côtés adjacents et le report de longueur devient nécessaire (Figure 9).

- s'il manque deux côtés, on peut faire deux reports de longueur pour trouver deux sommets manquants (Figure 10) mais comment trouver le troisième ?

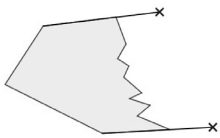


Figure 9

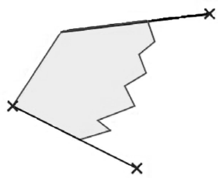


Figure 10

a) on peut trouver les directions des côtés manquants en reportant les angles (Figure 11) avec un morceau de papier : soit en le pliant, soit sans plier mais en écrivant sur le papier[9], que celui-ci soit transparent

8 Un réglet pouvant tourner autour d'une extrémité est en fait un compas ; nous y reviendrons.

9 Il serait trop long de développer ici les procédures de report des angles comme report simultané de deux directions. On peut se reporter aux différentes reproductions d'un triangle sur le site http://www.aider-ses-ele-

ou opaque…

b) on peut aussi reporter une seule direction et une troisième longueur (Figure 12).

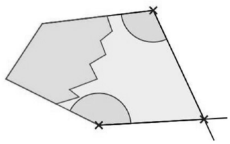


Figure 11

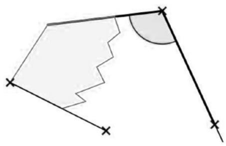


Figure 12

On peut enfin faire intervenir une ligne qui n'était pas tracée (une diagonale du polygone qui ferme le quadrilatère de la Figure 10). Il reste à construire un triangle sur cette diagonale. Ceci nous amène aux moyens de reproduire un triangle. Nous le ferons en passant d'abord par l'étude du carré.

Des figures particulières

On peut utiliser les propriétés des figures pour les reproduire plus facilement. Prenons l'exemple du carré : s'il manque tout un côté (Figure 13), on peut tracer un côté et les supports de deux autres et restaurer le carré en faisant pivoter le gabarit et en l'appuyant sur le côté déjà tracé et le support d'un autre (Figure 14).

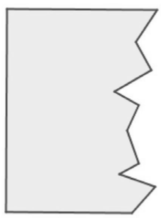


Figure 13

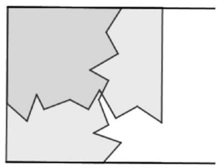


Figure 14

S'il reste un seul coin et aussi des morceaux de bords parallèles (Figure 15), on peut encore pivoter le gabarit et l'appuyer sur des lignes déjà tracées pour restaurer le carré (Figure 16).

S'il ne reste qu'un coin sans morceaux de bords parallèles, il devient nécessaire de faire des reports de longueur : après un premier report de longueur, un pivotement du gabarit et un deuxième report de longueur (Figure 17), on peut faire un deuxième pivotement ou un troisième report pour terminer.

On arrive ici à la construction classique du

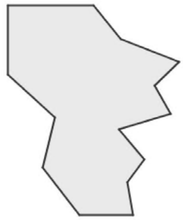


Figure 15

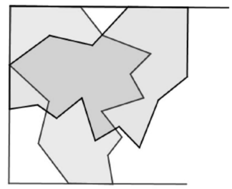


Figure 16

carré avec une équerre et un gabarit de longueur qui peut être remplacé par une règle graduée si l'on introduit les mesures et donc les nombres.

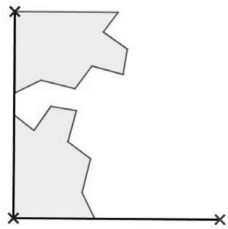


Figure 17

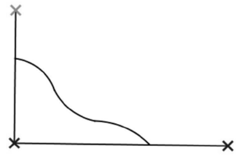


Figure 18

L'équerre est en effet un gabarit d'angle droit (un coin de carré) tout fait. Celles du commerce sont en fait des triangles rectangles : travailler d'abord avec un gabarit en carton avec un troisième côté déchiré aide à localiser l'angle droit. On est alors capable de reproduire un triangle rectangle avec une équerre et un outil de report de longueur pour les côtés de l'angle droit (Figure 18).

Retour au polygone quelconque

Quand on sait reproduire un triangle rectangle, on peut reproduire un triangle quelconque avec des reports de longueur et une équerre en le découpant en deux triangles rectangles (Figure 19) et donc un polygone quelconque en le décomposant en triangles (Figure 20). Il faut pour ces décompositions disposer de ce que nous avons appelé une vision « lignes » des figures puisqu'il faut faire intervenir des lignes qui ne sont pas des bords des surfaces à reproduire.

Nous disposons ainsi de deux manières de reproduire un polygone quelconque avec trois instruments : une règle non graduée, un instrument de report de longueur et soit un instrument de report des angles

---

ves.com/pour-les-5-12-ans

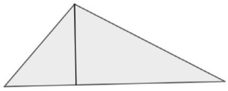


Figure 19

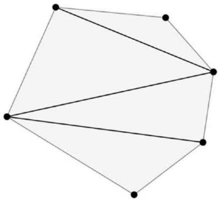


Figure 20

(Figures 11 et 12) soit une équerre (Figures 19 et 20). Dans le premier cas, une vision « surfaces » du polygone suffit : on reproduit son contour ; dans le second cas, une vision « lignes » est nécessaire : il faut créer de nouvelles lignes, des diagonales du polygone. Pour une construction à la règle et au compas auquel nous nous intéressons dans le paragraphe suivant, il faut disposer d'une vision « points ».

Du compas instrument pour tracer des cercles au compas instrument de report de longueur

Pour tracer un cercle avec un compas, on choisit deux points : un point où placer la pointe, un point où placer la mine ou bien un point et un écartement des branches. Dès que leur habileté motrice est suffisante, les élèves peuvent tracer des cercles avec un compas de cette manière mais, en fin de primaire (11ans), il ne réalisent pas nécessairement encore que cet écartement correspond à une longueur non matérialisée, la distance entre la mine et la pointe. On peut le vérifier en proposant aux élèves les deux situations réciproques suivantes :

- Placer une grande quantité de points à une distance donnée d'un point donné.

- Reconnaître dans un nuage de points ceux qui sont sur un même cercle de centre donné sans utiliser le compas.

Dans le premier cas, les élèves placent plusieurs points avant d'utiliser le compas pour tracer le cercle ; dans le second cas, ils sont bloqués et ne voient pas comment une règle graduée ou une bande de papier pourrait les aider. En effet, pour relier l'écartement des branches à la distance entre deux points, il faut voir des points sur la circonférence. L'explicitation du lien entre cercle et distance est nécessaire pour que le compas puisse être vu comme un instrument de report de distance.

Un moyen de relier cercle et distance est de considérer non le cercle seul mais tout le disque, par exemple dans le problème de la chèvre attachée à un piquet dans un grand pré : l'herbe qu'elle peut brouter se trouve dans un disque dont le bord est un cercle ; la distance d'un point du bord au centre (le piquet) est la longueur de la corde tendue. C'est cet écartement qu'il faut prendre pour tracer le cercle avec un compas.

Un autre moyen de relier cercle et distance est de donner un degré de liberté au réglet en lui permettant de tourner autour du point origine, on obtient alors un instrument qui permet de trouver des points du plan qui sont à une distance fixée d'un point donné, et, ce faisant, de tracer un cercle avec l'extrémité libre du réglet, qui devient ainsi compas.

Nous avons vu (Figures 8 à 18) le report d'une longueur sur une demi-droite déjà tracée avec un réglet. Ce report peut aussi se faire avec un compas : on a alors l'intersection d'une demi-droite et d'un cercle centré à l'origine de la demi-droite, mais il n'est pas nécessaire de voir le cercle : le compas fonctionne ici comme un réglet et pourrait avoir deux pointes sèches. Cependant, si l'on n'a plus de droite support, le réglet tournant et traçant ou le compas permettent de tracer un cercle sur lequel se trouvent tous les points qui sont à la distance donnée du point origine. Par intersection de deux cercles, on peut alors trouver, s'ils existent, deux points qui sont à des distances données de deux points donnés, c'est-à-dire les sommets de deux triangles symétriques construits sur le segment reliant les deux points et dont les longueurs des autres côtés sont fixées.

De la reproduction à la construction de figures

Nous arrivons ici à un procédé de construction d'un triangle à la règle et au compas, connaissant les longueurs de ses côtés. Cette méthode, fondée sur le troisième cas d'isométrie des triangles, nécessite une vision « points » du triangle puisqu'il faut construire le troisième sommet comme intersection de lignes à créer. Chemin faisant, dans le paragraphe précédent, nous avons rencontré des constructions de triangles (en tant que polygones) avec des reports de longueurs et d'angles (un angle entre deux longueurs ou une longueur entre deux angles). Ces constructions correspondent aux deux premiers cas d'isométrie des triangles et sont compatibles avec une vision « surfaces » des triangles. Les cas d'isométrie donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour la superposition de deux triangles, avec ou sans retournement, base de la géométrie d'Euclide. Distinguer la nécessité ou non d'un retournement relève de l'étude de la symétrie que nous n'abordons pas ici.

Dans la géométrie théorique du secondaire, on a affaire non à des reproductions de figures mais à des constructions, que le procédé de construction soit algorithmisé ou à élaborer. Cependant, la problématique de la construction se pose aussi dans la géométrie physique, dès la construction d'un carré ou d'un rectangle, y compris avec une finalité pratique. Or, pour une construction, les propriétés de la figure à construire ne sont pas à identifier dans un modèle mais sont données sous forme de texte ou de figure à main levée codée. Si les connaissances de celui qui construit la figure ne lui permettent pas de répondre directement au problème, il est amené à rechercher les propriétés sur lesquelles peut s'appuyer la construction en faisant l'analyse d'un schéma codé (souvent à main levée) portant les propriétés à obtenir pour les relier à celles qui sont données et trouver celles qu'il sera possible d'utiliser pour la construction (phase d'analyse). Au cours de cette analyse, il est ainsi amené à enrichir la figure pour en rechercher d'autres propriétés à partir desquelles on pourrait mener la construction. Même si on est en géométrie physique, il est alors nécessaire de passer un minimum par la géométrie théorique dans cette phase d'analyse. Nous ne développons pas cet aspect ici mais nous l'abordons à travers un seul exemple : la construction d'un triangle rectangle connaissant un côté de l'angle droit et la longueur l de l'hypoténuse. Le côté de l'angle droit connu permet de tracer [AB] et la perpendiculaire à [AB] passant par A (Figure 21).

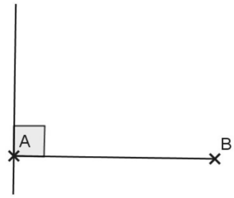


Figure 21

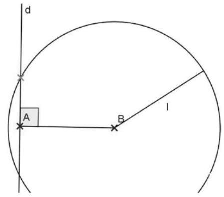


Figure 22

Pour terminer le triangle, il faut reconnaître que le dernier sommet C doit être sur cette droite et à la distance l du point B. C est donc à l'intersection de la droite (d) et du cercle de centre B de rayon l. Si l > AB, on trouve deux solutions (Figure 22). Ce type de construction relève du début du secondaire et demande une vision des figures beaucoup plus élaborée que la construction du triangle rectangle connaissant les côtés de l'angle droit. Il faut en effet ici une vision « points » des figures pour d'une part traduire la condition longueur de [AC] en termes de cercle de centre A et de rayon donné, et d'autre part voir le point C comme intersection de deux lignes à créer. De plus, dans un problème de construction, il devient presque nécessaire d'utiliser des notations et des codages, aspect que nous ne développons pas ici.

Un type de situation pour faire evoluer le regard des eleves sur la figure

La restauration de figure

En théorie des situations (Brousseau, 1998), une situation est définie par :

- Le problème et la règle du jeu ;
- Le milieu et les variables didactiques ;
- Les connaissances en jeu.

C'est selon ces dimensions que nous allons définir un type de situation visant à aider les élèves à changer leur regard sur la figure.

Le problème et la règle du jeu

Une restauration de figure est une reproduction de figure avec des contraintes particulières :

- Une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non).

- Une partie de la figure à obtenir (amorce) est donnée soit par son tracé, soit par un instrument qui permet de reporter des informations de type « surfaces » de la figure initiale, mais sans donner toute l'information comme le ferait un calque.

- On dispose d'instruments variés qui ont un coût d'utilisation donné dans un barème ; les propriétés des figures sont vérifiables et réalisables avec les instruments à disposition.

- Le jeu consiste à restaurer la figure (compléter l'amorce pour retrouver la figure initiale) au moindre coût (on dépense le moins de points possible).

- Quand les élèves pensent avoir terminé, la validation se fait par superposition de la figure restaurée, disponible sur un transparent, sur la figure réalisée par l'élève.

- Une comparaison des coûts est menée en phase collective.

Le milieu et les variables didactiques

Le milieu est constitué des conditions objectives qui définissent le problème traité par les élèves et les moyens de vérifier le résultat de leurs actions. Il comprend ici le modèle, l'amorce, les instruments et leur coût. Certains éléments du milieu peuvent être choisis par le maître avec une intention didactique selon les connaissances qu'il cherche à développer chez les élèves. Ce sont les variables didactiques qui sont à fixer selon les objectifs, les connaissances préalables des élèves et en tenant compte du contrat didactique. Ce sont notamment ici : les propriétés du modèle, de l'amorce, les instruments à disposition et le barème donnant le coût d'utilisation de chacun d'eux.

Les connaissances en jeu

Elles sont à examiner dans chaque cas pour choisir le milieu et la règle du jeu en fonction des connaissances supposées disponibles et de celles dont on veut favoriser l'émergence.

Exemples de restauration

Repérer des alignements

Dans ce premier exemple[10], l'objectif est de favoriser le repérage d'alignements. Le problème consiste à restaurer la Figure 23 à partir de la pièce 1. On choisit un barème qui favorise les tracés à la règle (non graduée) et pénalise les reports de longueur, par exemple : tracé à la règle joignant des points de la figure gratuit ; prolongement d'un segment existant : 1 point ; report de longueur : 5 points.

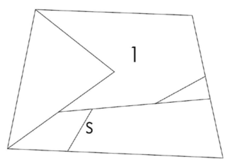


Figure 23

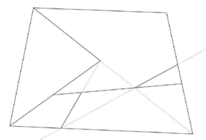


Figure 24

Avec une vision « surfaces » des figures, on peut reproduire le contour en prolongeant des segments et en reportant deux longueurs ; pour tracer le segment S, il faudrait encore deux reports de longueurs. Le repérage d'alignements qui amène à tracer des lignes qui ne sont pas des contours (on en trouve quelques-unes sur la Figure 24) permet de gagner beaucoup de reports ; si on repère tous les alignements, on peut même complètement se passer de reports de longueurs et se contenter d'un coût de 5 points (exercice laissé au lecteur).

Restaurer un carré et un arc de cercle

Il s'agit de reproduire la Figure 25 à partir de l'amorce donnée par la Figure 26

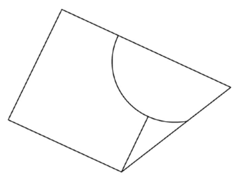


Figure 25

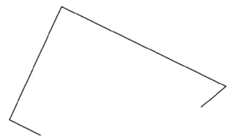


Figure 26

10 On trouvera une analyse détaillée de cet exemple avec différents choix des variables didactiques dans Keskessa et al. (2006).

Le barème est le suivant : équerre 1 point ; compas pour tracer un cercle 1 point ; report de longueur du modèle vers la figure 10 points. Les tracés sur le modèle sont gratuits ainsi que le tracé à la règle (non graduée) et le report de longueur interne à une figure.

L'analyse de la figure initiale et sa comparaison à l'amorce (Figure 27) montrent un carré et un triangle rectangle juxtaposés (ou un carré superposé à un trapèze) et l'arc porté par un demi-cercle superposé au tout.

On peut vérifier par report interne que le rayon du cercle est égal à la moitié du côté du carré.

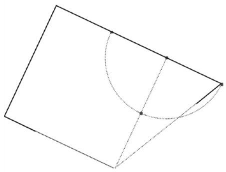


Figure 27

On peut restaurer le trapèze par des prolongements et le carré par un report de longueur interne ; cela permet de trouver, par différence entre la grande base du trapèze et le côté du carré, la longueur du demi-côté du carré qui est aussi le rayon du cercle ; le coût minimal est donc de 1 point. Le report de longueurs interne à la figure oblige à se servir des propriétés du carré et du cercle et des relations entre le carré, le trapèze (grande base une fois et demie le côté du carré) et le cercle (centre en un sommet du carré et rayon moitié du côté). Même s'il suffit d'une vision contour pour terminer le carré, le repérage des relations et en particulier du centre du cercle et de l'égalité de plusieurs rayons nous semble nécessiter une vision « points » de la figure. La construction de la figure à partir de la donnée du côté du carré nécessiterait la même analyse et en plus un moyen de construire des angles droits et le milieu d'un segment.

Restaurer un hexagone régulier

Les moyens de construire le milieu d'un segment autrement qu'en le mesurant sont variés et nous ne pouvons dans cet article évoquer tous ceux que l'on sera en mesure de justifier au début du secondaire. Le premier moyen à la disposition des élèves du primaire est bien sûr le pliage qui est en relation avec la symétrie axiale. Cependant, les élèves peuvent disposer de moyens de construction avec les instruments dès qu'ils savent tracer des parallèles ou construire deux triangles isocèles accolés par la base.

Ce dernier moyen (Figure 28) donne à la fois le milieu et une perpendiculaire puisqu'il donne l'axe de symétrie de la figure.

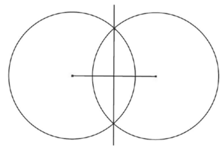


Figure 28

La restauration d'un hexagone régulier à partir de deux cercles sécants tels que le centre de l'un appartienne à l'autre et de la droite passant par les centres (Figure 29), permet de repérer des alignements et mène au pavage du plan par des triangles équilatéraux (Figure 30) pour peu qu'on choisisse un barème qui le favorise, par exemple : tracé à la règle gratuit, compas ou équerre 5 points, report de longueur sur une droite 2 points.

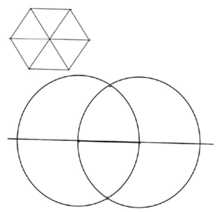


Figure 29

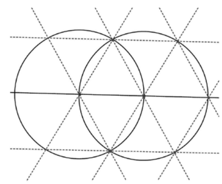


Figure 30

En effet, pour reproduire l'hexagone, les élèves[11] ont tendance à procéder triangle par triangle ; la donnée de l'amorce avec les deux cercles et du barème favorisant les tracés à la règle les incite à repérer des alignements et à construire de nouveaux points par intersection de lignes.

Apprentissages visés dans la restauration de figure

La restauration de figure vise des apprentissages géométriques liés à la pratique des objets géométriques et de leurs relations comme :

- Une droite peut toujours se prolonger ;
- Il faut un segment ou deux points pour dé-

11 CM2, soit 7$^{\text{e}}$ HarmoS pour notre observation.

finir une droite ;

- Il faut un support rectiligne pour reporter une longueur à partir d'un point jusqu'à un autre point sinon il faut un compas qui donne tous les points à une distance fixée d'un point donné ;

- Il faut deux lignes qui se croisent pour déterminer un point.

La restauration d'une figure amène à enrichir cette figure avec des nouveaux tracés qu'on projette d'utiliser : ces éléments nouveaux doivent être reliés à ceux qu'on a déjà et à ceux qu'on cherche à obtenir. Elle contribue ainsi à augmenter l'épaisseur sémiotique de la figure qui devient porteuse d'informations qui ne sont pas visibles d'emblée, mais qu'il faut rechercher (on trouve de nouvelles relations entre les éléments présents, on identifie de nouveaux éléments pertinents). Pour les figures classiques, celles qui ont un nom spécifique, elle contribue aussi à enrichir l'épaisseur sémiotique du vocabulaire : par exemple un carré, un rectangle sera progressivement porteur de relations de plus en plus nombreuses non seulement entre ses angles, sommets, côtés, mais aussi entre ses éléments et ceux de la figure enrichie : diagonales, axes de symétrie etc.

Conclusion

L'objectif de cet article n'est pas de proposer de nouveaux programmes pour enseigner la géométrie en primaire mais de montrer que, à l'intérieur de programmes de géométrie élémentaire, quels qu'ils soient, on peut adopter une démarche appuyée sur des situations qui tiennent compte du développement cognitif des élèves. L'accent sur le regard à porter sur les figures (géométriques) matérielles et les moyens de le faire évoluer devrait aider à relier la géométrie physique aux concepts géométriques qui seront la base de la géométrie théorique. En effet, les propriétés apparaissent ici comme des nécessités pour réaliser avec les instruments au moindre coût une figure satisfaisant la demande, ce qu'on contrôle pour l'instant avec les instruments ou avec le transparent et qu'on contrôlera plus tard par les seuls énoncés. Une telle démarche devrait donc faciliter la transition entre le primaire et le secondaire mais nous pensons qu'elle permet aussi de rendre plus opérationnels les concepts géométriques dans la résolution de problèmes « spatio-géométriques », (pour un exemple simple, l'anticipation de la position d'un tapis rectangulaire après déplacement, voir Salin 2008, dans ce numéro). Le traitement de tels problèmes où le passage par la géométrie théorique intervient dans la modélisation d'un problème de la géométrie physique, au-delà de l'espace délimité par la feuille de papier ou l'écran d'ordinateur, et où la figure peut être en relation à la fois avec le monde physique et avec la géométrie théorique (Perrin et al., 2013) est particulièrement important dans la perspective de l'enseignement professionnel qui concernera une bonne partie des élèves à l'issue de l'enseignement obligatoire.

Les quelques jalons que nous avons essayé de proposer pour une progression concernent l'évolution conjointe de la vision des figures (« surfaces », « lignes », « points ») et des instruments adaptés à cette vision. Les choix des conditions d'un jeu qu'il s'agit de gagner (dépenser le moins de points possible pour restaurer la figure) sont faits pour encourager la progression des connaissances des élèves mais il est nécessaire aussi de fixer les savoirs nouveaux à mesure qu'ils apparaissent pour qu'ils puissent servir à définir les conditions d'un nouveau jeu.

Les situations évoquées ici ont été expérimentées dans des classes mais non une progression complète de la géométrie dans cet esprit. La pratique de la restauration de figures telle que nous l'entendons suppose un changement du contrat didactique habituel de la géométrie de l'école élémentaire (au moins en France) et aussi de la formation des enseignants. Il est en effet souhaitable que ceux-ci puissent intégrer ces situations à leur enseignement ordinaire de la géométrie dans une démarche cohérente et non les juxtaposer à leur pratique ordinaire en les traitant comme des exceptions ludiques. Pour cela, il ne suffit pas d'une part de connaître les savoirs à enseigner, d'autre part d'avoir une pratique pédagogique efficace, il faut pouvoir utiliser les savoirs géométriques pour créer les conditions didactiques de leur apprentissage par les élèves ou au moins pouvoir comprendre et gérer ces conditions.

Références

Berthelot, R. & Salin, M-H. (1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990),* textes rassemblés et préparés par Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V. Grenoble : La Pensée sauvage.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

Keskessa, B., Perrin-Glorian, M.-J. & Delplace J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J. & Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x, 72, 6-39* et *Grand N*, 77, 7-34.

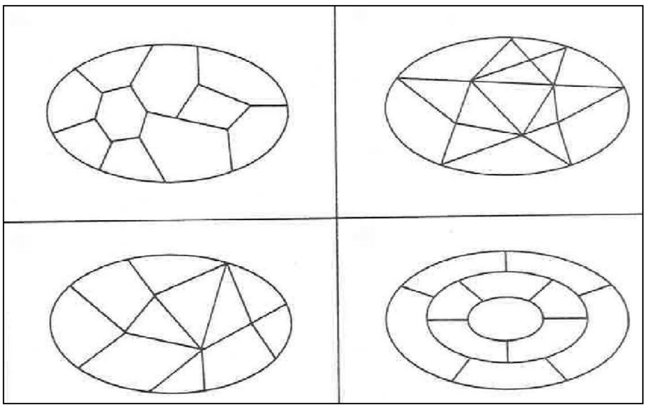
Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A.C. & Leclercq R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 90, 5-41.

Salin, M.H. (2014). Que peut nous apprendre l'observation d'élèves de 11 ans confrontés à un problème « spatio-graphique » ? *Math-Ecole*, 222, 2-7.

Salin, M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. Le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP*, 478, 647-670.

Le problème du coloriage des cartes (tiré de Burdet, 1972, Mathématique de notre temps à l'usage des enseignants) (solution dans ce numéro)

Parmi les cartes suivantes, quelles sont celles qui peuvent être colorées avec 2 couleurs seulement ? Et avec 3 couleurs seulement ?



Le Mathscope ouvre ses portes en février 2015 !

Shaula Fiorelli Vilmart, Pierre-Alain Cherix

Depuis quelques années, certains lieux liés à l'Université sont devenus familiers aux enseignants de sciences de la région : le Physiscope, le Chimiscope ou Bioutils, et tout récemment le Bioscope, accueillent de nombreuses classes durant toute l'année scolaire. Ils permettent aux élèves de rencontrer des chercheurs pour découvrir des problématiques de sciences dans des lieux dédiés à cet effet.

En février 2015, ce sera au tour du Mathscope d'ouvrir ses portes. De la découverte de l'idée de topologie au travers d'une promenade sur les ponts de Königsberg, à des résultats géométriques surprenants comme le possibilité de créer un puzzle fini partant d'un polygone pris au hasard vers tout autre polygone de même aire, en passant par la découverte de la perspective dont on déduit des formules mathématiques utilisées dans nos smartphones ou tablettes, ou encore de l'étonnant paradoxe des anniversaires, les élèves pourront découvrir que les maths sont variées, ludiques et toujours actuelles.

Infos pratiques :

Mathscope, Ancienne Ecole de Médecine, 20 rue de l'Ecole-de-Médecine, 1205 Genève.

Accueil des classes les mardis, mercredis et jeudis matin dès le 16 février 2015.

Plus d'informations : mathscope@unige.ch ou www.mathscope.ch

Responsables du projet : Shaula Fiorelli Vilmart & Pierre-Alain Cherix.

Geogebra dans l'enseignement spécialisé

Germain Von der Mühll

Contexte professionnel

Je travaille comme enseignant d'appui dans un établissement primaire de Lausanne. Cet appui, individuel et intégré en classe, est axé sur les stratégies d'apprentissages. L'appui s'adresse initialement aux élèves qui construisent normalement leurs apprentissages mais rencontrent des difficultés liées à un manque d'organisation dans leur travail : manque d'exploration de la consigne et de l'exercice, peu de mise en lien avec les connaissances qu'ils possèdent sur le thème de l'exercice, peu de planification de leur démarche de résolution, répertoire limité de stratégies de résolution efficaces. Dans les faits, il arrive régulièrement que j'effectue un soutien plus scolaire, proposant aux élèves un travail spécifique sur des notions encore fragiles.

Point de départ : élève en difficulté dans une tâche de géométrie

Lors d'une séance d'appui, j'accompagne Marc[1], un élève de 4^{è} HarmoS âgé de huit ans, dans une activité de repérage de formes dans un nuage de points. Il s'agit dans cette tâche d'identifier les trois carrés dissimulés dans un ensemble de points et d'en tracer les côtés. Marc se trouve rapidement en difficulté face à ce travail. S'il peut repérer le premier carré, positionné quelque peu à l'extérieur des autres points et dans une position prototypique (Dias, 2012) (un des côtés est parallèle au bord inférieur de la page), il ne parvient pas à identifier les deux autres. L'un se trouve en partie sur le premier qu'il a tracé, l'autre est cette fois-ci présenté dans une position non-prototypique (posé sur l'un de ses sommets). Marc se lance dans une démarche par essai-erreur sans structure particulière. Il ne semble pas pouvoir se baser pour cette dernière sur des connaissances relatives aux propriétés fondamentales du carré telles que : quatre sommets (donc quatre points à relier), quatre côtés de longueurs égales, quatre angles droits. Sa recherche consiste donc à relier des points de façon un peu hasardeuse et à comparer son résultat au premier carré trouvé. Marc rencontre en outre des difficultés de motricité fine. Ses tracés manquent de précision, ce qui complique davantage la réalisation d'une forme identifiable et comparable au carré déjà tracé.

Description de la séquence

Suite à ce travail, je souhaite proposer une tâche similaire à Marc en adaptant le matériel de façon à réduire les obstacles constatés et à lui permettre de se centrer davantage sur l'approche des caractéristiques du carré. Il s'agit par conséquent de créer un milieu (Brousseau, 1996) adapté à ses connaissances, motivant et favorisant l'expérimentation. Le logiciel GeoGebra m'apparaît comme un matériel intéressant pour constituer la base de ce milieu à la fois stimulant et adapté. En effet, ludique et facilement manipulable, il offre en outre la possibilité, dans la création d'exercices sur les nuages de points, d'introduire un grand nombre d'adaptations et d'aides pour faciliter la réalisation par Marc de ce type de tâche. A l'aide du logiciel, je crée donc onze exercices progressifs.

L'objectif général de l'activité présentée dans ce travail appartient au domaine de l'exploration de l'espace issu du domaine disciplinaire Mathématiques et Sciences de la nature (MSN) du Plan d'Etudes Romand (PER)[2] (CIIP, 2010), et plus particulièrement à l'identification des formes géométriques. Nous nous situons, au cycle 1 (1ère à 4^{e} HarmoS[3]), dans une géométrie essentiellement perceptive, c'est-à-dire dans laquelle « *les objets et leurs propriétés sont contrôlées par la perception […]* » (Dias, 2012, p. 43) et non

1 *Prénom fictif.*

2 *Le plan d'études romand définit les contenus d'apprentissage de la scolarité obligatoire (1ère à 11e année) pour l'ensemble de la Suisse romande. Il comporte trois entrées : cinq domaines disciplinaires (Langues, Mathématiques et Sciences de la nature, Sciences humaines et sociales, Arts, Corps et mouvement) ; les capacités transversales ; la formation générale.*

3 *Élèves de 4 à 8 ans.*

par le recours à des instruments. La tâche vise donc à ce que l'élève puisse « se sensibiliser à l'observation, la reconnaissance, la description et la dénomination [d'une forme géométrique plane simple] » (CIIP, 2010), le carré. Elle l'amène également à effectuer un tracé de la forme,

> *[fondamental] dans le processus de construction des connaissances géométriques, [puisqu'il permet] de dépasser peu à peu la perception au profit de la compréhension des propriétés et des relations. (Dias, 2012, p. 46)*

L'intérêt de la recherche d'une forme dans un nuage de points réside ainsi dans le fait qu'elle encourage l'élève à procéder à une analyse plus détaillée des propriétés de la forme recherchée. En se fondant sur les caractéristiques de cette dernière, l'élève peut en effet d'autant mieux organiser sa recherche puis procéder à un contrôle de sa production. Comme relevé précédemment, je souhaite que l'interaction de l'élève avec le milieu l'amène peu à peu à envisager une recherche systématique et organisée. Les tâches sont donc susceptibles de développer chez lui des compétences liées à la résolution de problèmes géométriques :

> *Tri et organisation des informations ; mise en œuvre d'une démarche de résolution ; ajustement d'essais successifs ; déduction d'une information nouvelle à partir de celles qui sont connues ; vérification, puis communication d'une démarche (oralement) et d'un résultat en utilisant un vocabulaire adéquat. (CIIP, 2010)*

Le recours au logiciel GeoGebra permet de dépasser un obstacle majeur rencontré par Marc dans le travail sur fiche réalisé en classe, à savoir le tracé à la règle et au crayon des côtés des carrés. Le tracé dans GeoGebra présente en outre la particularité aidante de rendre le trait visible et malléable avant de le fixer au point souhaité. Il autorise donc une première démarche d'essai-erreur et la considération de différents points de chute du segment. D'autre part, il est aisé d'effacer le segment effectué s'il est erroné. L'élève peut donc reprendre sa démarche sans être induit en erreur par des morceaux de segments restant sur la page. Par ailleurs, la barre d'outils du logiciel est personnalisable. Je peux donc y faire figurer uniquement les éléments dont Marc a besoin pour tracer les segments et déplacer les formes. Les nombreuses possibilités qu'offre le logiciel me permettent également d'introduire un certain nombre d'aides, directement mobilisables lors de l'activité. La présence des modèles dans l'exercice et la possibilité de les déplacer, le nombre de points dans le nuage, la possibilité de faire apparaître un point du carré en couleur, la touche de vérification de la réponse et la position du carré (prototypique ou non) représentent autant de variables didactiques permettant de moduler la conception des fiches pour faire varier la difficulté de la tâche. La forme des documents, relativement épurée, et les aides à disposition doivent à mon sens favoriser une recherche autonome de Marc et limiter mes interventions.

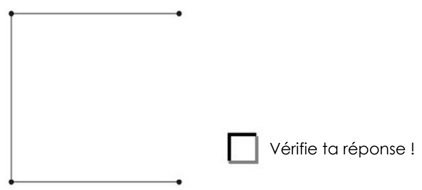
Les quatre premières fiches doivent permettre à Marc de se familiariser avec l'utilisation du logiciel et de la souris d'ordinateur ainsi qu'avec la présentation des exercices (consigne et boîte de vérification de la réponse). Il s'agit également de lui permettre de construire sa représentation du carré puis de l'amener à considérer cette forme dans une position non-prototypique. Il n'y a ainsi pas de points parasites, le but étant simplement de tracer les côtés manquants pour former un carré. Cette première phase de la séquence correspond à la phase *action* d'une séquence mathématique (Brousseau, 1996), qui sollicite avant tout l'action de l'élève, invité à manipuler le logiciel dans le cadre des fiches, sans intervention de ma part.

Dans l'ensemble des exercices créés, l'élève peut, en cliquant dans une petite boîte, vérifier sa réponse en faisant apparaître en couleur pleine les carrés dissimulés dans les points. J'envisage qu'il puisse également utiliser cet outil de vérification pour guider sa recherche en faisant apparaître brièvement le carré puis en essayant d'identifier les points qui le constituaient.

Enfin, pour l'ensemble des exercices proposés, un seul outil du logiciel est utilisé concernant le tracé, il s'agit de l'outil segment. Geogebra est donc ici plutôt utilisé comme un logiciel de dessin.

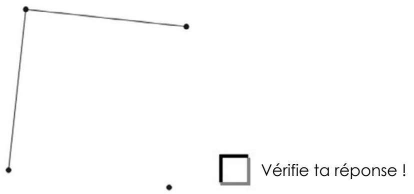
Exercices 1, 2, 3 et 4 :

Trace le dernier côté pour obtenir un carré !



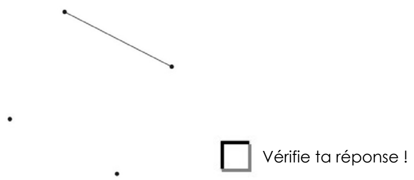
Exercice 1

Trace les deux côtés qui manquent pour faire le carré !



Exercice 2

Trace les trois côtés qui manquent pour faire un carré !



Exercice 3

Trace les quatres côtés et forme un carré !

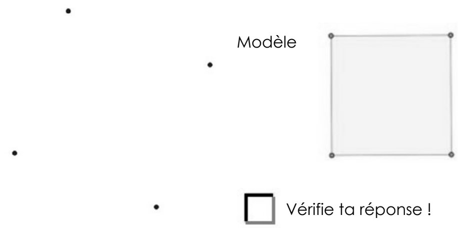
Exercice 4

A l'issue de cette première phase, j'imagine introduire une discussion sur la procédure utilisée et les observations de Marc sur la forme créée. Ce moment constitue une phase de *formulation* (Brousseau, 1996) durant laquelle nous nous exprimons tous deux librement sur l'aspect du carré. Suit une série d'exercices à la complexité croissante avec l'introduction du nuage de points et des modèles de carrés comme aide à la résolution. Les phases *d'action* et de *formulation* se répètent de la même façon dans les quatre exercices suivants en ajoutant au sujet de discussion la démarche entreprise pour identifier le carré. En complexifiant à chaque fois les tâches, j'espère favoriser un certain affinement de la stratégie de recherche et de sa verbalisation tout en renforçant la connaissance des caractéristiques du carré puisqu'il s'agit de se baser de plus en plus sur ses dernières pour faciliter sa découverte dans le nuage de points.

L'introduction des modèles des carrés recherchés et la possibilité de les déplacer permet, au besoin, à l'élève de guider sa recherche en les plaçant dans le nuage de points. La présence sur les modèles de quatre points à la place de leurs sommets lui permet de les superposer aux points présents dans le nuage.

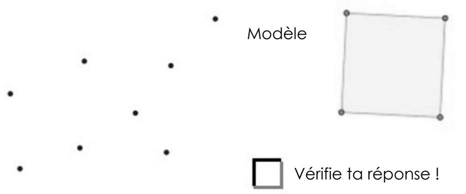
Exercices 5, 6, 7 et 8 :

Trouve le carré et relie les quatre points !



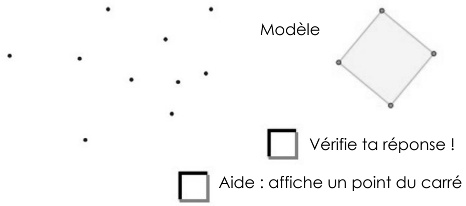
Exercice 5

Trouve le carré et relie les quatre points !

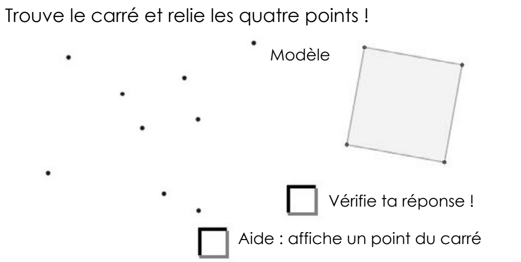


Exercice 6

Trouve le carré et relie les quatre points !



Exercice 7

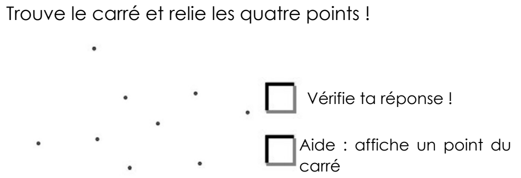


Exercice 8

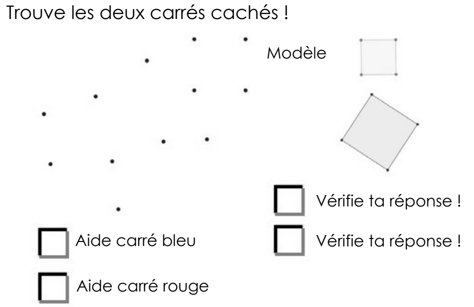
À la suite de ces quatre exercices, une phase est consacrée à un moment de présentation des différentes démarches proposées (observations, techniques et tracés pertinents pour réussir). Ce moment me semble utile avant la réalisation des trois derniers exercices plus complexes.

Les exercices allant en se complexifiant, j'introduis ensuite (déjà dès l'exercice 7) la possibilité pour l'élève de faire apparaître, en couleur, un des points du carré recherché.

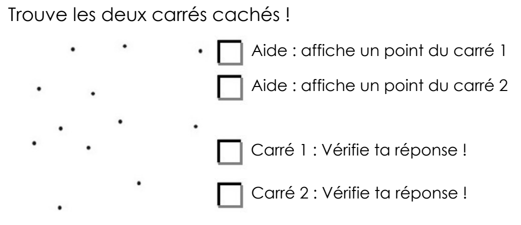
Exercices 9, 10 et 11 :



Exercice 9



Exercice 10



Exercice 11

Enfin, selon le travail de formulation et de validation réalisé, je souhaite *institutionnaliser* (Brousseau, 1996) les connaissances mises en actes et en mots durant l'ensemble de la séquence en reprenant les caractéristiques du carré et la procédure de recherche utilisée.

Activité de l'élève

Marc est entré avec beaucoup d'intérêt dans le travail proposé. Le dispositif le motivait et lui semblait clair. Après une ou deux explications sur la façon de tracer un segment, sélectionner un point ou cliquer dans la boîte de vérification de la réponse, il a effectué les quatre premiers exercices avec entrain et de façon autonome. Toutefois, il a été très difficile pour moi de ne pas intervenir durant ce moment et de laisser Marc faire librement ses essais. Je lui ai donné des conseils, indiqué où il devait cliquer avec la souris, redonné une explication sur le tracé des segments, etc. J'ai difficilement résisté à l'envie de l'aider. Ses remarques dans cette première phase sont d'ailleurs venues souligner mon échec dans ma tentative de rester en retrait, puisqu'il a relevé à quelques reprises : *maintenant je le fais tout seul !* A l'issue des quatre premiers exercices, nous avons discuté des particularités du carré. Nous avons relevé le fait que la position de la forme dans l'espace, penché ou droit, n'avait pas d'influence sur sa dénomination. Nous avons également souligné les caractéristiques principales de la forme. Marc a verbalisé la présence de quatre côtés *droits*. J'ai alors précisé la nécessité de relier les quatre points formant les quatre *sommets* de la forme. Lors de ce premier échange, j'ai observé que Marc rencontrait des difficultés à prendre la parole et à rendre compte de ses observations. J'ai alors considéré que la phase de formulation des démarches, souhaitée pour les exercices suivants, dépendrait en partie de mon étayage.

Marc a réalisé facilement les exercices 5 et 6. Il a recouru à mon aide dans les exercices 7 et 8, et j'ai constaté qu'il perdait peu à peu confiance en lui et en sa capacité à s'appuyer sur la démarche de recherche suivie jusque-là. Le nombre de points parasites semblait le déstabiliser. Il ne parvenait pas à inhiber ces distracteurs et à focaliser son attention sur la forme représentée par le modèle. J'ai alors procédé à une aide plus soutenue, guidant parfois de façon (trop ?) prononcée ses essais. Je lui ai proposé d'utiliser le modèle, qu'il pouvait encore déplacer dans l'exercice 7 (les modèles étaient ensuite fixes), puis j'ai pris par moments en charge, dans l'exercice 8, l'action avec la souris, qui devenait source de difficultés pour Marc, pourtant à l'aise jusqu'ici dans sa manipulation. Il a utilisé la boîte de vérification de la réponse pour réaliser l'exercice 8.

Dans ces deux exercices, je me suis rendu compte à quel point il m'était difficile de laisser agir l'élève, trop pressé et soucieux qu'il se trouve en échec dans l'activité proposée.

L'écart entre soutien ponctuel et guidage trop insistant est mince, et j'ai observé que je me laissais entraîner dans une aide souvent trop dirigée. Ajoutée à la difficulté croissante des exercices, cette posture a, me semble-t-il, peu à peu déstabilisé Marc, qui a de plus en plus sollicité mon aide et mon avis. L'incertitude liée à la recherche de la forme est devenue trop lourde. Comme le relève Dias (2012),

> *Affronter le doute et l'incertitude est toujours délicat, surtout en situation scolaire dont l'un des contrats implicites est de montrer le plus souvent possible à son enseignant ce que l'on sait faire. (Dias, 2012, p. 25)*

Si l'auteur soulève qu'il est alors mieux d'étayer cette phase de recherche, il me semble, avec le recul, que mes interventions, trop soutenues, ont contribué à ce que Marc me délègue peu à peu la prise en charge de la recherche des carrés. Cela a été le cas dans la résolution des trois derniers exercices (qui étaient peut-être également trop difficiles).

Afin de maintenir la motivation de l'élève et de réduire le degré de difficulté de ces dernières tâches, j'ai effectué moi-même les essais que Marc me communiquait en partie. L'objectif du travail m'a semblé peu à peu se déplacer sur la réussite de la tâche plutôt que, comme souhaité, sur la connaissance des caractéristiques du carré et la démarche d'identification de la forme dans le nuage de points. J'ai verbalisé moi-même systématiquement nos essais en les rapportant à ces éléments, afin de conserver en arrière fond cet objectif. La phase d'institutionnalisation, que j'ai tout de même réalisée en fin de séance, m'a semblé perdre quelque peu de sa pertinence et de son impact.

Je retiens toutefois de ce travail la grande motivation de Marc dans l'ensemble des exercices. Il me semble également qu'il a progressé dans ses connaissances liées aux particularités du carré et affiné sa démarche de recherche. Pour m'en assurer, je lui ai proposé de refaire l'exercice 7, dans lequel il avait rencontré des difficultés. L'effet de mémoire de la solution me semblait atténué par le temps passé à effectuer les exercices 8 à 11. Marc a exécuté facilement l'exercice, repérant le carré et le traçant d'abord avec son doigt en verbalisant la présence de quatre côtés droits. Il a ensuite relié les points et constaté avec joie la justesse de sa réponse.

Références

Brousseau, G. (1996). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In J. Brun, *Didactique des mathématiques* (pp. 45-144). Neuchatel : Delachaux et Niestlé.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), (2010). *Plan d'études Romand, 2e cycle, Mathématiques et Science de la nature. – Sciences humaines et sociale,* CIIP.

Dias, T. (2012). *Manipuler et expérimenter en mathématiques.* Paris : Magnard.

Comment les activités géométriques pourraient-elles contribuer au développement de la résolution de problèmes arithmétiques ?

Lucie DeBlois, Annette Braconne-Michoux, Sylvie Tremblay

Université Laval, Université de Montréal, Université Laval

Résumé

En classe, nous avons l'habitude de proposer des activités géométriques à certains moments et des activités arithmétiques à d'autres. Rarement, nous réfléchissons à la contribution du premier domaine mathématique au deuxième. Nous avons posé une réflexion sur les difficultés des élèves en résolution de problèmes arithmétiques pour ensuite étudier l'apport des activités géométriques. En effet, certaines activités géométriques semblent particulièrement intéressantes pour familiariser les élèves à une véritable activité mathématique, activité qui pourrait être mobilisée dans la résolution de problèmes arithmétiques : raisonner à partir d'expériences immédiates, valider grâce à la rétroaction du milieu, anticiper un résultat par la création de représentations mentales, agir pour reconnaître des invariants opératoires, interpréter par la mise en place d'un vocabulaire. En somme, en nous appuyant sur des exemples issus de la recherche en didactique de la géométrie, nous étudions comment pourrait être articulée une réflexion à ce sujet.

Introduction

Il arrive de se questionner sur l'intérêt de proposer aux élèves du primaire des activités géométriques puisqu'elles reposent souvent sur des explorations et des observations. À l'instar de Casey et coll. (1992) et de Newcombe et Frick, (2010), nous formulons l'hypothèse suivante : les activités géométriques pourraient favoriser l'apprentissage de la résolution de problèmes arithmétiques par la familiarité qu'elles suscitent chez les élèves avec l'activité mathématique. Une recension des recherches effectuées auprès d'élèves d'âges variés tend à montrer que, dès les premières activités géométriques, les élèves privilégient le raisonnement (Bilinski, 2008) à la recherche de mots-repères ou à l'application d'une suite d'étapes. De tels résultats nous confortent à étudier l'apport des activités géométriques pour surmonter les obstacles répertoriés par la littérature en résolution de problèmes comme la « fausse réalité », l'absence de rétroaction du milieu ou la nature des énoncés (Tremblay, 2013).

Des expériences immédiates pour raisonner

Berté et coll. (2006) reconnaissent que les conditions dans lesquelles des élèves du secondaire se trouvent au moment de résoudre un problème sont plus importantes que le contexte évoqué dans le problème. Résoudre un problème dans la réalité ou en mathématiques n'amène pas les mêmes démarches puisque certaines contraintes sont ignorées en mathématiques. Des contenus mathématiques, bien qu'inscrits dans des situations concrètes, priveraient les élèves d'une véritable activité mathématique à cause de l'absence de réalité immédiate, ce que nous appelons « fausse réalité ». Une activité d'apparence géométrique comme calculer le périmètre d'une clôture est en fait une activité arithmétique et peut conduire les élèves à appliquer une formule sans pour autant sentir la nécessité de contrôler le résultat. En effet, les élèves ne poseront pas la clôture. En outre, poser cette clôture pourrait les inviter à privilégier d'autres procédures. Bien que la pose d'une clôture soit une activité de la vie courante, le contexte du problème donné aux élèves est fictif.

Au contraire, certaines activités géométriques peuvent contribuer à faire vivre, dès le primaire, une expérience immédiate. Par exemple, Dias (2009) et Bacher (2006) proposent des problèmes ouverts tels que la construction de polyèdres réguliers à partir de polygones réguliers. Bien que le nombre de polyèdres à trouver soit inconnu des élèves, l'activité de construction leur permet de vérifier la régularité des polyèdres. Ils ont la possibilité d'explorer des constructions irrégulières, voire impossibles. Après diverses tentatives, les élèves constatent et acceptent l'impossibilité de construire un polyèdre régulier avec certaines formes géométriques. De plus, les discussions entre pairs demandent le développement d'arguments et favorisent ainsi la formulation de raisonnements. Les élèves entrent alors dans une véritable activité mathématique au sens où leurs préoccupations portent sur les arguments servant à convaincre plutôt que sur la reproduction d'une procédure qu'elle soit de calcul ou autre. L'obstacle de la « fausse réalité » pourrait donc être contourné par le biais des expériences immédiates.

La rétroaction du milieu pour valider une solution

Lépine (1996-1997) reconnaît que tout problème ouvert ne favorise pas nécessairement chez l'élève l'élaboration d'une validation. Ainsi, devant le problème suivant « Avec un récipient de trois litres et un autre de cinq litres, comment peut-on obtenir 4 litres ? », la majorité des élèves de 14 ans d'une classe ont manifesté des difficultés à amorcer leur réflexion. Malgré l'illustration de flèches indiquant le mouvement de transvasement et le partage des idées en équipe, les élèves ont eu tendance à présenter des solutions erronées. En revanche en utilisant l'eau et les récipients, les élèves ont su éliminer les mauvaises solutions. Les effets de l'action auraient, dans ce cas, permis aux élèves de vivre une expérience de validation. Toutefois, sans l'invitation de l'intervenant, les élèves n'utilisent pas le matériel proposé.

Plusieurs activités géométriques pourraient mettre les élèves en relation avec un milieu qui les conduit à vivre l'expérience de la validation. Une activité bien connue faisant intervenir la validation par la rétroaction du milieu est le problème du puzzle de Brousseau (1981) qui consiste à réaliser l'agrandissement d'une figure carrée, découpé en différentes pièces. Au départ il s'agit d'une activité de géométrie puisque les élèves doivent construire les pièces du puzzle. Mais au cours de la validation (la reconstitution du puzzle) la tâche devient numérique : les procédures additives sont mises en défaut, seul le raisonnement proportionnel permettra de résoudre le problème.

Les activités de visualisation au cours desquelles les élèves tournent les objets, les comparent à des dessins ou à des photos peuvent aussi être valorisées par des validations par rétroaction (Lismont et Rouche, 2001). Les activités de visualisation en géométrie dans l'espace sont définies par Belkhoja (2007) comme étant la capacité de se représenter mentalement des objets, des constructions géométriques et des représentations sans support matériel. Une activité géométrique permettant une rétroaction du milieu contribue ainsi à faire vivre une véritable activité mathématique aux élèves et, éventuellement, à la prise de conscience de la place de la validation dans la résolution de problèmes.

Des représentations mentales pour anticiper un résultat

Différentes fonctions sont attribuées aux représentations mentales : faciliter la mémorisation, interpréter une information, transformer un problème.

Bien que certains élèves soient en mesure d'illustrer un énoncé, il n'est pas rare de constater que l'exploitation qu'ils font des données, et les algorithmes qu'ils utilisent, peuvent être « déconnectés » de l'énoncé du problème. Dans ce cas, on pourrait dire que la représentation qu'ils se sont donnée du problème a été inefficace.

Pour Belkhodja (2007) la géométrie est un domaine mathématique qui favorise les représentations d'objets et de concepts parce que les occasions où l'on peut faire coïncider la manipulation avec différentes représentations sont plus nombreuses que dans d'autres domaines mathématiques. Par exemple, des illustrations à partir de descriptions (écrites, orales, consignes, etc.) peuvent modéliser une formule mathématique. Ainsi, le calcul de l'aire de deux rectangles mitoyens de même largeur permet de représenter la distributivité. Les activités de manipulation d'objets concrets (rotations, développements, constructions, etc.) permettent aussi aux élèves de faire des constructions ou des tracés géométriques, accédant ainsi à de nouvelles représentations.

Selon Marchand (2006) pour qu'une activité géométrique soit source d'apprentissage, celle-ci doit demander à l'élève d'anticiper le résultat de son action avant que celle-ci ne soit menée, donc de se donner une représentation mentale statique ou dynamique de l'objet ou de la situation. Les activités géométriques pourraient ainsi contribuer à faire vivre l'expérience des représentations mentales, un enjeu important (Davis, 1997) et un support à l'anticipation comme activité mathématique des élèves.

Interpréter le sens des mots

Nous connaissons les difficultés d'interprétation des élèves devant les problèmes qui leur sont proposés en mathématiques. Rappelons la variété de sens accordés à la notion de volume chez des élèves de 10 ans : le niveau du son ou du bruit, l'aire, la longueur ou l'épaisseur d'un dictionnaire (Anonyme, 1983). En outre, les problèmes présentés dans les manuels scolaires utilisent des énoncés (des phrases), des tableaux, des dessins, autant d'éléments que les élèves doivent interpréter. Bien que les mots accompagnant les nombres dans certains énoncés donnent des indices explicites, ils peuvent poser des défis particuliers. Certains mots faisant référence à des groupements peuvent être source de difficulté pour les élèves. C'est ainsi que les mots « mûre » et « banane » sont des « fruits », laissent émerger la relation d'inclusion présente, notamment, dans les problèmes de complément d'ensembles (DeBlois, 1997b). Les expressions « de plus » et « de moins » utilisées de façon inconsistante avec l'opération à réaliser dans les problèmes de comparaison demandent aux élèves de faire intervenir la relation d'implication « si…alors… » pour faire les inférences nécessaires (DeBlois, 1997a, Giroux et Ste-Marie, 2000).

Pour Record (1983), les ambiguïtés de formulation, les temps de conjugaison (l'emploi du conditionnel et du participe présent) peuvent nuire à la compréhension d'un problème. Le passage de langage oral au langage écrit peut aussi devenir un obstacle pour certains élèves. En effet, dire « Y en a combien ? » et lire « Combien y en a-t-il ? » exige une interprétation. Enfin, l'usage de certains qualificatifs ou un excès d'informations, peuvent faire obstacle à la compréhension. Par exemple, l'expression « les chemises rouges carmin à manches blanches et cols bleu horizon » pourrait embarrasser les élèves à cause de la juxtaposition des qualificatifs. Berté et coll. (2006) ajoutent que dans les problèmes proposés par les manuels, l'élève n'a souvent qu'à suivre des directives, comme « recopie … », « complète … », « dessine … », ou à se laisser diriger vers une réponse unique par des questions stéréotypées.

L'introduction de certaines activités géométriques peut être une occasion pour que les élèves donnent un sens aux mots et développent une interprétation qui favorise la communication. Par exemple, Javelas et Rimbourg (1993) ont demandé à des élèves de 9-10 ans de décrire une maquette à l'aide d'un tableau de description. Les élèves se sont heurtés au vocabulaire descriptif des faces. Devant la nécessité de communiquer à propos des formes, des figures ou des solides et de leurs caractéristiques les élèves ont ressenti le besoin de préciser leur vocabulaire. Grâce à une analyse de la composition des préfixes et des suffixes (gone=angle, èdre=face, plan), les élèves ont pu établir des liens entre les caractéristiques des objets géométriques et la composition de leurs noms. Braconne-Michoux et Juteau (2012) reconnaissent aussi qu'il est possible de passer de la reconnaissance globale de formes à l'école maternelle à des opérations sur les fractions en faisant l'acquisition d'un vocabulaire relatif aux formes géométriques. Une pièce du Tangram étant choisie comme valeur unité, on obtient des décompositions diverses et variées de différentes figures, qui se contrôlent par superposition des pièces, en utilisant les fractions. Les aires égales d'une part, les aires différentes, multiples de l'unité choisie ou fractions de l'unité choisie, donnent un sens aux opérations sur les fractions.

Agir pour reconnaitre des invariants opératoires

Les invariants opératoires allègent l'activité cognitive des élèves et servent de tremplin à de nouvelles procédures. La recherche de DeBlois (1997b) montre qu'il est nécessaire à une élève de 8 ans de répéter l'opération d'addition lorsque l'ordre des nombres est modifié. Les propriétés des opérations sont des invariants opératoires qui sont parfois difficiles à construire pour les élèves. En effet, préoccupés par la technique qui permet de réaliser l'algorithme d'une opération, les élèves perdent le sens de leur activité mathématique.

Les premières activités géométriques dans le monde sensible (Houdement et Kuzniack, 1998-1999) permettent aux élèves de faire l'expérience de l'observation de régularités pour dégager des invariants opératoires et ce, dès la maternelle. Aubertin et coll. (2007) observent aussi l'importance de laisser libre cours aux commentaires des élèves lors des expérimentations géométriques. Par exemple, ayant à leur disposition des triangles isocèles rectangles, des élèves de 4 à 6 ans sont invités à construire des carrés en utilisant 2 pièces. En plus de découvrir que deux triangles isocèles-rectangles forment un carré, les élèves observent que deux ou plusieurs triangles peuvent former un losange ou un polygone et que tous les polygones sont composés de plusieurs triangles (mais pas nécessairement isocèles rectangles !). Les activités de ces élèves montrent qu'ils élaborent des relations logico-mathématiques. Enfin, l'expérience de Janvier (1997) avec des élèves de 15 ans montre comment, par l'anticipation et la manipulation, l'expérience du dénombrement de morceaux de sucre permet non seulement de construire un sens à la formule du volume d'un prisme droit, mais aussi de reconnaître la commutativité et l'associativité de la multiplication.

Conclusion

Cette recension de résultats des recherches sur quelques activités géométriques révèle comment elles font vivre aux élèves l'expérience de l'anticipation, de l'interprétation, de l'action, du raisonnement et de la validation. Ces expériences développent une familiarité chez les élèves à poser une réflexion, un jugement et une argumentation à partir des relations logico-mathématiques, familiarité qui pourrait être réinvestie dans la résolution de problèmes arithmétiques. De plus, les activités géométriques offrent l'opportunité de prolongements sous la forme de situations-problèmes arithmétiques. L'attention des élèves, portée sur les relations plutôt que sur les nombres et sur un ensemble de techniques à mémoriser, contribuerait alors à construire un sens différent à l'expression « faire des mathématiques ».

Références

Anonyme[1] (1983). Vous avez dit volume ?, *Grand N*, 30, 73-79.

Aubertin, J.-C., Bettinelli, B., Pedroletti, J.-C., Porcel, N. & Schubnel, Y. (2007). *De la géométrie à l'école maternelle, pourquoi pas ?*, France : Presses universitaires de Franche-Comté.

Bacher, R., Cartier, L., Grenier, D. & Schmitt, M.-J. (2006). Activité…autour des polyèdres de Platon, *Petit X*, 70, 73-79.

Belkhodja, M. (2007). *La visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions en tant que compétence à développer à l'école, tome 1*. Thèse de doctorat, Université Laval.

Berté, A., Chagneau, J., Desnavres, C., Lafourcade, J., Mauratille, M.-C. & Sageaux, C. (2006). Engager les élèves dans une réelle activité mathématique, Un exemple : le cercle circonscrit en 5e, *Petit X*, 70, 7-29.

Bilinski, R. (2008). Mathématique en mouvement en 1re année primaire. *Bulletin de l'AMQ*, 48 (1), 35-40.

Braconne-Michoux, A. & Juteau, M.-A. (2012). Des mathématiques au primaire. *Bulletin AMQ*, 52 (1), 43-60.

Brousseau, G. (1981). Problèmes didactiques des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2.1, 87-127.

Casey, B., Nutall, R.L. & Pezaris, E. (1992). Spatial ability as a predictor of math achievement: The importance of handedness patterns, *Neuropsychologia*, 30(1), 35-45.

DeBlois, L. (1997a). Trois élèves en difficulté devant des situations de réunion et de complément d'ensembles. *Educational Studies in Mathematics*, 34 (1), 67-96.

DeBlois, L. (1997b). Quand additionner ou soustraire implique comparer. *Éducation et Francophonie*, XXV (1) [Page Web]. Ac-

1 *Une recherche de cet article vous conduira à observer qu'aucun auteur n'est indiqué.*

cès : http://www.acelf.ca/c/revue/pdf/EF-25-1-111_DEBLOIS.pdf

Dias, T. (2009). La dimension expérimentale en mathématiques un exemple avec la situation des polyèdres, *Grand N,* 83, 63-83.

Giroux, J. & Ste-Marie, A. (2000). The solution of compare problems among first-grade students. *European Journal of Psychology of Education,* 16(2), 141-161.

Houdement, C. & Kuzniack, A. (1998-1999). Réflexions sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres. *Grand N* 64, 65-78.

Janvier, C. (1997). Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume. *Bulletin AMQ,* 37 (3), 28-41.

Javelas, R. & Rimbourg, Y. (1993). Modélisation géométrique d'un cristal et cristallisation d'un modèle, *Grand N,* 53, 79-118.

Lépine, L. (1996-1997). Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche, *Grand N,* 60, 43-55.

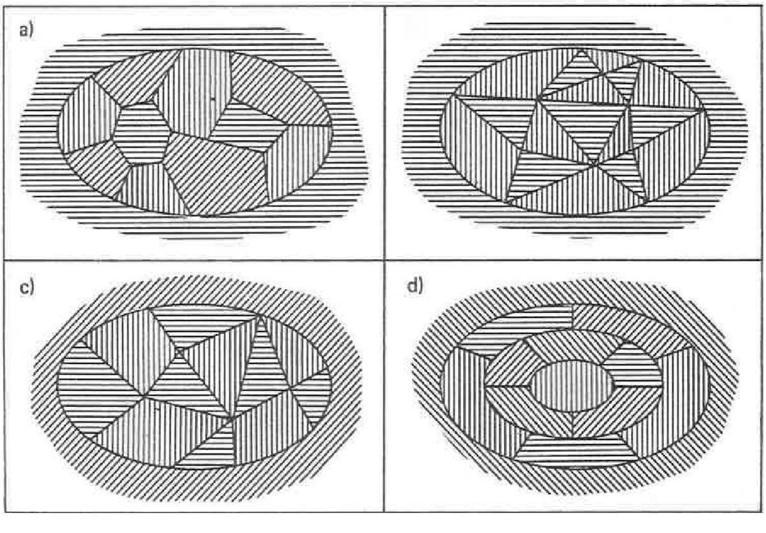
Marchand, P. (2006). Comment développer les images mentales reliées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 103-121.

Newcombe, N. & Frick, A. (2010). Early Education for Spatial Intelligence: Why, What, and How. *Mind, Brain and Education,* 4(3), 102-111.

Record, G. (1983). Langage et énoncés de problèmes, *Grand N*, 30, 27-42.

Tremblay, S. (2013). *Les activités géométriques pour une arithmétique plus significative*. Essai de maîtrise. Université Laval [Page Web]. Accès : http://www.bibl.ulaval.ca/doelec/essais/2014/3500-PPG6005-Sylvie_Tremblay.pdf

Solution du problème du coloriage des cartes (tiré de Burdet, 1972, Mathématique de notre temps à l'usage des enseignants)



a. 3 couleurs suffisent
b. 2 couleurs suffisent
c. 3 couleurs suffisent
d. 4 couleurs sont nécessaires

La Géométrie, domaine mal-aimé des mathématiques scolaires genevoises ?

Laura Weiss

Université de Genève

Introduction

Quand en 1995 le Cycle d'orientation[1] (CO) a lancé le chantier de la réécriture des objectifs d'apprentissage et des plans d'études de toutes les disciplines, le groupe de mathématiques a d'abord défini les différents domaines des mathématiques à enseigner, en ajoutant par exemple l'usage de la calculatrice ou l'initiation aux raisonnements mathématiques. En ce qui concerne l'étude de l'espace, il a d'abord décidé - nouveauté au CO - de séparer le domaine Grandeurs et mesures (GM) qui en faisait traditionnellement partie, du domaine Géométrie. C'est en ce qui concerne ce dernier, que des difficultés sont apparues. Quels contenus mettre sous cet intitulé ? Du moment qu'il était amputé des calculs de longueurs, d'aires et de volumes, que l'application calculatoire des théorèmes de Pythagore et de Thalès faisait aussi partie du domaine GM, que restait-il de ce qui était traité dans les classes ? De la géométrie de construction, des transformations du plan, c'est-à-dire, du point de vue des élèves, surtout du dessin aux instruments. Pour prendre le temps de la réflexion, la rédaction des contenus a été repoussée de deux ans, en même temps qu'il était proposé une formation à la géométrie de démonstration aux enseignants. Enfin, le programme du domaine *Géométrie* a été édité en 2003, qui prenait en compte les débats de l'époque sur cet enseignement, insistant en particulier sur l'importance et les obstacles du passage de la géométrie perceptive à la géométrie basée sur les propriétés des figures et des transformations. Mais pourquoi cette temporisation ? Les difficultés rencontrées par les auteurs[2] du plan d'études (PE) sont-elles intrinsèques au domaine ou aux institutions scolaires genevoises ? Sont-elles spécifiques au CO, et si oui pourquoi ? En retraçant dans ses grandes lignes, sur la base des plans d'études successifs, l'évolution de l'enseignement de la *Géométrie* à Genève au secondaire inférieur, nous cherchons quelques pistes de réponses.

Méthodologie

Pour répondre à ces questions, nous menons une recherche « didactique historique » (Bishop, 2010) sur les documents institutionnels, en analysant les PE genevois de mathématiques.

Deux limitations, dont nous sommes conscients, sont à prendre en compte dans cette recherche. La première est la distance entre le savoir prescrit (à enseigner) et le savoir enseigné (Perrenoud, 1993). Ce dernier, en tant qu'objet de la transposition didactique interne par chaque enseignant (Chevallard, 1985), peut être assez différent d'une classe à l'autre et correspondre de plus ou moins près à ce qui est indiqué dans le PE. A ce propos, Roegiers (2011) relève que les changements curriculaires ne sont effectifs dans les pratiques enseignantes qu'une dizaine d'années après leur promulgation. Cependant, dès sa création, le CO a édité des manuels et a instauré un système d'épreuves communes en cohérence avec les PE, qui ont comme résultat d'unifier les pratiques.

La deuxième concerne les documents étudiés. En effet, à Genève, jusqu'à la création du CO en 1962, le secondaire inférieur (13 à 15 ans) était dispersé dans une multitude d'institutions différentes, en fonction du sexe, du milieu social, du lieu d'habitation (ville ou campagne) des élèves. Pour cette raison, nous avons concentré notre analyse sur les PE du collège inférieur, qui donnent une bonne idée des programmes de tout le secondaire inférieur.

Pour répondre à notre projet, après avoir analysé certains PE du collège inférieur

1 *Élèves de 12-15 ans.*

2 *Pour mémoire, les auteurs des Plan d'Etude à Genève sont des enseignants.*

à partir de 1926[3], nous étudions les PE des 50 années de vie du CO, que nous possédons tous. Notre analyse se fait à plusieurs niveaux. A un niveau global, en lisant les indications des PE, nous relevons la présence ou non de l'intitulé géométrie et, quand ce n'est pas le cas, les intitulés sous lesquels on trouve les notions concernant l'espace. Quand cela est indiqué, nous relevons aussi la durée hebdomadaire consacrée à cet enseignement. A un niveau plus fin, nous tentons de dégager l'esprit de cet enseignement à travers le « type » de géométrie préconisé. Nous cherchons en particulier, lorsqu'ils sont présents, les contenus et les démarches proposés aux enseignants pour initier chez les élèves le passage vers l'abstraction, allant de la géométrie basée sur l'observation, généralement privilégiée au primaire, vers une géométrie plus théorique, basée sur les propriétés des objets géométriques et permettant la généralisation des règles, voire une initiation à la démonstration.

Avant le CO, le collège inférieur

A Genève, jusqu'en 1969[4], le collège inférieur accueille, après la 6e primaire, les garçons de 13 ans qui désirent faire des études. Il comporte 3 degrés, numérotés VIIe, VIe et Ve, et débouche sur le collège de Genève, qui prépare en quatre ans à la maturité. Les filles, quant à elles, vont après la 7e primaire [5]à l'Ecole supérieure de jeunes filles (ESJF). Les programmes des degrés inférieurs de l'ESJF sont semblables à ceux du collège inférieur.

En 1926, le PE de géométrie prescrit en VIIe l'étude des angles, des constructions, des « *calculs de surfaces* », des « *lieux géométriques* », des « *volumes* » ; en VIe la suite des propriétés des angles (inscrit et au centre), des surfaces composées, d'autres lieux géométriques et d'autres volumes, y compris leurs surfaces de développement ; en Ve le théorème de Pythagore avec sa démonstration et les figures et volumes semblables). En 1938, on constate des ajouts minimes, et en 1953, d'autres précisions sont ajoutées (voir annexe).

Que constate-t-on ? Tout d'abord le peu de changements au cours des presque 30 ans passés en revue[6]. Les mathématiques, séparées en arithmétique et géométrie, sont dispensées pendant 3 périodes[7] par semaine et certaines années, mais pas toujours, il est indiqué d'accorder 1 période à la géométrie. Ensuite, la géométrie prescrite comprend – à part la géométrie calculatoire (aires, volumes, applications du théorème de Pythagore) qu'on classerait actuellement sous l'intitulé *Grandeurs et mesures* – des constructions géométriques et des démonstrations (le théorème de Pythagore dont on précise la démonstration, figures égales et semblables, somme des angles du polygone, etc.). La présentation des droites remarquables, du cercle, etc. comme lieux de points fait supposer que les définitions et les propriétés géométriques sont présentées. La progression est claire, malgré les petites variations d'une année à l'autre dans les degrés des objets traités. De plus, la quantité de matière étudiée ne diminue pas au cours du temps. Même si un certain nombre de soucis sont exprimés dans les rapports annuels sur la marche de l'école concernant les élèves du collège inférieur, qui relatent des difficultés comportementales, il n'y a pas d'indication, dans ces PE, de démarches d'enseignement à privilégier, ni de pointage sur des difficultés attendues chez les élèves. La didactique n'était pas encore née !

Les débuts du CO

Dès la création du CO en 1962, qui comporte trois degrés scolaires et plusieurs sections selon la réussite des élèves à la fin de l'école primaire et leurs intérêts, un programme provisoire est édité pour la *Mathématique* (au singulier !), qui est enseignée 3, 4 ou 5 périodes hebdomadaires selon la section

3 On les trouve presqu'en continu depuis 1926 jusqu'à la fin des années 30, puis quelques-uns pour les années 40 et 50.

4 Ouvert en 1962 avec deux établissements, la Florence et l'Aubépine, le CO est graduellement étendu jusqu'en 1969 à tous les quartiers de la ville et à tous les villages du canton.

5 Élèves de 14 ans.

6 Il est fortement probable que ces PE étaient très semblables avant 1926 et jusqu'à la création du CO en 1962.

7 L'enseignement à Genève est dispensé en périodes de 45 minutes.

et le degré (voir annexe). En 7e année, le terme géométrie[8] n'apparaît pas, sauf dans le programme des élèves du « groupe C[9] », qui continuent comme à l'école primaire de l'époque à étudier « arithmétique » et « géométrie », cette dernière concernant essentiellement la mesure. Tout se passe comme si les concepteurs du PE pour cette nouvelle école considéraient que la géométrie était du ressort de l'école primaire et qu'il fallait donc continuer à la faire travailler seulement aux enfants en difficulté scolaire, alors que les autres élèves pouvaient passer à d'autres sujets mathématiques. L'année suivante le programme est revu et il est ajouté en 7e – latine (L), scientifique (S), générale (G) – un premier chapitre « *Système métrique, mesures de temps et d'angles* » (voir annexe), le constat ayant dû être fait que les élèves ne maîtrisaient pas suffisamment ces contenus. Toutefois, ni en 8e ni en 9e, la géométrie n'est mentionnée, sauf en section pratique (P) où il est prévu un complément géométrique (voir annexe) qui correspond effectivement au programme des derniers degrés primaires (voir Weiss, Pourquoi la géométrie est devenue espace ? dans ce même numéro).

En 1964, le cours de mathématiques prescrit pour la 7e L-S-G est présenté en citant les deux manuels utilisés : l'un, intitulé « *Tronc commun* », et l'autre, qui s'appelle « *Math. modernes* ». Ce deuxième contient aussi des notions de géométrie dispersées dans différents chapitres. En 8e, « *Etude des ensembles* » contient les « *ensembles* » des figures géométriques et « *Opérations* », le théorème de Pythagore. En 9e, le programme liste, parmi d'autres notions, « *homothéties et similitudes* » et « *théorème de Thalès* ». Ce n'est toujours qu'en P que l'intitulé géométrie, persiste, avec un programme très détaillé (voir annexe).

En 1966, si l'intitulé géométrie continue à être absent dans le programme des sections L-S-G, il est proposé plus de notions en lien avec ce domaine et surtout leur passage sous d'autres intitulés, un peu comme si on ne savait pas où placer ces notions pour correspondre au vocabulaire des « maths modernes ». Les années suivantes le programme en L-S-G change à peine, sauf le report de certains sujets au degré suivant (par exemple les rotations passent en 8e). En outre, est toujours maintenue la dichotomie entre le programme des sections L-S-G, où la géométrie n'est pas nommée, tout en citant graduellement plus d'objets de ce domaine dans un PE basé sur la structure ensembliste, et celui de la section P, où le les mathématiques se partagent entre arithmétique et géométrie.

Pour conclure cette première période du CO, on constate que les concepteurs des premiers programmes semblent considérer initialement qu'une étude systématique de la géométrie n'est plus nécessaire au secondaire inférieur. Pourtant, très vite, la mesure est réintroduite en 7e dans le manuel *Tronc commun*, puis graduellement des notions de géométrie sont explicitement introduites comme exemples des différents concepts des mathématiques ensemblistes, tels les ensembles, les relations, les opérations. Cela permet d'étudier les propriétés des figures géométriques, mais les constructions et la démonstration géométriques restent absentes. Par rapport au PE du collège inférieur, une nouveauté : les transformations du plan sont introduites comme exemples d'applications. Ce qui avait été supprimé à la suite de « à bas Euclide ! » de Jean Dieudonné, lors du colloque en Royaumont à Paris en 1959 (Calame,1979), revient graduellement dans les PE mais sans que cela ne soit explicitement souligné, laissant croire aux élèves et aux enseignants que ces concepts ou objets géométriques ne sont que des exemples mathématiques des relations ou des applications et qu'ils ne peuvent vivre par eux-mêmes. Ce sont seulement les élèves les plus faibles qui doivent encore étudier la géométrie, qui du coup ne dépasse pas en abstraction ce qui se fait à l'école primaire : hormis la partie calculatoire (GM), il s'agit de constructions-dessins aux instruments et de la nomenclature d'objets géométriques.

---

8 Le programme se partage entre nombres naturels et fractions, après un premier chapitre sur les ensembles.

9 Future section pratique (P), qui accueille les élèves qui ont le moins bien réussi la 6e primaire.

Les années 70 et 80

En 1974-75, le programme devient le même pour toutes les sections de 7e y compris la P, et un nouveau chapitre « *Longueurs-Aires-Volumes* » est introduit sous l'intitulé « *Notions sur les ensembles* » qui prévoit la « *construction des angles, de la bissectrice* ». En 8e, il est indiqué que les ensembles de points sont « *définis par une propriété spécifique des éléments* ». Toujours sans mentionner le mot géométrie, cette précision donne une place à une géométrie « théorique », où les figures géométriques sont définies par leurs propriétés mathématiques.

Trois ans plus tard, la géométrie de construction en 7e s'enrichit,) et l'année suivante, en 1978, l'intitulé géométrie apparaît enfin dans le programme de 7eL-S-G-P, 8eL-S-M[10]-G-P et 9eG[11]. Ce retour est d'autant plus intéressant qu'il est proposé en 7e une « *Géométrie d'observation* » (voir annexe). Si, dans le chapitre des ensembles, les « *lieux[12] des points* » restent mentionnés, le PE prend en compte que la géométrie ne peut se passer au départ de l'observation des figures.

En 1983-84, en 9e, avec le théorème de Thalès sont cités les « *triangles semblables* », ce qui, même si les exercices sont essentiellement calculatoires, implique d'abord un premier pas déductif pour prouver l'égalité des angles. Malheureusement, cela est difficile pour les élèves et souvent cette première étape se réduit à marquer les angles égaux sans autre justification.

Pendant cette deuxième période d'environ 10 ans, suite à des rajouts graduels de notions de géométrie, par intégration dans la structure du PE ensembliste, la nécessité de regrouper ces notions sous un chapitre géométrie se fait sentir. Cela permet de lui accorder une place mieux définie que simplement en tant qu'exemples d'ensembles, de relations ou d'opérations mathématiques. C'est un premier pas qui attend confirmation.

Le premier « nouveau » plan d'études

Dès les années 80 un besoin d'un vrai changement se fait sentir. La France a abandonné les « maths modernes » depuis plus de 10 ans et de nouveaux paradigmes de l'enseignement des mathématiques sont dans l'air du temps, non seulement en ce qui concerne les contenus, mais aussi les démarches. Les brochures de mathématiques élaborées sur le principe d'un enseignement béhavioriste ont fait leur temps, les enseignants réclament des problèmes à texte et l'exercice plus systématique des techniques mathématiques. Dès 1987-88, degré après degré, un nouveau plan d'études est introduit. Celui-ci comporte des lignes directrices qui expliquent – notable retournement de situation par rapport à l'époque où la géométrie servait à exemplifier les concepts de la théorie des ensembles ! – que « *la notion d'ensemble n'est plus étudiée pour elle-même* » mais est utilisée par exemple pour « *l'étude des lieux géométriques, tout particulièrement[13]* ». Le rôle de la géométrie y est dit *« essentiel »* car *« il permet aux enfants de développer des raisonnements, d'en vérifier par eux-mêmes la validité »,* et *« le dessin géométrique aux instruments développe le travail de qualité et la précision* ». Y est soulignée aussi l'importance de l'illustration géométrique des théories mathématiques. Dans ce PE sont aussi évoqués des problèmes à résoudre à l'aide des théorèmes de Pythagore, de Thalès et de la similitude des triangles (voir annexe).

L'année suivante quatre « *avenues* » sont définies pour chaque degré scolaire, la géométrie étant l'une des quatre. Ainsi, après presque 30 ans de CO, la géométrie retrouve une vraie place dans le PE de mathématiques. Pourtant si elle est officiellement introduite, elle peine à être évaluée dans les épreuves communes et, partant, à s'installer dans les pratiques des enseignants. La plupart du temps, comme le montrent les épreuves communes[14] de

10 La section moderne (M) n'existe qu'à partir de la 8e.

11 Pas encore de géométrie en 9e L-S-M, les trois sections prégymnasiales qui s'ouvrent sur le Collège.

12 Retour à l'ancienne formulation.

13 Cette phrase est abandonnée dès 89-90 !

14 Epreuves élaborées par une commission de maîtres de mathématiques du CO pour être administrées en même temps à tous les élèves d'un même degré et l'époque, l'accent est mis sur la géométrie de construction en 7e, puis sur une géométrie calculatoire s'appuyant sur les théorèmes de Pythagore et de Thalès en 8e et 9e.

La géométrie dans le plan d'études de 2003

Dès 1995, une réflexion est lancée au CO pour une vaste opération de renouvellement de la grille horaire et de tous les PE dans le cadre d'un changement de sa structure. Le groupe de mathématiques s'y attelle et produit en 2001, après les autres « avenues », un document de travail intitulé « *L'avenue GEOMETRIE* » dans lequel un parallèle est fait avec la situation française. En effet, le *Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement* de la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques vient d'être édité, qui affirme :

> *[...] peut-être parce qu'un retour en arrière était psychologiquement impossible, la géométrie n'est pas revenue à ce qu'elle était auparavant, ni sur le plan des contenus, ni sur le plan des méthodes. (Kahane, 2002, p.115)*

Les concepteurs du PE genevois aboutissent à des conclusions similaires : « *une unanimité semble se dégager sur le constat que des pans relativement importants de cet enseignement ont disparu dans les années 60 et que la géométrie n'a pas retrouvé la place qu'elle mérite dans le cours de mathématiques* ». En réalité, cette place, elle ne l'a jamais eue au CO genevois depuis sa création en 1962, jusqu'à la tentative de la restauration de la géométrie de 1987. Approfondissant la problématique, ce texte analyse l'histoire récente des mathématiques et met en évidence la rupture de la fin du XIXe siècle : avec l'avènement des géométries non euclidiennes, « *en tant que 'théories physiques', l'adéquation avec l'espace sensible restait à vérifier* ». En parallèle, la théorie axiomatique de Hilbert a fusionné algèbre et géométrie qui se fécondent mutuellement. « *Les mathématiques modernes s'appuient sur cette vision axiomatique purement formelle pour donner du sens à la géométrie à l'intérieur même des mathématiques, sans plus aucun rapport avec l'espace sensible* ». C'était le pari des mathématiciens du milieu du XXe siècle d'apporter directement aux élèves ce regard sur les mathématiques, avec l'espoir de les rendre plus accessibles. Malheureusement, comme plusieurs didacticiens français l'ont analysé finement ultérieurement, cet enseignement n'a pas donné les résultats escomptés de permettre à tous les élèves de mieux comprendre les mathématiques, et a fait de la géométrie le parent pauvre des programmes, ce que notre promenade dans les PE successifs du secondaire I genevois nous a montré.

Le PE de 2003, rédigé à la suite de cette réflexion, présente pour la géométrie les intentions suivantes : « *modéliser l'espace physique* », « *étudier les figures de la géométrie plane, quelques solides et les isométries* », « *passer progressivement d'une géométrie perceptive à une géométrie théorique en s'appuyant sur les figures et leurs propriétés* » et « *initier les élèves* [au] *raisonnement déductif* », tout cela à travers la résolution de problèmes, nouveau paradigme des mathématiques de la fin du XXe siècle. Mais il est difficile de faire le bilan de ces « hautes » ambitions car le PER[15] est venu remplacer ce PE dès 2011, avant même l'écoulement des 10 années nécessaires pour l'intégration de de nouveaux contenus par les enseignants (Roegiers, 2011).

Conclusion

Revenant à nos questions initiales, cette recherche historique ne permet d'y répondre que partiellement. Il est certain que l'apprentissage de la géométrie théorique est difficile. Comme le met en évidence par exemple Floris (1996) à propos de la construction du triangle aplati[16], des élèves plus âgés que ceux du CO continuent à croire ce qu'ils voient plutôt que le résultat d'un raisonnement qui contredit le dessin :

---

section et corrigées selon des consignes précises, contribuant à l'évaluation certificative des élèves, mais aussi à l'harmonisation des pratiques. De une par trimestre au début du CO, elles ont passé graduellement à une par an.

15 *Plan d'Etude Romand. Le PER sort du champ de cet article.*

16 *Construire un triangle dont les côtés mesurent respectivement a, b et (a+b).*

le passage de la géométrie perceptive à la géométrie théorique ne s'est pas fait, alors qu'à l'époque la géométrie avait été officiellement (ré)introduite au CO. A Genève, à cette difficulté inhérente à la géométrie, s'est ajouté, comme on l'a vu, l'abandon pendant près de 30 ans de ce domaine pour les élèves de l'âge critique de 13-15 ans où le passage du concret à l'abstrait devrait se faire. Les enseignants genevois de mathématiques nés après la guerre et jusqu'au début des années 70 ont justement été élèves à l'époque où le mot même de géométrie avait été supprimé du PE. Quand, au sortir de l'université, où la géométrie est essentiellement formelle, ils sont venus dans l'enseignement, ils se sont trouvés confrontés, en géométrie, à des obstacles d'élèves qu'eux-mêmes n'avaient jamais eu à franchir à l'âge de leurs élèves. Par conséquent, ce domaine leur apparaît souvent encore plus difficile à enseigner et reste mal-aimé.

Références

Bishop, M.-F. (2010). Didactique et perspective historique : à propos d'une recherche sur les écritures de soi à l'école. *Revue Pratiques,* 145-146, 231-248.

Calame, A. (1979). L'enseignement de la géométrie, *Math-école,* 90 Le séminaire de Royaumont 1959-1979. Novembre 1979, 11-16.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (1999). *Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*.

Floris, R. (1996). Quelles situations fondamentales pour l'apprentissage de la géométrie ? *Revue des sciences de l'éducation*, XXII, 2, 365-389.

Kahane, J.-P. (2002). *L'Enseignement des sciences mathématiques.* Paris : Odile Jacob.

Perrenoud, P. (1993). Curriculum : le formel, le réel, le caché. In J. Houssaye (dir.) *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui,* (pp. 61-76). Paris : ESF.

Roegiers, X. (2011). Combiner le complexe et le concret : le nouveau défi des curricula de l'enseignement, *Le français dans le monde, Recherches et applications,* 49, 36-48.

Weiss, L. (2014). Pourquoi la géométrie est devenue espace ? *Math-Ecole*, 222, 18-24.

Plans d'étude et programme du Collège de Genève. 1926 - 1953.

Plans d'étude et programme du Cycle d'orientation. 1962 - 1998.

Curriculum de mathématiques du Cycle d'orientation. 1999-2003.

Annexe :

Principales modifications dans les programmes de géométrie et/ou des notions de ce domaine au secondaire I genevois au cours du XXe siècle.

Année	Institution	Degré scolaire et section (nombre de périodes de mathématiques/nombre de périodes de géométrie si indiqué)	Intitulé	Contenu
1926	Collège inférieur	VII^{e} (3 / 1)	*Géométrie*	*« Angles : notion d'angle, somme des angles d'un triangle. Surfaces : 1) construction de figures, quadrilatères et polygones réguliers, 2) calcul de surfaces : quadrilatères, polygones réguliers, cercle. Lieux géométriques : notions de distance, le cercle, les parallèles. Volumes : le prisme et le cylindre (surface de développement et calcul du volume) » ;*

1926	Collège inférieur	VI^e^ (3 / 1)	*Géométrie*	*« Angles : somme des angles d'un polygone, angle au centre et angle inscrit. Surfaces : secteur, segment, couronne. Lieux géométriques : la médiatrice, la bissectrice, le segment capable. Volumes : la pyramide et le cône (surfaces de développement et calcul du volume) ».*
1926	Collège inférieur	V^e^ (3 / 1)	*Géométrie*	*« Théorème de Pythagore ; démonstrations par surfaces ; applications. Notions de figures semblables. Proportions. Cas simples de comparaison de surfaces entre figures semblables, de volumes entre corps semblables, avec vérification des formules déjà vues ».*
1938	Collège inférieur	VII^e^ (3)	*Géométrie*	Ajouts (par rapport à 1926) : « rapports constants »
1938	Collège inférieur	VI^e^ (3)	*Géométrie*	*Ajouts : « circonférences d'arcs, cordes, tangentes ; transformation graphique de polygones quelconques en triangles et rectangles équivalents la sphère ».* Le théorème de Pythagore est avancé dans ce degré.
1938	Collège inférieur	V^e^ (3)	*Géométrie*	*Ajouts : « surfaces équivalentes, transformations ; notions sur les triangles égaux ; lignes proportionnelles ».*
1953	Collège inférieur	VII^e^ (3)	*Géométrie*	*Précisions (par rapport à 1938) : « Constructions fondées sur les lieux géométriques. Angles au centre, intérieurs et extérieurs ».*
1953	Collège inférieur	VI^e^ (3)	*Géométrie*	*Précisions : « Définitions dans le cercle. Construction de triangles et de quadrilatères inscrits ».*
1953	Collège inférieur	V^e^ (3)	*Géométrie*	*Précisions : « Figures égales, équivalentes, semblables. Lignes proportionnelles. Triangles semblables. Proportionnalité dans le triangle rectangle et dans le cercle. Rapport de similitude. Surfaces semblables, volumes semblables. Troncs de pyramide et de cône, aires et volumes ».*
Création du CO par regroupement de toutes les classes du secondaire inférieur des différentes écoles genevoises				
1962	CO	7^e^ L-S-B (3 ; 3 ; 4)	Pas de géométrie	
1962	CO	7^e^ Groupe C (4)	*Géométrie*	*« Révision, problèmes inverses sur rectangle, triangle, volumes simples. Surface : hexagone, octogone, cercle ».*
1963	CO	7^e^ L-S-G (3, 3, 4 / 1 trimestre)	*Système métrique, mesures de temps et d'angles*	*Généralités (point, figure, droite, etc.).* *Mesure de longueur.* *« Notions » de longueur, d'aire, de volume, de capacité, de masse, d'angle.*
1963	CO	7^e^ P (4)	*Géométrie*	Comme ci-dessus en 7^e^ Groupe C.
1963	CO	8^e^ et 9^e^ L S, G (3, 5, 4-5)	Pas de géométrie	

1963	CO	8e, 9e P (4 garçons, 3 filles)	*Complément géométrique*	*Construction des figures, angles, parallèles, perpendiculaires, axes de symétrie, « emploi généralisé et constant des instruments de géométrie ».*
1964	CO	7e L-S-G (3, 3, 4 / 1 trimestre)	*Tronc commun* *Math. modernes*	*« Notions de ligne, de surface, de corps et leur mesure » ; « système métrique ».* « *Relations* » comprenant le parallélisme et la perpendicularité dans une liste qui comprend aussi par exemple « *l'inclusion* » et « *être multiple de* ». « *Applications* » comprenant les « *applications tirées de la vie courante* », les applications du plan dans lui-même, rotations, translations, symétries centrales et axiales et construction d'angles.
1964	CO	8e L-S-G (3, 5, 4-5)	*Etude des ensembles* *Opérations*	*« Ensembles des triangles, des quadrilatères, des polygones ».* théorème de Pythagore.
1964	CO	9e L-S-G (3, 5, 5-5)	*Liste de notions sans intitulé spécifique*	Homothéties et similitudes ; théorème de Thalès.
1964	CO	8e, 9e P (4+2, 4-3)	*Géométrie*	Constructions géométriques : bissectrices, perpendiculaires, médianes, triangles, quadrilatères, polygones réguliers, symétries, jusqu'à la construction de la tangente en 9e.
1966	CO	8e L-S-G (3, 5, 3, 4)	*Notions sur les ensembles* *Relations*	« Ensembles de points (droites, cercles, demi-plans, angles) ». « Applications du plan dans lui-même ».
1974	CO	7e L-S-G-P (3, 3, 4, 4)	*Notions sur les ensembles*	Longueurs-Aires-Volumes : « construction des angles, de la bissectrice ».
1974	CO	8e L-S-M-G-P (3, 4, 5, 4, 5)	*Notions sur les ensembles*	Précision : les ensembles de points sont « définis par une propriété spécifique des éléments ».
1977	CO	7e L-S-G-P (3, 3, 4, 4)	*Notions sur les ensembles*	Ajout (par rapport à 1976) de la construction de la médiatrice.
1978	CO	7eL-S-G-P (3, 3, 4, 4)	*Géométrie* *Ensembles*	*« Géométrie d'observation (polygones, cercles) », notion de ligne, surface et corps, les longueurs et aires.* *« Lieux des points » (et non plus ensembles des points).*
1978	CO	8eL-S-M-G-P (3, 4, 5, 4, 5)	*Géométrie*	« Croquis et plan », « cercle », « affinité » en plus des applications du plan dans lui-même.

1978	CO	9ᵉG (5)	*Géométrie*	*« Transformations d'unités », « calcul de périmètres et d'aires », « calcul de volumes », « théorème de Pythagore ».*
1987	CO	7ᵉ L-S-G-P (3, 4, 4, 5)	*Géométrie*	Description et construction de figures : utilisation des instruments ; propriétés des triangles, quadrilatères et cercle ; lieux géométriques : médiatrice, bissectrice, cercle ; axe et centre de symétrie. (+ Mesure)
1988	CO	8ᵉ L-S-M-G (4, 5, 4, 5)	*Géométrie*	Constructions géométriques : instruments, « *croquis pour aider au raisonnement* », image d'une figure par symétrie axiale, centrale, translation ; résoudre des problèmes de construction ; propriétés des angles (à côtés parallèles, somme des angles d'un triangle) et cercle de Thalès. (+ Mesure)
1989	CO	9ᵉ L-S-M-G (4, 5, 4, 5)	*Géométrie*	Utilisation des théorèmes de Pythagore et de Thalès pour résoudre des problèmes ; rotations, homothéties, composition d'applications du plan dans lui-même, cas d'isométrie et similitude des triangles, propriétés simples du cercle. (+ Mesure). « *Le maître doit entrainer les élèves à faire des démonstrations* ».
2003	CO	7ᵉ A-B (4, 5)	*Géométrie*	Modélisation de l'espace physique. « *Objets de la géométrie plane et quelques-unes de leurs propriétés* » : droites, cercle, angles, triangles, quadrilatères, médiatrice, bissectrice, hauteurs du triangle et des quadrilatères et isométries. Problèmes de construction et de calculs de longueurs et d'angles. Géométrie perceptive et instrumentée : reconnaissance, description, reproduction de figures, approche expérimentale ; transition vers la géométrie théorique en s'appuyant sur la différence dessin-croquis ; initiation au raisonnement déductif.
2003	CO	8ᵉ A-B (5, 5)	*Géométrie*	Modélisation de l'espace physique. Etude de quadrilatères (centre de symétrie), bissectrice, positions relatives cercle et droite, inégalité triangulaire, distance d'un point à une droite, prismes droits et cylindres de révolution ; symétrie centrale. Transition vers la géométrie théorique ; îlots déductifs.
2003	CO	9ᵉ A-B (4, 4)	*Géométrie*	Modélisation de l'espace physique. Objets de la géométrie plane : triangles et théorème de Thalès, triangle rectangle et théorème de Pythagore, isométries des triangles, similitude et triangles semblables ; géométrie de l'espace : pyramide et cône de révolution. Privilégier la géométrie théorique perception et mesures servant à produire des conjectures. Ilots déductifs.

La géométrie au service de la construction du dessin figuratif auprès d'enfants TED[1]

Emmanuelle Monnier

Éducatrice spécialisée à Genève

En tant qu'éducatrice spécialisée dans un Centre Médico Pédagogique (CMP) genevois, je me vois confier des ateliers variés avec des petits groupes d'enfants. Alors que l'enseignante spécialisée a pour mission de se centrer sur les apprentissages scolaires, mon mandat est davantage lié à l'accompagnement des élèves dans leur quotidien scolaire avec une approche socio-éducative. Vous verrez toutefois, au fil de mon article, à quel point les frontières sont parfois perméables entre ces deux métiers.

Dans cet article, je vais décrire une série d'activités lors desquelles j'ai employé des formes géométriques comme aide à la construction du dessin figuratif chez un élève TED.

Contexte

Avant d'entrer dans les détails de l'expérimentation réalisée en classe, il est nécessaire de donner quelques précisions sur le cadre. Au sein de mon Centre de jour, un système de co-référence est mis en place où, pour chaque élève, un enseignant et un éducateur collaborent. Cette co-référence a pour objectif de proposer des activités appropriées pour chaque élève afin qu'il développe des compétences spécifiques en fonction de son âge et de son niveau scolaire et social.

Le CMP dont il est question accueille des enfants de 3 à 7 ans présentant un trouble envahissant du développement, plus particulièrement des enfants autistes avec un retard global du développement. Ce CMP fonctionne sur la base de l'enseignement structuré (Méthode TEACCH[2]) que je ne développe pas dans cet article. La suite d'activités qui va être décrite est menée essentiellement par moi-même qui suis éducatrice spécialisée, mais en collaboration avec l'enseignante référente. La suite d'activités se déroule autour d'une table avec un seul enfant de 6 ans. Arthur[3] est « non-verbal ». Cela signifie que c'est un enfant pour qui la communication n'est pas en place et donc qu'il parvient difficilement à établir la communication par ce biais-là[4]. Il présente de bonnes compétences de compréhension face aux consignes. La suite d'activités que je vais présenter a lieu une fois par semaine durant environ cinq minutes, car Arthur peut difficilement rester plus longtemps sur une même tâche. Cela devient ainsi une sorte d'activité ritualisée qui convient aux particularités de cet élève. Durant ce laps de temps, les autres enfants du groupe sont occupés de manière autonome, à d'autres activités dans la même pièce.

Arthur

Arthur montre de l'intérêt pour les exercices grapho-moteurs[5]. Il apprécie de laisser des traces sur le papier et est capable de reproduire des formes géométriques. Ces dessins ne sont toutefois pas figuratifs. Ces constats ont été établis sur la base du test d'évaluation PEP-3, Profil Psycho-Educatif, ainsi que sur mes propres observations. Le test est un outil d'évaluation pour enfants présentant des troubles du développement et, en particulier, les enfants ayant de l'autisme. Il a pour but de mettre en évidence des profils autour de plusieurs domaines développementaux (cognition verbale /préverbale, langage expressif, langage réceptif, motricité fine, motricité globale, imitation visuo-motrice). Afin de construire la suite d'activités que je décris dans cet article, je me suis basée sur deux de ces domaines : la motri-

1 *Troubles Envahissants du Développement.*

2 *Treatment and Education of Autistic and related Communication handicapped CHildren.*

3 *Prénom fictif.*

4 *Arthur communique toutefois grâce au langage gestuel, avec des sons et à l'aide de pictogrammes.*

5 *Il s'agit d'exercices de pré-écriture de type « repasser sur des traits en pointillés », etc. afin de développer la maîtrise du geste et la structuration spatiale comme étant des prérequis à l'entrée dans l'écriture.*

cité fine (exercice de grapho-motricité) et la cognition verbale-préverbale en ce qui concerne les formes.

Suite à ce constat, l'objectif fixé pour Arthur était qu'il puisse développer le dessin figuratif. En effet, il était à ce moment-là dans l'impossibilité de dessiner les objets qui l'entourent (ou du moins une représentation symbolique de ceux-ci). Par exemple, il n'est pas en mesure de dessiner un bonhomme. Pourtant Arthur est capable de montrer sur lui-même les différentes parties de son corps comme les bras, les mains, les jambes, les pieds, la tête, les yeux, les oreilles. Il a donc conscience de son schéma corporel.

Dès lors, il m'est apparu que de passer par les formes géométriques pourrait être un moyen pour qu'Arthur se représente les objets qui l'entourent, qu'il perçoive davantage comment ils sont constitués. Ce fut alors le début d'une aventure faite de découvertes et de rebondissements. Tout d'abord, il m'a été pointé, à juste titre, qu'il ne s'agissait pas tant de reproductions d'objets qui entourent Arthur que je proposais, mais de représentations symboliques d'objets qui nous entourent. En effet, nous nous accordons pour dire que le bonhomme (Image 1) est bien un bonhomme, alors que dans la réalité il ne s'en approche que vaguement ! Nous pourrions dire la même chose avec le modèle 3 (Image 3) qui est un bonhomme avec des pieds triangulaires… Ainsi, mon objectif pour Arthur était avant tout qu'il puisse décomposer les objets qui nous entourent à l'aide de compositions de pièces géométriques mettant en évidence les différents éléments saillants de l'objet : une tête, un tronc, deux jambes et deux bras. Avec l'hypothèse que cette décomposition permettrait de passer de représentations d'objets symboliques à des objets plus figuratifs. C'est ainsi que j'ai introduit dans mes séances de la géométrie !

Je me suis donc lancée dans l'élaboration de cette suite d'activités en découpant des ronds, des carrés et des rectangles afin de pouvoir confectionner des objets. J'ai débuté par un objet relativement commun : un bonhomme.

Je débute en faisant un modèle sur le sous-main. Je pose le rond pour la tête, le carré pour le corps et les rectangles pour les membres. La tâche est donc qu'Arthur reproduise la même chose sans aide. C'est un enfant qui présente de bonnes capacités de discrimination visuelle, ce qui lui permet de réussir avec succès l'exercice proposé. Pendant plusieurs séquences nous répétons ce même exercice. Puis je propose à Arthur de le faire seul. Je lui donne les pièces les unes après les autres afin qu'il puisse sans modèle reproduire le bonhomme. Il y arrive avec succès et est même capable d'ajouter des yeux, un nez, une bouche et des cheveux sur les formes avec un stylo. Ce dernier point montre une avancée intéressante par rapport à mon objectif initial pour Arthur.

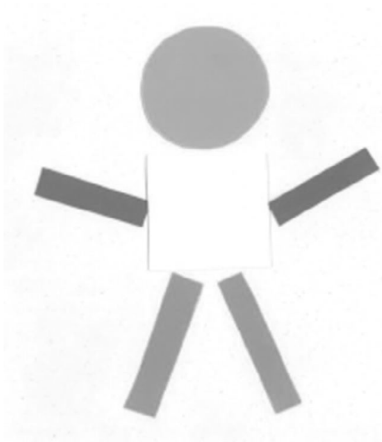


Image 1

Je décide alors de procéder de la même manière pour lui faire faire une maison (Image 2). Le toit représenté par un triangle, la base de la maison par un carré et la porte par un rectangle. Cela s'avère très

Image 2

concluant et facile à exécuter.

Je poursuis alors avec un bonhomme qui est plus complexe que celui proposé lors de la première activité (Image 3). Il comporte des mains, des pieds, des yeux et un chapeau sur la tête. L'objectif ici est uniquement qu'Arthur puisse reproduire terme à terme le bonhomme plus complexe que le premier.

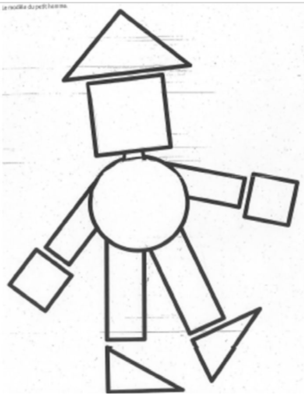


Image 3

Au début de l'activité Arthur superpose les pièces sur le modèle. Il doit durant cette étape manipuler les formes afin de trouver leur bonne orientation. Nous reprenons cet exercice durant plusieurs séances.

L'étape 2 consiste à ce que l'enfant reproduise le modèle non pas en superposant les formes au modèle, mais à côté du modèle. Cette étape est plus difficile à exécuter. Du coup je lui donne les pièces dans l'ordre les unes après les autres afin de faciliter la tâche (du haut (avec le chapeau) vers le bas). Cette étape dure également plusieurs séances pour arriver à l'étape 3 qui consiste à ce qu'Arthur puisse par lui-même, sans aide, reconstituer le bonhomme avec toutes les pièces et sans modèle.

Ma collègue enseignante me propose alors de passer à une activité de type[6] « tangrams ». Les modèles proposés avec les « tangrams » proposent des assemblages où les formes ne sont pas forcément toutes disposées sur leur base. Par exemple, le triangle peut être posé sur un de ses sommets plutôt que sur sa base. Ainsi Arthur manipule les formes en leur faisant faire des rotations. Il découvre que les formes se positionnent différemment en fonction de leur orientation. Il se trouve que de nombreuses recherches, que ce soit en psychologie ou en didactique des mathématiques, montrent que l'on reconnait davantage un carré lorsqu'il est posé sur sa base plutôt que sur l'un de ses sommets.

> *« La reconnaissance d'un certain exemplaire appelé prototypique est meilleure que celle des exemplaires non prototypiques. Les exemplaires prototypiques seraient ainsi un carré posé sur sa base, un rectangle ayant des longueurs une fois et demie à deux fois plus longues que les largeurs et un grand côté posé à l'horizontale, un triangle équilatéral posé horizontalement » (Gentaz, 2013, p.3).*

De plus, dans de nombreuses propositions de modèles de « tangram » à reproduire, les formes se « collent » de sorte à ne plus pouvoir distinguer les différents éléments par rapport à l'ensemble. Ce dernier point nécessite un niveau d'abstraction plus élevé. Une autre différence par rapport à ce qui a été fait jusque-là concerne les silhouettes représentées qui sont plus suggestives.

Ma collègue enseignante me propose de réaliser le bateau (Image 4). Ce modèle est plus complexe car l'orientation des formes diffère encore plus que pour le bonhomme de leur orientation habituelle et que la base du bateau est découpée en 3 formes distinctes accolées (bien que délimitées par un trait blanc laissant apparaître les traits de constructions).

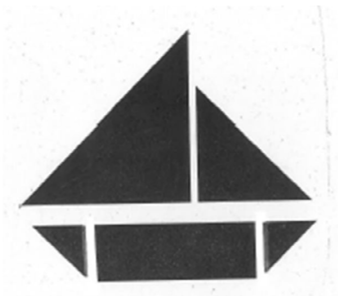


Image 4

La méthode de travail est identique (super-

6 *Il ne s'agit pas des pièces officielles du « tangram », car comme le montre le modèle 4, le rectangle est utilisé pour la base du bateau alors qu'il n'existe pas dans les pièces du « tangram ».*

poser sur le modèle, reproduire avec le modèle en vue et reproduire sans modèle). Arthur présente toutefois plus de difficultés avec ce modèle qu'avec les précédents. Il a de la peine à retrouver la place et l'orientation des triangles de la base du bateau. Je dois alors reprendre l'exercice avec lui et lui montrer que les triangles peuvent se positionner autrement en les manipulant. Il réussit toutefois à le faire, mais pas sans modèle.

Tout au long de ces périodes de travail, j'ai pu disposer du matériel de mathématique de ma collègue enseignante. J'ai également pu bénéficier de quelques conseils d'une formatrice en didactique des mathématiques par rapport, non pas aux difficultés propres à la pathologie d'Arthur, mais propres aux choix des modèles à reproduire en fonction de leur complexité. Par exemple, pour le bateau il m'a été conseillé de rendre visible le pourtour de chacune des formes afin qu'Arthur puisse voir les formes individuellement.

Conclusion

Au fil des séances, qui ont duré plusieurs mois[7], je demandais régulièrement à Arthur de dessiner un bonhomme afin d'observer si ses productions évoluaient vers des dessins plus figuratifs. Il s'avère que plus le temps avançait et plus les bonshommes d'Arthur se complexifiaient[8]. Actuellement, sur demande de ma part, Arthur peut dessiner un bonhomme ou un bateau (Image 5).

Ainsi, c'est comme si le fait de décomposer des objets de son environnement à partir de formes géométriques l'avait aidé à se faire une représentation symbolique de ces objets, lui permettant de les dessiner. Ces dessins sont dorénavant figuratifs. Mon objectif est donc a priori atteint.

Si j'emploie le terme a priori, c'est parce que de nouveaux événements sont venus remettre en question ces premières conclusions. Comme le processus de rédaction

Dernière production d'Arthur du 5 juin 2014

Image 5

d'un article est long, une nouvelle information relative à Arthur a pu être introduite au dernier moment. Il se trouve qu'Arthur a passé une nouvelle fois l'évaluation du test PEP-3 en octobre 2014 et que malheureusement il n'a pas été en mesure de dessiner un bonhomme à la demande de l'évaluatrice. Ce fut pour moi une déception, mais aussi le début d'un nouveau questionnement par rapport à Arthur et la réorientation de mes activités. Il est en effet connu que les enfants autistes ont de grandes difficultés à la généralisation. C'est pour cette raison qu'en dehors du rituel de notre atelier il n'a pas pu réinvestir ses connaissances, alors qu'il continue à le faire avec moi au quotidien.

Finalement, et pour conclure, il m'a paru essentiel d'avoir pu échanger avec d'autres professionnels sur mon expérience avec Arthur. Il s'avère que sans ces collaborations éducatrice-enseignante et éducatrice-formatrice universitaire, mon travail n'aurait peut-être pas été le même. De par ma formation, je n'ai en effet jamais été sensibilisée à l'enseignement des mathématiques et à la didactique. C'est donc avec surprise et beaucoup d'intérêt que j'ai découvert la graduation des difficultés entre les différents types de modèles à reproduire avec les pièces du « tangram ». Maintenant, je mesure pleinement, l'impact du nombre de formes, de leur variété ainsi que de leur orientation sur la réussite des élèves. Il s'agit donc de variables sur lesquelles « jouer » auxquelles je n'avais pas nécessairement pensé. Peut-être ce n'est pas une nouveauté pour les chercheurs ou pour les

7 Les activités de ce type ont duré de janvier à juin. D'autres activités ont donc eu lieu. Les séances présentées dans cet article sont celles qui, selon moi, démontrent de manière significative la progression d'Arthur.

8 Je n'ai malheureusement plus les traces des dessins initiaux.

enseignants, mais pour ma part ce fut une découverte que je souhaite partager avec d'autres professionnels de l'éducation.

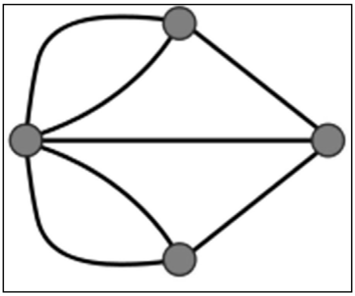
A travers cet article, je restitue donc mon expérience d'éducatrice spécialisée qui s'est vue enrichie de par ma collaboration avec d'autres professionnels. Et qui sait si cette collaboration ne va pas me faire découvrir encore d'autres surprises…

Références

Gentaz, E. (2014). Comment aider les enfants de 5-6 ans à connaître les figures géométriques planes ? Le point de vue des sciences cognitives de l'éducation. *Acte du XXXX colloque COPIRELEM*, (pp.81-86). Nantes, France.

Solution du problème Les 7 ponts de Koenigsberg (tiré de Wikipedia)

La représentation sous forme de graphes



Une telle promenade n'existe pas, et c'est Euler qui donna la solution de ce problème en caractérisant les graphes que l'on appelle aujourd'hui « eulériens » en référence à l'illustre mathématicien, à l'aide d'un théorème dont la démonstration rigoureuse ne fut en fait publiée par Carl Hierholzer qu'en 1873.

Ce problème n'a sous cette forme non généralisée qu'un intérêt historique, car pour ce cas, il est assez intuitif de démontrer que la promenade demandée n'existe pas. Pour voir cela, il suffit d'associer un graphe à la ville comme dans la figure ci-dessus et de supposer que la promenade recherchée existe. On peut alors, à partir de la promenade, ordonner les sept arêtes du graphe de façon à ce que deux arêtes consécutives par rapport à notre ordre soient adjacentes dans le graphe (en considérant que la dernière et la première arête sont consécutives, puisqu'il y a retour au point de départ).

Ainsi tout sommet du graphe est-il nécessairement incident à un nombre pair d'arêtes (puisque s'il est incident à une arête il est aussi incident à l'arête précédente ou qui lui succède dans l'ordre). Mais le graphe a des sommets qui sont incidents à trois arêtes, d'où l'impossibilité.

Notons que même si on renonce à exiger le retour au point de départ, une promenade traversant une et une seule fois chaque pont n'existe pas. Elle existerait si au plus deux sommets du graphe, correspondant aux points à choisir respectivement comme départ et arrivée, étaient incidents à un nombre impair d'arêtes, or les sommets du graphe des ponts de Königsberg sont tous les quatre dans ce cas ; la promenade est donc impossible. Il suffirait cependant de supprimer ou de rajouter un pont quelconque pour que le graphe modifié permette des promenades sur tous ponts sans retour (seuls deux sommets restant d'incidence impaire). Et ce sont au moins deux ponts, bien choisis, qu'il faudrait ajouter ou retirer pour permettre la promenade avec retour initialement cherchée.

On peut donner à ce problème une solution moins théorique. Il suffit de remarquer qu'il y a quatre zones, les deux rives et les deux îles, chacune reliée aux autres par un nombre impair de ponts. Ce nombre impair fait que si l'on entre dans une région R, on doit y rester. Or on ne peut finir sa promenade dans plus d'une de ces quatre régions.

Quelle initiation à la géométrie déductive ? Quelques propositions issues de la recherche en didactique des mathématiques

Ruhal Floris

Université de Genève

Introduction

Dans le Plan d'études romand, à propos de la géométrie, on trouve dans la colonne « indications pédagogiques » le texte suivant :

> *Au cycle 3, les élèves doivent instaurer un autre rapport aux représentations graphiques en géométrie en les considérants comme des représentations d'un objet idéal (figure). Cette représentation étant très prégnante, elle suffit à beaucoup d'élèves comme preuve (« je vois donc je crois ») alors qu'à ce stade de la scolarité, il faut privilégier une approche basée sur les propriétés des figures. Pour favoriser ce passage du perceptif aux propriétés des objets géométriques, il est bon de permettre aux élèves de faire la distinction entre « figure », « dessin », « croquis ».*

Cette remarque pose assez précisément le problème. Malheureusement, on ne peut pas dire que la dernière phrase fournisse des éléments opérationnels. Le plan d'études lui-même est également assez vague, on y lit :

> *« Reconnaissance, dénomination, description de figures planes selon leurs propriétés ».*

Ainsi donc, comme pour d'autres sujets, la responsabilité de l'enseignant est engagée. Souhaitons que cette revue de propositions et d'analyses l'aide un peu dans ses choix[1].

La question de la transition du dessin à la figure[2], et plus généralement celle de l'instauration d'une géométrie hypothetico-déductive a fait l'objet de très nombreuses recherches. Dans cet article nous nous proposons de présenter certaines d'entre elles, que nous estimons significatives. Nous présentons également la façon dont certains enseignants en formation initiale ont abordé la question en utilisant des logiciels de géométrie dynamique à travers un récit d'épisode de formation.

Propositions dans le cadre de la théorie des situations

Dans leurs travaux, Berthelot et Salin (1992, 2005) se réfèrent à la Théorie des situations didactiques (TSD, Brousseau, 1998) afin de développer des propositions de problèmes basés sur des principes adidactiques, c'est à dire favorisant l'autonomie et la prise de responsabilité de l'élève par rapport à la connaissance. Ils postulent que l'entrée dans une géométrie de figures peut être facilitée par une problématique de modélisation. L'idée principale est de proposer des problèmes définis en dehors de la feuille de papier, comme dans le préau par exemple, dont la résolution nécessite l'élaboration d'un croquis voire d'un plan sur la feuille de papier.

Voici un exemple avec la situation des drapeaux (Berthelot et Salin, 2005, p.125, reprise de Brousseau G. et N., 1987). Il s'agit de mesurer la distance entre deux drapeaux plantés au bord d'un terrain non accessible (pelouse, étang). Le croquis ci-dessous illustre des solutions réalisables en restant dans l'espace réel et en y effectuant des mesures. Selon les connaissances géométriques à disposition, d'autres solutions sont possibles autant dans la réalité qu'en traçant un plan sur papier.

---

1 Dans cet article nous n'avons pas la prétention d'être exhaustifs et présentons simplement des éléments qui nous paraissent intéressants et invitent le lecteur à des approfondissements, que de nombreuses références en ligne devraient favoriser. Pour des revues plus complètes, voir Perrin-Glorian et al. (2013) ainsi que Perrin-Glorian & Salin (2009).

2 La figure géométrique est un objet qui se réfère à une théorie (la géométrie euclidienne par exemple) alors que le dessin est une trace matérielle présente sur la feuille de papier ou sur l'écran de l'ordinateur (Laborde C., Capponi B. ,1994).

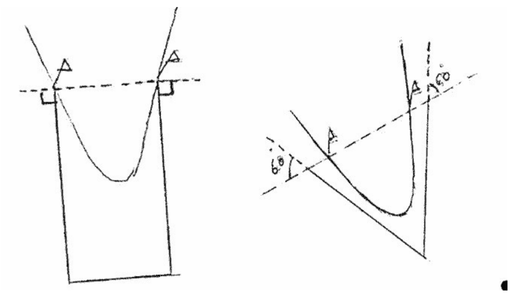


Fig.1 et 2 Situation des drapeaux (d'après Berthelot et Salin, 1992, 2005)

Cette situation a été adaptée[3] pour être proposée à des instituteurs en formation.

Un autre exemple, toujours en référence à la TSD, développé par Brousseau (1987), propose une situation d'entrée adidactique dans la géométrie déductive, basée sur un défi impossible, celui d'agrandir le triangle que l'on obtient en dessinant trois médiatrices d'un triangle très obtus (au lieu du point unique théorique). La particularité de cette situation est qu'elle est fondée sur une macro rupture de contrat didactique, puisque l'enseignant laisse croire que l'intersection des médiatrices d'un triangle n'est pas un point. Si dans d'autres situations il y a aussi souvent ruptures de contrat, celles-ci sont en quelque sorte internes à la situation, par rapport aux stratégies de base attendues des élèves, comme dans l'exemple de l'agrandissement du puzzle[4] où le choix judicieux des variables numériques permettra de disqualifier certaines procédures d'élèves (Brousseau, 1998 p. 237). Mais dans le cas considéré, il s'agit d'autre chose que de changer de stratégie, il s'agit de faire opérer une modification du rapport des élèves aux déclarations sur les objets géométriques. Rappelons que ce rapport est, à la fin de l'école primaire, de type « je vois, donc… » (Berthelot et Salin, 1992 ; Chevallard et Jullien, 1990). Il ne semble pas évoluer vers « je sais donc… » pour des adultes n'ayant pas été initiés de façon constante et approfondie à une culture géométrique euclidienne. Nous avions proposé ce défi impossible (ci-dessus) à des élèves de 15-16 ans du Collège de Genève[5] car nous nous étions rendus compte que nombre d'entre eux rencontraient encore des difficultés pour entrer dans la géométrie théorique[6], souvent peu travaillée à l'école secondaire inférieure à Genève. Ces mêmes difficultés étaient présentes chez de futurs instituteurs ou d'enseignants non mathématiciens lors de formations continues.

On trouvera dans Floris (1996) une description et une analyse de cette situation et de son expérimentation. Dans cette même perspective de problématisation de l'entrée dans la géométrie euclidienne, on trouve le problème du triangle aplati, qui a donné lieu à de nombreux articles (Berté, 1996 ; Floris, 1995).

Bien entendu, il n'est pas question d'imaginer que des situations isolées soient suffisantes pour permettre une évolution durable vers un rapport théorique à la géométrie étant donné la nature profondément culturelle et sociale du concept de démonstration (Arsac,1987). Plusieurs chercheurs ont proposé des cadres théoriques permettant d'analyser différents rapports au savoir possibles dans les activités géométriques.

Differents types de rapports à la geometrie : analyses et propositions

La réflexion de Noirfalise (1993) conduit à mettre en évidence, en analysant des manuels du collège (français, cette fois, donc de l'école secondaire obligatoire) que l'élève peut satisfaire au contrat déterminé par une grande partie des exercices de géométrie en tenant deux positions distinctes : l'une empirique dans laquelle l'élève associe les propriétés des figures aux constructions qu'il effectue et l'autre rationnelle, plus idoine à ce qui sera attendu en termes de démonstration, dans laquelle les propriétés peuvent être déduites les unes des autres. Ces deux positions s'accompagnent de gestes[7] non antagonistes[8], ce

3 *Dans un hall, avec utilisation de cônes routiers et de ficelles. Voir aussi une variante dans Perrin-Glorian & Salin (2009), p. 66.*

4 *Activité FA14 dans le livre de l'élève de 9^{e}, Mathématiques 9-10-11, LEP et CDIP, 2011.*

5 *Nom des gymnases genevois.*

6 *Hypothetico-déductive.*

7 *Activité de l'élève au sens large.*

8 *Plus précisément la même propriété peut être induite*

	Géométries non axiomatiques		Géométries axiomatiques	
type de géométrie	concrète (G0)*	axiomatique (G1)	proto-axiomatique (G2)	axiomatique (G3)
objets	physiques		théoriques	
validations	perceptivo-déductive		hypothético-déductives	

*A proprement parler G0 n'est pas une géométrie.

Tableau Parzysy

qui explique la persistance de la première position.

Dans cette perspective, un enseignement fondé sur une explicitation d'un contrat de type hypothético-déductif a été expérimenté avec succès (selon Noirfalise, 1993 ; voir aussi Maze, 1992)[9].

Parzysz (2007), définit quatre paradigmes (cf. tableau) et montre que dans certains problèmes, trois d'entre eux peuvent coexister et générer une ambiguïté forte (l'évidence de la figure pose confusion), selon les gestes de l'élève (dans l'article il s'agit d'enseignants de l'école élémentaire en formation). Il y analyse la dialectique de ce qu'il appelle le *su* et le *perçu* ; autrement dit la dialectique entre le « je vois donc je crois » et « je sais donc je vois ». Il propose ainsi de se baser sur ce type de problèmes pour provoquer un débat que la médiation de l'enseignant peut porter à un niveau théorique (G2)[10].

L'exploitation de la géométrie dynamique

Le logiciel Cabri-géomètre a été conçu il y a plus de vingt ans dans le but de favoriser l'apprentissage de la géométrie. Depuis, d'autres logiciels de géométrie dynamique ont été développés, tel GeoGebra, actuellement souvent utilisé par les enseignants. Ces environnements ont donné lieu à de nombreuses recherches, qui ont mis en évidence leurs potentialités ainsi que certaines difficultés. Pour Capponi (2000) :

« Le passage du dessin à la figure est favorisé dans un tel environnement puisque l'élève doit produire une procédure plutôt qu'un dessin. L'élève qui construit agit ainsi sur la figure avec les outils du logiciel et l'enseignant peut profiter de cette production de procédure pour demander à l'élève d'en faire une description sous la forme d'un texte. Cette explicitation constitue une phase importante du travail de la géométrie de traitement au collège. De surcroît, le déplacement de la figure et la conservation des propriétés constituent un moyen puissant pour la validation et la production de conjectures. […] Mais la question reste posée de savoir si cette géométrie expérimentale, dans un environnement logiciel, est intéressante et/ou utile pour conduire les élèves vers des démarches de preuves et de démonstration. » (p.39-40)

Et si les recherches fournissent des réponses plutôt positives, elles montrent surtout le rôle important de l'enseignant dans un tel processus. Les articles (en ligne) de Capponi (op. cit.) et de Soury-Lavergne (2011) avec leur bibliographie fournissent des exemples et des développements très riches.

Plutôt que de développer ces recherches, nous avons choisi de présenter un épisode de formation qui peut servir de piste pour l'enseignant de 9ème année (12 ans) chargé d'enseigner aux élèves à « élaborer des cheminements déductifs » selon le Plan d'études romand.

Ce dernier prévoit, pour ce degré scolaire, l'étude des droites particulières du triangle (médiatrices et bissectrices en particulier). Devant mettre en place une séquence d'enseignement intégrant l'utilisation de

à partir d'une construction ou en appliquant un théorème ou un axiome.

9 En proposant explicitement aux élèves un jeu de déduction de propriétés.

10 A noter dans une perspective similaire, les travaux de Houdement & Kuzniak (2000, 2006).

logiciels informatiques, plusieurs stagiaires de l'institut de formation des enseignants de Genève ont choisi ce thème[11]. L'étude de la médiatrice leur fournit un sujet intéressant pour travailler la géométrie déductive, puisqu'il y a deux possibilités de la définir : d'une part comme droite perpendiculaire à un segment passant par le milieu de ce segment et d'autre part comme lieu de points équidistants de deux points donnés. Parzysz (2007) décrit une expérimentation dans laquelle il met en évidence le caractère algorithmique, non théorisé, des traitements d'exercices portant sur la justification de l'égalité entre les deux objets par une partie des instituteurs en formation.

Voici un exemple d'interactions possibles offertes par GeoGebra, observées par un stagiaire lors d'une séquence et après avoir travaillé sur la définition de la médiatrice comme lieu de points[12] :

> *« Pour montrer l'identité de la médiatrice comme lieu géométrique d'une part et comme droite coupant le segment en son milieu et perpendiculaire à ce segment d'autre part, nous avons fait tracer les élèves sur GeoGebra dans l'ordre suivant : d'abord la commande « médiatrice » puis la construction de la perpendiculaire. Or la conclusion qu'on attendait des élèves, à savoir l'identité des deux droites construites n'est pas venue spontanément dans bien des cas. Selon nous, la raison principale vient du fait qu'après avoir fait tracer la médiatrice du segment [AB] avec l'outil « Médiatrice » de Geogebra, si l'on demande au logiciel de tracer la perpendiculaire à [AB] passant par son milieu, GeoGebra fait apparaître directement la droite en épaississant la médiatrice. La plupart des élèves ont eu du mal à aboutir seuls à la conclusion recherchée : il faut avoir imaginé que ces 2 droites puissent être différentes pour que leur superposition devienne remarquable.*
>
> *Il se trouve qu'il y avait dans ce cas une solution à ce problème : inverser l'ordre de construction. En effet, si on construit d'abord la perpendiculaire à [AB] qui passe par son milieu puis la médiatrice (avec la commande « Médiatrice »), cela change tout. Lorsqu'on utilise l'outil « Médiatrice », une fois le point A cliqué, lorsque l'on déplace la souris, GeoGebra affiche en permanence la médiatrice entre A et le pointeur de la souris. Ainsi lorsque ce pointeur se rapproche de B, on voit clairement deux droites différentes qui se rapprochent l'une de l'autre jusqu'à se confondre. On a donc les deux alternatives sous nos yeux : deux droites différentes puis deux droites identiques. Dans la première procédure, on ne voyait pas ces deux alternatives, ainsi on ne comprenait pas ce qu'il pouvait y avoir de remarquable à ce que les deux droites soient superposées puisqu'on n'avait pas à l'esprit qu'elles puissent être différentes (et qu'il n'y a aucune raison qu'elles le soient a priori) ».*

Cette observation n'est pas sans rappeler les situations citées précédemment comme celle du triangle aplati ou du triangle le plus grand possible obtenu en traçant les médiatrices des côtés d'un triangle obtus. Elle fournit des pistes pour développer un enseignement travaillant la relation entre les deux définitions afin d'introduire à cette occasion des éléments de géométrie G2 (proto-axiomatique)[13].

Conclusion

La question de l'entrée dans la géométrie déductive est complexe et les recherches survolées ici mettent ceci en évidence, tout en proposant des éléments de réflexion et des pistes pour l'enseignement. A cela s'ajoute l'idée qu'il s'agit d'un thème difficile, et non prioritaire dans les filières ne préparant pas aux études gymnasiales[14]. Nous pensons cependant que ce serait renier l'un des objectifs culturels de l'enseignement des mathématiques que de re-

11 Le Plan d'études romand prévoit explicitement l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique.

12 Observation d'une activité MITIC (TICE) par J.-D. Picon, enseignant au secondaire.

13 La géométrie dynamique peut être aussi exploitée pour travailler la définition de la médiatrice par l'équidistance.

14 « élaboration de cheminements déductifs basés sur des figures géométriques » n'est pas une attente fondamentale pour les niveaux 1 et 2 du Plan d'études romand, même si cela fait partie des objectifs pour tous les niveaux.

noncer complètement à des éléments de géométrie déductive. La problématique de modélisation ou l'utilisation judicieuse de la géométrie dynamique peut contribuer à intéresser des élèves des niveaux non gymnasiaux. Pour cela, une perspective consisterait à sortir de la classe : soit direction le préau, soit direction l'atelier informatique.

Références[15]

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques,* 8(6), 267-312.

Berté, A. (1996-1997). Progressions et problématiques en géométrie à partir d'un exemple : l'inégalité triangulaire. *Petit x* 45, 41-53. [Page Web]. Accès : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/45/45x4.pdf

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse. LADIST, Université de Bordeaux 1. [Page Web]. Accès : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065

Berthelot, R. & Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie In M.H. Salin, P. Clanché & B. Sarrazy (eds.), *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau. (pp.125-142)*. La Pensée Sauvage : Grenoble.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage : Grenoble.

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* IREM de Bordeaux. [Page Web]. Accès : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/fr/

Brousseau, G. (1987). Didactique des mathématiques et questions d'enseignement : proposition pour la géométrie. *Les sciences de l'éducation*, 1-2, 86-100.

Capponi, B. (2000). De la géométrie de traitement aux constructions dans Cabri-géométre II au Collège. *Repères-Irem*, 40, 11-42.

Chevallard, Y. & Jullien, M. (1990-91). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège -première partie. *Petit x*, 27, 41-76.

Floris, R. (1995). La géométrie traite-t-elle des illusions d'optique ? Quatre élèves aux prises avec le triangle aplati. *Petit x*, 39, 29-53. [Page Web]. Accès : http://www.irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/39/39x3.pdf

Floris, R. (1996). Quelles situations fondamentales pour l'apprentissage de la géométrie ? *Revue des Sciences de l'Education*, XXII-2, 365-389.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 89-116.

Laborde C. & Capponi B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1,2),165-210.

Maze, M. (1992). Initiation à la démonstration en classe de sixième. *Bulletin de liaison IREM de Clermont*.

Noirfalise, R. (1993). Contribution à l'étude didactique de la démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques*, 13(3), 229-256.

Parzysz, B. (2007). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di ricerca in Didattica* 17, 121-144. [Page Web]. Accès : http://math.unipa.it/~grim/quad17_BParzysz_07.pdf

Perrin-Glorian, M.-J. & Salin, M.-H. (2009). Didactique de la géométrie. Peut-on commencer à faire le point ? In L. Coulange & C. Hache (eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. (pp.47-82)*. Paris 7 ARDM & IREM, [Page Web]. Accès : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/actes_seminaire_national_de_didactique/Actes%20du%20S%C3%A9minaire%20National%20de%20Didactique%202009.pdf

Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique, *revue en ligne MathemaTICE*, Sesamath [Page Web]. Accès : http://revue.sesamath.net/spip.php?article364

15 Toutes les références Internet consultées mi-octobre 2014.

A propos de triangles

François Jaquet

Rallye mathématique transalpin

Introduction

Depuis 22 ans, le Rallye mathématique transalpin (RMT) propose des problèmes à des milliers de classes d'Italie, France, Luxembourg, Belgique et Suisse, dans des conditions bien particulières : épreuves de 5 à 7 problèmes, à résoudre en 50 minutes, sous l'entière responsabilité de la classe (en absence de l'enseignant remplacé par un collègue « surveillant »), avec remise d'une seule réponse par problème accompagnée des explications sur la manière dont les solutions ont été trouvées[1].

En vingt ans, le RMT a accumulé des analyses, observations et autres résultats sur un millier de problèmes qu'il est en train de regrouper dans une « banque de problèmes ».

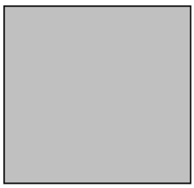
Pour se donner une idée de l'ampleur et de la nature de ce recueil de données, nous présentons ici les premières analyses des copies rendues par des classes d'élèves de 8 à 12 ans[2] de Suisse romande à propos de deux problèmes du 22^{e} RMT résolus au printemps dernier, qui font intervenir la perception de triangles, la confrontation entre mesures de longueurs et mesures d'aires et les pavages.

Pour chacun d'eux l'article présente l'énoncé, le choix du contexte, la tâche de l'élève dans la résolution du problème, quelques données statistiques et, avec plus de détails, les analyses des copies reçues. Il se conclut par quelques réflexions sur l'usage de ces données.

Premier problème : Triangles envolés

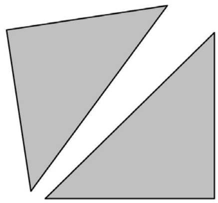
Triangles envolés (Cat. 3, 4, 5, 6)

Albert avait un carré de carton gris.



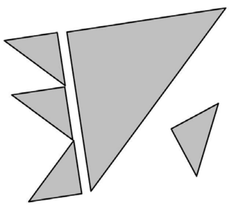
Le carré d'Albert

Il l'a découpé en deux triangles égaux :



Les deux triangles

Puis Albert a découpé un des deux triangles en petits triangles tous égaux.



Mais le vent a emporté quelques-uns des petits triangles. Il n'en reste plus que quatre :

Sur la figure ci-dessus, on voit que l'on peut aligner exactement trois des petits triangles égaux sur un côté du grand triangle.

Dessinez sur le carré d'Albert le grand triangle restant et tous les petits triangles.
Combien de petits triangles se sont-ils envolés ?

1 *Pour en savoir plus, voir le site www.armtint.org ous la rubrique « présentation du Rallye ».*

2 *Catégories 3 à 6 du RMT, $5^{è}$ à $8^{è}$ HarmoS pour la Suisse.*

Les choix du contexte et de l'énoncé

Entre l'idée d'origine et l'énoncé définitif d'un problème du RMT, le chemin est parfois très long, constitué d'échanges, d'écritures et réécritures, de consultations multiples. La proposition d'origine s'exprimait en termes de « figures géométriques » : *triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent chacun 1 ou 3 unités,* avec des notations *1**u*** et *3**u*** pour indiquer le rapport des deux types de triangles.

Pour contourner l'usage de mots peu familiers aux élèves, nous sommes passés par un carré découpé en deux triangles égaux, illustré par deux figures, et pour éviter l'unité indéterminée, ***u***, et le rapport 3, nous avons imaginé un alignement de trois côtés de petits triangles sur un côté correspondant du grand.

Le contexte a été ainsi sensiblement modifié pour aboutir à une situation, jugée plus « concrète », avec un énoncé mieux adapté à de jeunes élèves qui, rappelons-le, devront se l'approprier sans aucune aide extérieure durant les 50 minutes accordées pour la résolution.

La tâche de l'élève

La tâche mathématique revient à décomposer un triangle rectangle isocèle en triangles égaux qui lui sont semblables dans le rapport 1/3, ou 3 pour en déterminer le nombre.

L'adulte sait que le rapport des aires est 1/9 ou 9, mais n'est pas forcément convaincu qu'on peut paver le grand triangle avec exactement 9 petits, sans les couper. Les enfants, eux, ne le savent pas.

Pour trouver le nombre de pièces qui se sont envolées, il faut d'abord se demander combien il y en avait avant le coup de vent. Cette recherche a malheureusement été occultée par la première injonction : « Dessinez tous les petits triangles ».

Il ne reste alors aux élèves que la tâche du recouvrement du grand triangle, par découpages et reports, ou le dessin d'une trame triangulaire, ou la construction des petits triangles un à un, afin de déduire, par soustraction des quatre triangles restés, le nombre de ceux qui se sont envolés.

Données statistiques

Après l'épreuve, les sections du RMT procèdent à une « attribution des points », de 0 à 4, pour chaque problème, selon des critères communs élaborés a priori. On obtient alors un tableau de résultats avec les fréquences des points et les moyennes, par catégorie.

Par exemple, sur 2539 classes de 21 sections du RMT, les moyennes des points attribués aux 2539 copies du problème Triangle envolés sont, pour les catégories 3, 4, 5, 6, (5^è^, 6^è^, 7^è^ et 8^è^ HarmoS) respectivement 1,5 ; 2,0 ; 2,3 ; 2,3. Les occurrences des « 4 points » selon le critère « Réponse correcte : cinq triangles envolés et un dessin précis de la répartition » sont respectivement de 25% ; 38% ; 46% ; 44%.

Les résultats de la Suisse romande sont du même ordre et ne présentent pas de différences significatives par rapport à l'ensemble.

Ces données statistiques ne sont cependant que des indices globaux de réussite ou de difficulté d'un problème ; elles ne permettent pas de jugement, mais seulement des constatations. Par exemple, la hausse sensible des moyennes de la catégorie 3 (5^è^ HarmoS, 1,5) à la catégorie 5 (7^è^ HarmoS, 2,3) et une stabilisation pour la catégorie 6 (8^è^ HarmoS, 2,3).

Observation des copies

Ce n'est que maintenant que nous entrons sur ce que nous appelons volontiers « le terrain de l'élève[3] ».

Sur les 145 copies de la section de Suisse romande, 119 (~80%) font apparaître les petits triangles dessinés sur le grand.

Dans une dizaine de cas, il s'agit d'un collage effectif de pièces découpées ou du report du contour d'un petit triangle, déplacé dans des positions successives.

Dans la majorité des cas, on se rend compte que les figures ont été dessinées, à la règle, après les mesures ou reports nécessaires pour assurer l'isométrie des petits triangles. On relève une progression, de la catégo-

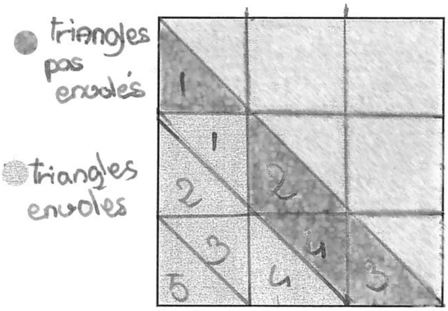
---

3 L'expression est empruntée à Nicolas Rouche (2005) : Il faut partir du terrain de l'élève mais ne pas y camper.

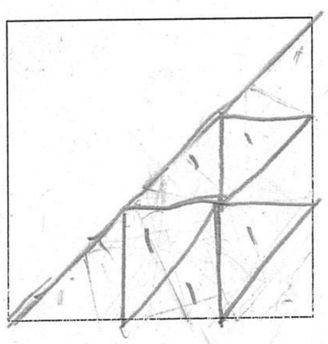
rie 3 à la catégorie 6, dans la précision des dessins et le respect des directions (parallélisme et perpendicularité).

Lorsqu'on s'intéresse de plus près aux dispositions des triangles les uns par rapport aux autres, on observe quatre types de dessins :

Procédure I. Les triangles sont images les uns des autres par des translations et symétries dans 25 copies (17 %). On pourrait penser que cette trame triangulaire atteste d'une compréhension globale de la répartition. C'est vraisemblablement le cas dans une partie des cas (exemple de la Copie 1a) mais souvent le dessin révèle une construction triangle par triangle (Copie 1b).

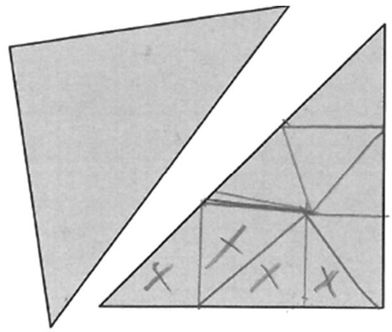


Copie 1a

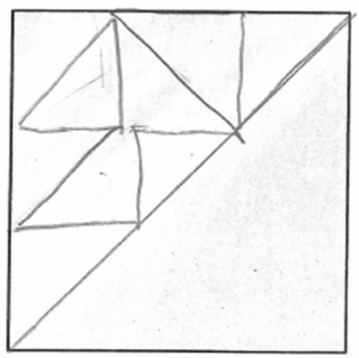


Copie 1b

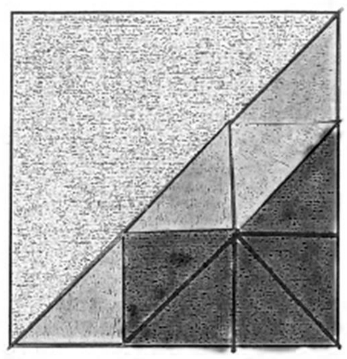
Procédure II. Des rotations d'un quart de tour ou des symétries axiales s'ajoutent aux transformations précédentes dans 51 copies (35 %), (Copies 2a, 2b et 2c). Les triangles sont construits un à un, semble-t-il. Là aussi la qualité des dessins varie sensiblement, la Copie 2a est à la limite de l'erreur !



Copie 2a



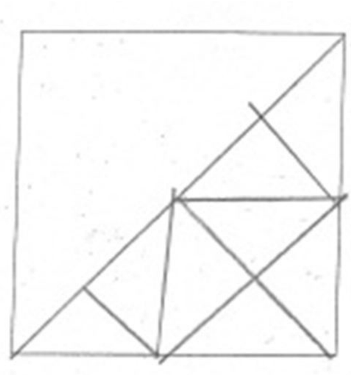
Copie 2b



Copie 2c

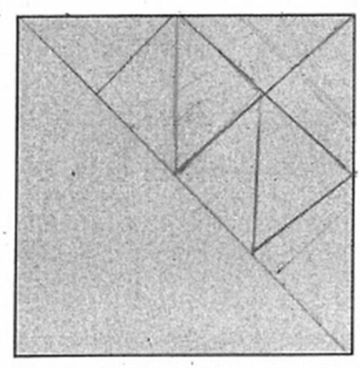
Procédure III. Des rotations de 45 degrés s'ajoutent aux transformations précédentes dans 20 copies (14%) (Copies 3a, 3b, 3c). Dans ces cas, la réponse des élèves est « quatre triangles se sont envolés » contrairement aux « cinq triangles » des cas précédents.

Il faut se « frotter les yeux » pour comprendre d'où vient cette réponse, car les dessins sont très précis (Copies 3b et 3c par exemple) et on trouve même des découpages et collages correspondants.

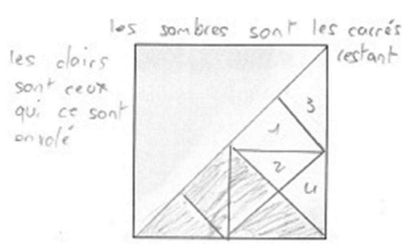


Copie 3a

Un petit calcul permet de lever l'interrogation : la mesure de l'hypoténuse d'un petit triangle ($\sqrt{2} \approx 1,41$) est proche de celle d'un demi-côté du carré, de 1,5. L'écart n'est visible que pour un œil exercé.



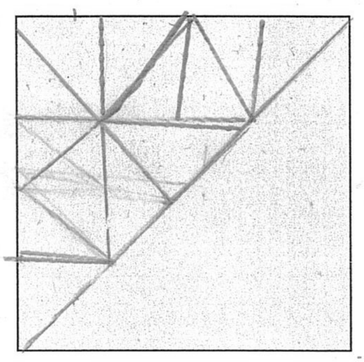
Copie 3b



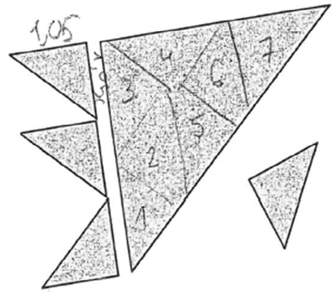
Copie 3c

Personne n'avait prévu cette réponse lors de l'analyse a priori. Une partie non négligeable de la tâche de l'élève n'avait donc pas été envisagée : celle de respecter le parallélisme et/ou la perpendicularité entre les côtés des angles droits des petits triangles et les côtés des angles droits du grand.

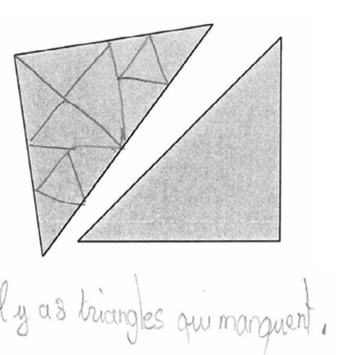
Procédure IV. D'autres transformations, déformations, agrandissements, réductions apparaissent dans 23 copies (16%), où l'on constate souvent un report cumulatif des imprécisions pouvant entraîner des décomptes erronés.



Copie 4a



Copie 4b



Copie 4c

Sur les 145 copies examinées, on ne relève aucune trace explicite de réflexion sur l'aire des triangles, ni sur le rapport 3, ni sur la relation multiplicative 3 × 3 = 9.

Finalement, comme pour tout problème du RMT, il y a des copies blanches ou non reçues, 26 sur 145 (18%) dans le cas des Triangles envolés. Il faut rappeler à ce propos que les élèves ont l'entière responsabilité de l'organisation du travail : répartition en groupes, partage des problèmes et résolution. Le maître seul peut connaître les raisons d'une copie blanche ou de son absence, en en parlant avec ses élèves après l'épreuve.

Les réflexions d'ordre didactique à propos des observations précédentes seront traitées avec celles du second problème, après sa présentation.

Deuxième problème : La tarte de Mamie Lucie

de problèmes antérieurs, regroupés dans une « famille de tâches » caractérisée par le conflit entre aire et périmètre. Dans ces problèmes, le partage se faisait sur une trame, quadrillée, triangulaire ou en « briques ». Ici, la tâche d'imaginer ou de déterminer une unité d'aire est dévolue aux élèves et, s'ils décident de prendre des mesures sur le dessin, c'est aussi à eux de les choisir puis de les combiner (additionner ou multiplier).

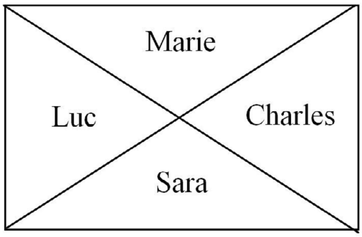
Données statistiques

La tarte de Mamie Lucie, résolue par 2125 classes de catégories 4, 5, 6 (6è, 7è, 8è HarmoS) a obtenu des moyennes respectives de 1,2 ; 1,6 et 1,6 points. Les critères d'attribution donnaient 2 ; 3 ou 4 points à la réponse correcte, selon la qualité des explications. On peut en conclure que l'équivalence des quatre parties d'un rectangle partagé par ses diagonales est loin d'être évidente pour les élèves de 9 à 12 ans.

La tarte de mamie Lucie (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Les choix du contexte et de l'énoncé

Le contexte du partage de tartes pour aborder les comparaisons d'aires est familier. L'énoncé a été facile à rédiger, par rapport à celui du problème précédent.

La tâche de l'élève

D'un point de vue mathématique, la tâche est évidente : il s'agit de montrer qu'un rectangle partagé par ses deux diagonales donne quatre parties de même aire.

Du point de vue de l'élève, ce n'est pas si simple. Nous l'avions déjà constaté lors de l'analyse des copies d'une bonne quinzaine

Observation des copies

Les 124[4] copies de Suisse romande se répartissent en cinq types de procédures caractéristiques :

Procédure I. « Pavage » du rectangle par les deux médiatrices des côtés, en huit triangles rectangles, permettant une comparaison

4 Le problème n'a pas été proposé en catégorie 3 (5è HarmoS), comme le précédent, il y a donc moins de copies.

directe dans 38 copies (31%). (voir Copie 5a et Copie 5b[5])

Copie 5a

Sara et Marie ont raison, chaque personne ont reçu la même part.
Explications : Comme vous pouvez le constater j'ai coupé les tranches en deux (les deux médiatrices sont tracées) et ça fait des triangles rectangles et chaque tranche ont les mêmes triangles rectangles sauf qu'ils sont pas de la même manière alors chaque enfant ont la même quantité de tarte.

Copie 5b

Procédure II. Explication par « compensation » qualitative 6 copies (5%).

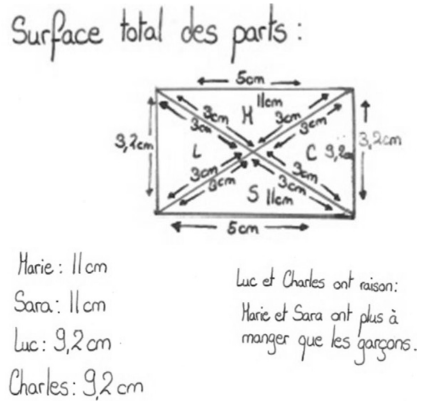
Exemple 1. Les filles ont raison.

> *Sara et Marie ont une petite part mais élargie. Charles et Luc ont une grosse part, mais rétrécie.*

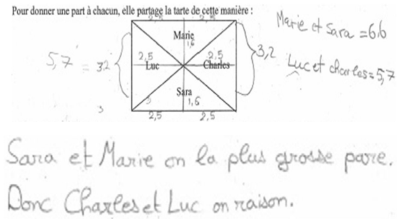
Exemple 2. (sous le dessin complété par les deux médiatrices).

> *Il y a celles de Marie et Sara sont plus larges et celles de Luc et Charles sont plus longues donc ils ont la même part. C'est Sara et Marie qui ont raison.*

Procédure III. Par calcul du périmètre (Copie 6a) ou autres additions de longueurs (Copie 6b) : 33 copies (27%).

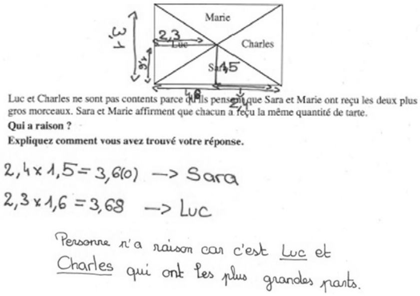


Copie 6a

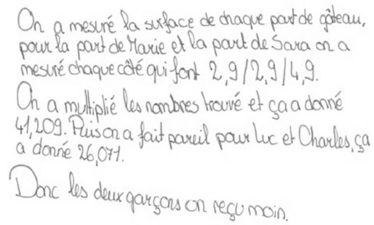


Copie 6b

Procédure IV. Procédure par produit de mesures de longueur (de catégorie 6, 8è HarmoS, en majorité) dont la conclusion dépend de la précision des mesures (Copie 7a) et évidemment de la formule choisie (Copie 7b), 15 copies (12%).



Copie 7a



Copie 7b

Procédure V. On trouve encore quelques procédures par découpages, tentatives de pliages et recouvrements ou recherches d'autres unités, qui en général ne concluent pas à l'égalité des parts : 11 copies (9%).

Il y a 21 copies (17 %) blanches ou non rendues.

Les exploitations didactiques

L'élaboration du problème, sa passation, l'attribution des points, l'analyse des copies a posteriori, aboutissent à un gigantesque recueil d'observations. Ces données se rapportent à la manière dont les élèves s'y sont pris pour résoudre le problème, aux obstacles qu'ils ont rencontrés, à leurs erreurs

5 *Les textes des élèves sont « recopiés », sans altérer la langue et l'orthographe d'origine.*

ou réussites.

Que peut-on bien en faire ? A qui peuvent-elles être utiles ?

Du côté de la recherche, elles ouvrent la voie à de nouvelles investigations ou explications.

Du côté de l'enseignement, elles interrogent le maître sur leur prise en compte pour la conduite de sa classe.

Nous nous contentons ici de deux exemples de ces prises en compte, parmi les très nombreuses possibilités[6] :

1. Si un maître propose à ses élèves de résoudre, par groupes autonomes, Triangles envolés, il peut s'attendre à ce qu'apparaissent les deux types de partition, en 9 triangles (Copies 1a, 1b et 2a, 2b, 2c) et en 8 triangles (Copies 3a, 3b, 3c). Après la résolution il peut dire aux uns qu'ils ont trouvé la réponse exacte et aux autres qu'ils se sont trompés, en leur expliquant pourquoi. Il peut aussi organiser un débat entre les uns et les autres et « pousser » la confrontation jusqu'à ce que la classe soit convaincue que les 9 triangles sont chacun « un peu plus petits » que les 8 triangles et qu'il faut donc tenir compte de la disposition des côtés de l'angle droit pour un recouvrement correct.

2. Si un maître veut savoir si ses élèves distinguent bien le périmètre de l'aire d'une figure, il peut choisir de les faire travailler sur La tarte de Mamie Lucie. Il verra alors certainement apparaître des procédures de types III (Copies 6a, 6b) et IV mais aussi les liens ou contradictions entre les pavages et les calculs d'aires, comme dans la Copie 7a où le petit rectangle dessiné « pave » la moitié de la tarte en 4 triangles rectangles, qui ne sont pourtant pas reconnus comme équivalents suite aux imprécisions des mesures.

Conclusions

Les deux problèmes examinés ici à propos de triangles montrent combien cette notion évolue dans la longue chaîne de transposition descendante qui va des mathématiciens aux enseignants en passant par les programmes[7] et les manuels pour aboutir aux élèves. Lorsqu'on remonte à partir du terrain de ces derniers, on est souvent effaré de constater l'ampleur du fossé entre ce qui a été défini par les adultes et ce qui subsiste chez l'élève.

Certains considéreront cet écart comme négatif et chercheront à y remédier par de « meilleures » propositions ou directives d'enseignement. D'autres, au contraire, n'y verront que le fruit d'une observation rigoureuse : une réalité à prendre en compte en permanence afin de placer les élèves dans les conditions optimales pour construire leurs connaissances.

Chaque copie examinée révèle des niveaux distincts de maîtrise des multiples concepts qui gravitent autour de celui de triangle. Leur regroupement par types de procédures ou d'obstacles peut aider à dégager les points problématiques : là où il faudrait agir pour poursuivre la construction. Le RMT et ses analyses a posteriori de copies ne vont pas au-delà.

C'est cependant un pas important qui, nous l'espérons, permettra à l'enseignant de prendre le relais, en fonction des besoins de ses élèves, du parcours didactique de sa classe et de sa personnalité.

Références

Rouche, N. (2005). De l'élève aux mathématiques, le chemin s'allonge, *L'apprentissage des sciences en question, La pensée et les hommes*, Espace de liberté, 29-49.

Math-Ecole 155-217 (65 articles, 1992 - 2006)

Actes des journées d'études sur le RMT 1-8 (1999 - 2008).

Gazette de Transalpie 0-4 (2010 - 2014)[8].

Toutes les références se situent dans les nombreuses publications du RMT qu'on trouve sur son site www.armtint.org en particulier : Présentation du Rallye pour l'organisation et les conceptions didactiques.

6 *D'autres seront développées et proposées lors des études en cours sur ces deux problèmes. On les trouvera dans les prochaines publications du RMT et en particulier dans sa « Banque de problèmes » en préparation, dont l'accès sera ouvert prochainement.*

7 *Par exemple, in PER, MSN 21 Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace : Reconnaissance, description et dénomination de figures planes (triangle, carré, rectangle…) selon leurs propriétés (symétrie-s interne-s, parallélisme, isométrie,…).*

8 *Les analyses et réflexions développées au sein du RMT sont progressives et collectives.*

Autour du concept de propriété

Sylvia Coutat

Université de Genève

Cet article présente une analyse du concept de propriété qui est ensuite croisée avec l'étude des ressources officielles disponibles pour les enseignants du secondaire 1[1] de Genève. Cette proposition d'analyse du concept de propriétés ne définit pas une séquence d'enseignement mais devrait susciter des pistes de réflexion chez les enseignants.

Le Raisonnement déductif

Nous appelons raisonnement déductif un raisonnement particulier de la démonstration, elle-même étant un type de preuve particulier (Balacheff, 1982). Le *raisonnement déductif*, est largement utilisé dans les validations et justifications en géométrie. Il s'organise autour de pas de déduction construits sur des énoncés validés par l'institution (classe ou mathématiciens) tels que propriétés ou théorèmes qui sont appelés des énoncés-tiers :

> *L'organisation d'un pas de déduction (…) permet d'effectuer une opération très particulière : une partie de l'énoncé-tiers (celle qui est parfois introduite par « alors.. ») est « détachée » comme conclusion du pas de déduction, après vérification que les prémisses correspondent bien à l'autre partie de l'énoncé-tiers (celle qui est parfois introduite par « si… »). (Duval & Egret, 1993, p. 121)*

Une représentation schématique pourrait-être la Figure 1.

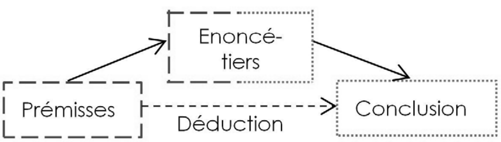


Figure 1

1 *Élèves de 12 à 15 ans.*

Voici un exemple de raisonnement déductif contenant un pas de déduction :

ABCD et DCEF sont deux parallélogrammes. Que pouvez-vous dire des droites AB et FE ?

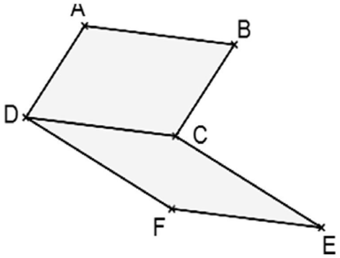


Figure 2

Une solution possible :

Comme ABCD est un parallélogramme, les droites AB et DC sont parallèles. De même comme DCEF est un parallélogramme, les droites DC et EF sont parallèles. Or si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, ces deux droites sont parallèles. AB et EF sont deux droites parallèles à DC, elles sont donc parallèles.

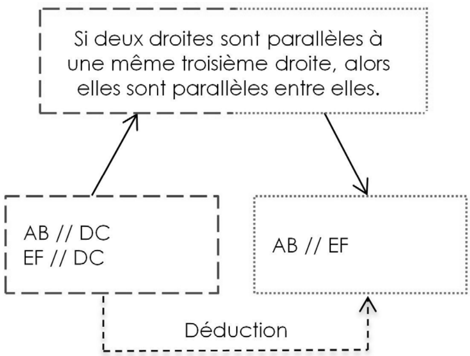


Figure 3

Nous appelons propriétés, l'ensemble des énoncés mathématiques, dans lesquels est établie la nécessité mathématique d'un énoncé-conclusion à partir d'énoncés choisis comme hypothèse. Ces énoncés sont au cœur des pas de déduction et donc au cœur du raisonnement déductif, c'est pour cela que cet article se focalise sur ce type d'énoncé, l'objectif étant de proposer une analyse du concept de propriétés dans la perspective de développer d'éventuels outils qui permettraient de réinvestir les propriétés dans un pas de déduction.

Reconnaissance des propriétés

Dans une précédente recherche, (Coutat, 2005) nous avons testé les capacités d'élèves français de 14 ans à reconnaître des propriétés géométriques et à les distinguer. Ces tests ont révélé que les élèves avaient des difficultés à distinguer une propriété de sa réciproque ainsi qu'à identifier les données (contraintes) et la conclusion dans l'énoncé. Nous en concluons que la compréhension d'une propriété dépasse la simple connaissance des mots, elle doit prendre en compte l'articulation entre eux.

La suite de l'article s'appuie sur une autre recherche (Coutat, 2006) à propos de l'enseignement de propriétés géométriques avec des élèves de 12-13 ans. L'hypothèse de travail est que l'enseignement des propriétés doit permettre aux élèves de travailler la relation entre les contraintes (données) et la conclusion pour qu'ils les utilisent de façon plus adéquate dans un pas de déduction.

Le concept de Propriété

Afin de caractériser le concept de *propriété géométrique*, nous utilisons les travaux de Vergnaud (1990) sur les champs conceptuels. Ainsi un concept se caractérise par un triplet de trois ensembles :

- *l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)* ;

- *l'ensemble des invariants sur lesquels reposent l'opérationnalité des schèmes (le signifié)* ;

- *l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et procédures de traitement (le signifiant). (Vergnaud, 1990, p.145)*

Cette caractérisation qui se veut la plus générale possible sera exemplifiée par la propriété P :

Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.

L'ensemble des situations

Nous avons identifié trois sous-ensembles de situations qui peuvent donner du sens au concept de propriété géométrique : les situations d'illustration, les situations de validation, dans lesquelles la propriété est démontrée et les situations d'énoncés-tiers, dans lesquelles la propriété est utilisée pour démontrer d'autres résultats.

Les situations d'illustration

Dans ce premier ensemble, nous considérons les situations qui visent la « découverte visuelle » d'une nouvelle propriété.

Exemple :

- Construis deux segments AB et AD perpendiculaires en A.
- Construis le point C tel que ABCD soit un parallélogramme.
- Que peux tu observer à propos du parallélogramme ABCD ?

Ces situations permettent une première confrontation à la propriété et peuvent éventuellement susciter une surprise lors de l'apparition de la conclusion.

Les situations de validation

Dans ce deuxième ensemble, nous considérons les situations dans lesquelles les propriétés sont prouvées, soit par une preuve pragmatique, soit par une démonstration (Balacheff, 1987).

Exemple par la démonstration de la propriété P :

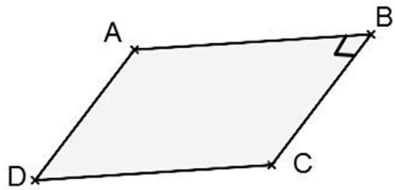


Figure 4

ABCD est un parallélogramme et l'angle ABC est un angle droit.

Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, ainsi si un angle est droit, l'angle opposé l'est aussi. Comme l'angle (ABC)est un angle droit, on en déduit que l'angle (ADC) est un angle droit.

Lorsque deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Les côtés AB et DC sont parallèles, et le côté AD est perpendiculaire au côté DC donc il est aussi perpendiculaire au côté AB. L'angle (DAB) est un angle droit.

Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, ainsi si un angle est droit, l'angle opposé l'est aussi. L'angle (DAB) est un angle droit, on en déduit que l'angle (BCD) est un angle droit.

Le parallélogramme ABCD a 4 angles droits, c'est un rectangle.

On pourrait envisager une preuve pragmatique de la propriété P qui s'appuie sur la construction d'un parallélogramme avec des barres métalliques (style Meccano®). En déformant le parallélogramme et ne contrôlant qu'un seul angle, on se rend compte qu'il n'est pas possible de le déformer de façon à obtenir un seul angle droit.

Les situations d'énoncés-tiers

Ce dernier ensemble de situations rassemble les situations dans lesquelles la propriété est utilisée comme énoncé-tiers dans un pas de raisonnement.

Exemple :

- Construis ABCD un losange dont les diagonales se coupent en O.
- Construis la droite d, parallèle à BD passant par A.
- Construis la droite e, parallèle à AC passant par D.
- Les droites d et e se coupent en F.
- Quelle est la nature du quadrilatère AODF ? Justifie ta réponse.

Une solution possible :

DF est un segment de e qui est parallèle à AO donc DF est parallèle à AO. AF est un segment de d qui est parallèle à OD donc DF est parallèle à AO. AODF a deux paires de côtés parallèles, c'est un parallélogramme. ABCD est un losange et O est le point d'intersection de ses diagonales qui se coupent perpendiculairement, l'angle (AOD) est un angle droit. Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle. Le parallélogramme AODF a un angle droit, alors c'est un rectangle.

Les situations d'énoncé-tiers permettent de donner du sens à des propriétés par l'utilisation de celles-ci dans des pas de déduction.

L'ensemble des invariants

Dans la situation d'illustration ou la preuve pragmatique de P, on voit que les quatre angles sont droits sans qu'il puisse en être autrement et simplement en imposant un seul angle. Cette dépendance de la conclusion aux contraintes, ici un angle droit, est présente pour toutes les propriétés telles que nous les avons définies. C'est en fait cette dépendance qui est visualisée, décrite, montrée ou démontrée à travers les différentes situations. Ainsi l'ensemble des invariants se réduit à une relation spécifique qui relie les contraintes à la conclusion. Nous définissions cette relation comme une **relation de subordination** entre un ensemble de données, les contraintes et un ensemble de résultats, la conclusion.

L'ensemble des formes langagières

Nous distinguons deux catégories de signifiants : les signifiants du registre discursif et les signifiants du registre graphique.

Registre discursif

Nous avons identifié deux principales formulations de la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion.

La première formulation est la formulation experte qui s'appuie sur les marques *si* et *alors*. Cette formulation est très courante car elle permet très rapidement d'identifier les contraintes et la conclusion dans un énoncé en s'appuyant sur les indicateurs *si* et *alors* : Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.

La deuxième formulation est la formulation temporelle qui s'appuie sur une chronologie pour exprimer la relation de subordination : *un parallélogramme deviendra un rectangle lorsqu'il aura un angle droit*, ou *lorsqu'un parallélogramme a un angle droit il deviendra un rectangle*. Cette formulation peut apparaître plus souvent à l'oral qu'à l'écrit et laisse sous-entendre une transformation au cours du temps des objets considérés dans la propriété.

D'autres formulations mixtes peuvent être envisagées utilisant une marque d'identification de la formulation experte pour les contraintes et une marque temporelle pour la conclusion ou vice-versa.

Registre graphique

Pour distinguer les contraintes et la conclusion dans le registre graphique on peut utiliser des couleurs, le rouge pour les contraintes et le vert pour la conclusion (par exemple). La Figure 5 représente P dans ce registre.

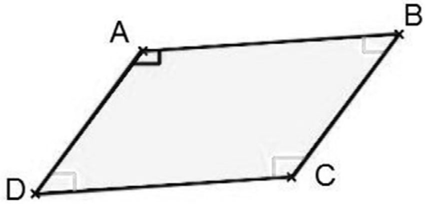


Figure 5

Une limite de la représentation statique est qu'on ne peut pas coder à la fois la contrainte (ABCD est un parallélogramme) et la conclusion (ABCD est un rectangle). Cette limite peut être dépassée en utilisant plusieurs dessins qui illustrent les différentes étapes de l'énoncé. On obtient alors une sorte de bande dessinée de la propriété, visible dans la Figure 6.

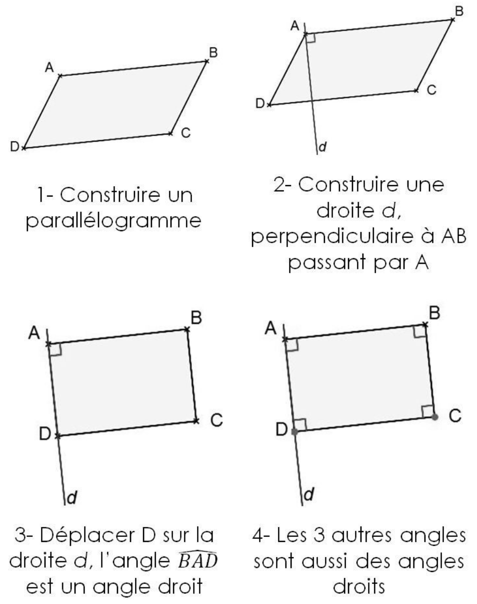


Figure 6

Cette bande dessinée peut-être animée par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique[2]. On aura alors une représentation de la propriété dans un registre graphique dynamique.

Propriétés géométriques dans le contexte genevois

Quelques séquences d'enseignement, dans le contexte français, s'appuyant sur cette caractérisation du concept de propriété, ont été développées (Coutat, 2006). Nous ne les aborderons pas dans cet article. Nous souhaitons plutôt présenter dans quelle mesure cette caractérisation est compatible avec le contexte genevois.

Dans le Plan d'Etude Romand[3] (PER)

Le PER fait référence aux propriétés dans l'axe thématique Espace dès le cycle 2[4] : « *Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace en dégageant des propriétés géométriques des figures planes (…) des solides* » (p.14). Une autre référence aux propriétés dans le champ *Figures géométriques planes et solides* apparait « *pour reconnaitre, décrire et nommer des figures planes (symétrie interne, parallélisme, isométrie)* ». Enfin une dernière référence concerne le champ *Transformations* pour « *observer les principales propriétés des transformations (variants et invariants)* ». Dans ce cycle les propriétés sont principalement identifiées visuellement à partir de dessins.

Pour le cycle 3[5], les mêmes références apparaissent, si ce n'est qu'elles ne renvoient plus à dégager les propriétés mais à les définir et les utiliser. Dans ce cycle les propriétés ne sont pas associées à des dessins mais à des figures.

Dans le PER des bribes de propriétés sont présentes (symétrie interne, parallélisme …) mais elles ne sont jamais formulées globalement.

Dans le plan d'étude genevois (2003)

Afin d'avoir plus d'information sur les différentes représentations des propriétés (les signifiants) et éventuellement les situations

2 Attention : il s'agit de la mise en œuvre d'un déplacement mou c'est-à-dire d'un déplacement pour obtenir une configuration particulière et éphémère qui ne résiste pas au déplacement. Dans l'exemple, on ne construit pas un rectangle, on déforme un parallélogramme pour qu'il soit dans la configuration particulière du rectangle.

3 Plan d'Etude mis en place pour tous les cantons romands en 2011, actuellement en vigueur.

4 Élèves de 8-12 ans.

5 Élèves de 12-15 ans.

qui leur donnent du sens (référence), nous avons consulté l'ancien plan d'étude genevois de 2003[6]. Dans la partie introductive du chapitre Géométrie, quelques propriétés géométriques sont énoncées ainsi que leurs relations avec les définitions : « *Les propriétés ci-dessous s'appuient sur les définitions suivantes* » (p. 110). Cela laisse supposer que les situations de validation relativement aux propriétés peuvent être mise en place en s'appuyant sur les définitions proposées.

Les formulations utilisées pour les propriétés sont des formulations expertes qui utilisent *si* et *alors* : « *Si un triangle possède un axe de symétrie alors il est isocèle* » (p.110). Mais ces formulations sont aussi sans marques d'identification ou indicateurs temporels : « *Les côtés opposées d'un parallélogramme sont isométriques* » (p.110). En classe de 8e (10e HarmoS[7]) une autre formulation apparaît, les conclusions des propriétés (ici pour le parallélogramme) sont détachées des contraintes : « *On en déduit les propriétés suivantes du parallélogramme :*

- *Les diagonales se coupent en leur milieu ;*
- *les côtés opposés ont la même longueur ;*
- *les angles opposés sont isométriques ;*
- *deux angles consécutifs sont supplémentaires.* » (p.114)

Nous n'avons pas considéré ces formulations pour caractériser le concept de propriété car elles n'expriment pas, de notre point de vue, la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion. En effet avec la première formulation, contraintes et conclusion semblent être au même niveau, pour la deuxième formulation la conclusion est déconnectée des contraintes.

Dans le chapitre *Initiation à la recherche*, une référence aux propriétés apparait dans la démarche expérimentale en mathématiques pour prouver les conjectures avec une « *démonstration, basée sur des propriétés* » (p.126). On entrevoit ici l'utilisation des propriétés comme énoncés-tiers dans un raisonnement déductif, c'est-à-dire la mise en place d'une situation d'énoncé-tiers.

Dans le livre du maître des moyens d'enseignement romands de mathématiques (Mathématiques 9-10-11)

Nous avons poursuivi notre étude avec le livre du maître. Dans la rubrique recherche et raisonnement de nombreuses références aux propriétés apparaissent en lien avec la démonstration et le raisonnement déductif : « *Comme on l'a vu précédemment, il est donc essentiel que les propriétés que les élèves doivent utiliser dans les démonstrations qu'on leur propose soient parfaitement connues des élèves.* » (p.8). Les propriétés sont clairement posées comme outils pour les démonstrations, en lien donc avec les situations d'énoncés-tiers.

Dans la rubrique *Résolution de problèmes*, (p.9) les auteurs présentent un exemple de procédures de résolution s'appuyant sur le raisonnement déductif à partir d'un exercice du manuel de l'élève. Les propriétés utilisées dans la résolution sont énoncées dans une formulation experte (avec *si* et *alors*). Les auteurs présentent les difficultés quant à l'utilisation de propriétés dans une procédure de résolution, ainsi que des pistes d'aides qui proposent de développer des automatismes à travers des exercices d'entrainement (p.9) ce que nous considérons être des situations d'énoncés-tiers.

Nous n'avons pas trouvé dans ce manuel d'éléments généraux concernant l'enseignement des propriétés, les différentes formulations ou les situations autour des propriétés en dehors des exemples de résolution.

Dans l'aide-mémoire de l'élève des moyens d'enseignement romands de mathématiques (Mathématiques 9-10-11)

Dans l'index général, le mot « propriété » apparait dans « *propriétés d'une fonction linéaire* ». Dans la table des matières, apparait « *quadrilatère* », « *quadrilatères remarquables* » et « *classement des quadrilatères* », aucune entrée à propos des propriétés[8] des quadrilatères. Lorsque l'on rentre dans la rubrique *Quadrilatères remar-*

6 *Ce plan d'étude a été en vigueur jusqu'en 2010, il est connu des enseignants.*

7 *Élèves de 13-14 ans.*

8 *Une entrée Théorème renvoie aux théorèmes de Pythagore et de Thales.*

quables (p.88-89) les propriétés des quadrilatères sont présentées dans un tableau récapitulatif des caractéristiques de chaque quadrilatères en se focalisant sur :

- les côtés
- les diagonales
- les angles
- les symétries (axes, centre)

La dernière colonne « remarques » permet une première classification des quadrilatères. Cependant cette classification ne s'appuie pas sur les propriétés mais sur les inclusions de classes de quadrilatères : « *Les losanges, les rectangles et les carrés sont des parallélogrammes particuliers* » (p.88).

Dans ce tableau, les formulations utilisées se rapprochent de formulations présentées dans le plan d'étude genevois, c'est-à-dire que les conclusions sont détachées des contraintes.

Une rubrique est spécifique au classement des quadrilatères à partir d'un schéma (p.89, reproduit en annexe). Ce classement s'appuie sur :

- des axes de symétrie
- des côtés parallèles
- des angles droits

Comme il s'agit d'une représentation schématisée, les formulations sont très épurées. Cependant elles s'accompagnent de schémas des quadrilatères qui permettent de voir leur évolution au fur et à mesure de l'imposition de nouvelles contraintes. La formulation utilisée ici s'appuie sur des dessins, comme pour les formulations du registre graphique mais aussi sur des mots qui complètent les dessins. La relation de subordination entre contraintes et conclusion est parfois représentée par une flèche entre les contraintes et le dessin du « nouveau » quadrilatère obtenu. Cette formulation nous semble intéressante car très synthétique, mais elle est très complexe (conclusion recyclée en contrainte) et contient beaucoup d'implicites.

Conclusion

Pour conclure, si l'on croise les informations de cette brève analyse des plans d'études et moyens d'enseignement avec l'étude du concept de propriété, on peut souligner que les propriétés sont présentes mais peu représentées comme telles. Dans le PER, la référence aux propriétés est explicite, mais les énoncés en sont absents, contrairement au plan d'études genevois de 2003 où elles étaient citées. Dans le livre du maître, l'apprentissage des propriétés est pointé du doigt comme étant essentiel pour pouvoir être réinvesti dans les démonstrations, cependant peu d'éléments relatifs à leur enseignement (formulations et situations) sont mis à disposition en dehors des exemples de procédures d'élèves. Enfin, le livre de l'élève fait peu référence aux propriétés de façon explicite bien qu'elles soient présentes (en ce qui concerne la partie sur les quadrilatères, point sur lequel nous avons focalisé notre étude) à travers des schémas et des tableaux. Les formulations qui n'utilisent que le registre discursif s'organisent dans des tableaux qui, il nous semble, masquent la relation de subordination entre contraintes et conclusion. Une autre formulation s'appuyant à la fois sur le registre discursif et le registre graphique donne un ensemble[9] avec des dessins complétés par des contraintes, les dessins ayant tour à tour le statut de contraintes puis de conclusion. Si on élargit l'analyse des ressources officielles des enseignants, les propriétés apparaissent finalement à la fin de l'aide-mémoire dans la rubrique « *Propriétés des transformations du plan* » (p.102) et dans la rubrique « *Figures semblables* » comme des remarques en formulation experte.

En ce qui concerne le livre et le fichier de l'élève, les propriétés n'y sont pas formulées, mais les exercices présentés font travailler les propriétés à travers des situations d'illustrations, de validation et d'énoncés-tiers.

La caractérisation du concept de propriété que nous avons faite nous permet d'identifier que c'est principalement leur formulation qui semble parfois complexe ou incomplète dans les ressources disponibles. Cependant les différentes situations proposées aux élèves sont variées, ce qui en fait le véritable atout sachant que la formulation des propriétés n'est qu'une étape dans le processus de compréhension du concept de propriété.

9 *En annexe.*

Références

Balacheff, N. (1982). Preuves et démonstrations en mathématiques au collège. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 261-303.

Duval, R. & Egret, M. A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères IREM*, 12, 114-140.

Coutat, S. (2005). Connaître et reconnaitre les théorèmes. *Petit x*, 67, 12-32.

Coutat, S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique pour favoriser la liaison école primiare-collège : Une ingénierie au collège pour la notion de propriété*. Thèse de l'université Joseph Fourier de Grenoble.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 10(2.3), 133-170.

Plans d'études

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), (2010-a). *Plan d'études Romand, 2e cycle, Mathématiques et Science de la nature. – Sciences humaines et sociale,* CIIP.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), (2010-b). *Plan d'études Romand, 3e cycle, Mathématiques et Science de la nature. – Sciences humaines et sociale*, CIIP.

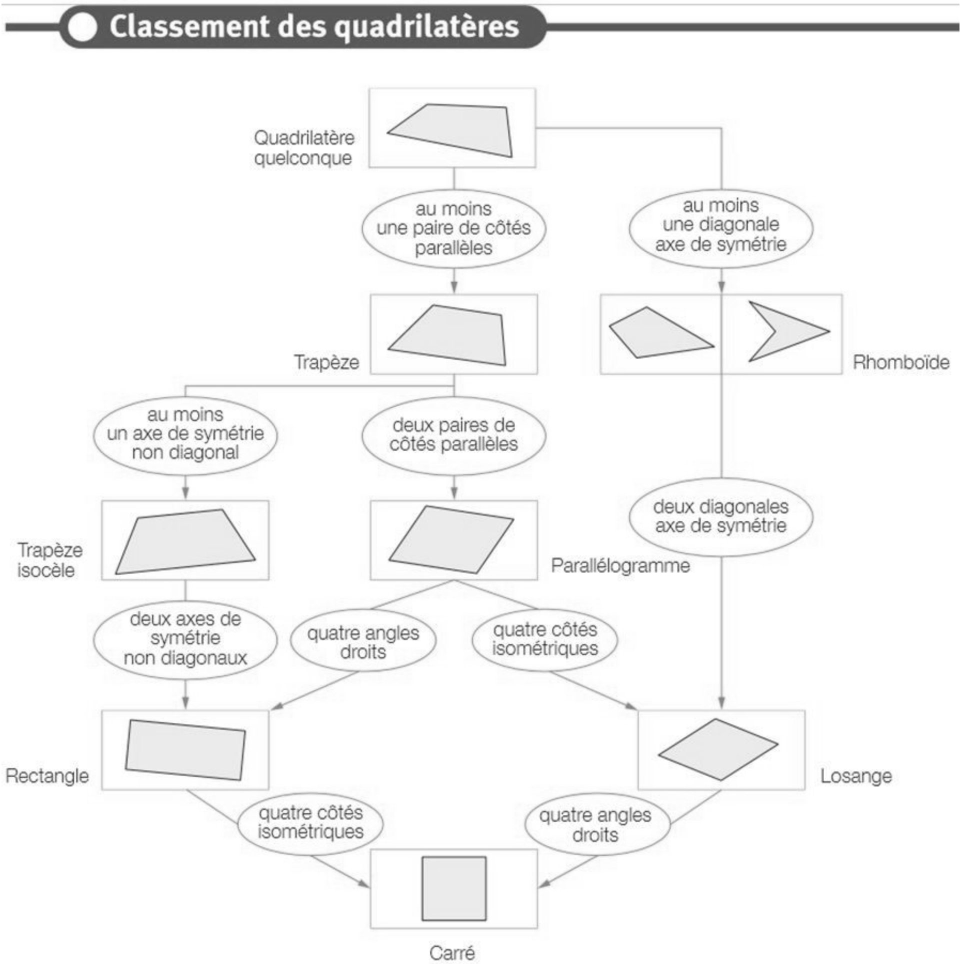
Curriculum de mathématiques du Cycle d'orientation. 1999-2003.

Manuels

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), (2011). *Mathématiaues 9-10-11, Aide-mémoire*, LEP.

Annexe :

Extrait de Mathématiques 9-10-11, Aide-mémoire



Math-Ecole, pour ceux qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques !

Chacun est invité à propposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences.

Les articles doivent parvenir en version électronique, par email adressé à la rédaction (mathecole@ssrdm.ch). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Contact : mathecole@ssrdm.ch

Site internet :

http://www.mathecole.ch

Pour commander des numéros de Math-Ecole vous pouvez adresser vos demandes à mathecole@ssrdm.ch ou utiliser le formulaire de commande disponible sur le site.

- CHF 5.- le numéro 218
- CHF 5.- le numéro 222

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 50 depuis la rubrique *Consultation en ligne*.

Couverture

Détail d'un oeuf géométrique pavé réalisé par Alessia, Collège de Delémont.