Les trucs en classe de mathématiques : quand et pourquoi ?

Adolphe Adihou et Patricia Marchand

Université de Sherbrooke, Canada

Résumé

Dans la pratique de classe, nous remarquons l'utilisation de raccourcis mathématiques par les enseignants et les élèves eux-mêmes. Nous qualifions ces raccourcis de « trucs mathématiques » (TM). Le présent article présente d'abord une analyse mathématique et didactique de deux TM que nous retrouvons très fréquemment en classe de mathématiques au secondaire. Notre objectif vise à mettre en évidence les propriétés et les concepts mathématiques auxquels ils se réfèrent. Nous positionnerons la problématique de leur utilisation en classe en nous questionnant sur le quand et le pourquoi de l'exploitation de ces TM avec les élèves du secondaire : quels sont les avantages et les inconvénients de l'utilisation de ces TM dans l'enseignement des mathématiques ? Quelles sont leurs limites et leurs portées dans l'enseignement des mathématiques au secondaire ? Comment devrons-nous les exploiter en classe ?

Introduction

Qu'est-ce qu'un truc mathématique ?

Un truc mathématique (TM) est un moyen, un procédé, une technique. C'est une astuce économique et facile pour résoudre une activité mathématique (Loock, 2006). En effet, en faisant référence aux différents champs mathématiques, nous parlerons de trucs arithmétiques, algébriques, géométriques, etc. (Adihou 2003). Les TM renvoient à un ensemble de techniques, de procédés ordonnés qui utilisent des méthodes issues de connaissances mathématiques ou simplement des méthodes dictées par la pratique mathématicienne. Ces méthodes (méthode de moindre carrée, « règle de trois », etc.) sont mathématiquement mises en évidence à travers des expériences et des recherches. Un des objectifs de la construction et de l'utilisation d'un TM étant économique, il prend souvent le statut de technique qui met en jeu plusieurs propriétés, invariants et opérations mathématiques, mais trop souvent de manière opaque.

Les trucs mathématiques en classe

Dans un contexte mathématique, ces TM sont à la fois produits et générateurs de raisonnements mathématiques. Ils sont donc pertinents dans l'avancement des recherches en mathématiques, mais qu'en est-il de leur exploitation en classe du secondaire ? L'objectif didactique de l'exploitation des TM serait-il de procéder à leur reconstruction ou encore tout simplement de les utiliser ? Comment traiter leur opacité en classe ?

En apprentissage et en enseignement des mathématiques au secondaire[1], les TM sont vus comme des raccourcis qui sont construits ou utilisés dans certaines activités par les enseignants ou par les élèves. Lorsque ces TM ne sont qu'utilisés, les élèves ignorent très fréquemment soit les contenus mathématiques qui sont à l'œuvre, soit leur origine. Lorsqu'au contraire, ils sont construits par les élèves, ils peuvent devenir des leviers didactiques pertinents et, par le fait même, source d'apprentissages mathématiques. Mais, selon nos observations tant en formation initiale que continue des enseignants, les TM sont majoritairement utilisés en classe et non construits et semblent créer des difficultés d'enseignement et d'apprentissage (Adihou et Arsenault, 2012; Adihou, Arsenault et Marchand, 2012; Adihou et Marchand, 2012-2014, 2010; Marchand, Adihou, Lajoie, Maheux, et Bisson, 2012).

Dans un tel contexte d'utilisation de TM en classe du secondaire, nous pourrions prendre la position d'éliminer ces derniers pour éviter les obstacles didactiques qu'ils semblent générer. Mais, le problème ne doit pas se poser en ces termes, car, d'une

1 *L'article porte sur l'enseignement secondaire, mais des TM existent à tous les niveaux scolaires.*

part, relativement à notre nature humaine, nous cherchons toujours des raccourcis et, d'autre part, un des objectifs en mathématiques est de trouver des stratégies et des méthodes expertes et économiques. C'est dire que les TM seront toujours présents dans l'environnement de la classe, même des élèves en élaborent à partir d'autres TM. Notre position est par conséquent d'envisager ces TM comme des occasions pour valoriser un enseignement basé sur la compréhension mathématique qui se cache derrière et de donner un sens aux concepts sous-jacents.

Nous pensons que l'exploitation des TM en classe de mathématiques tout en s'appuyant sur le potentiel mathématique[2] des élèves et sur la face cachée des TM en termes de raisonnement mathématique est pertinente. Ainsi, les TM ne devraient pas représenter l'objet d'apprentissage, mais davantage un moyen d'accéder aux structures mathématiques qui le sous-tendent. L'utilisation des TM est souvent proposée pour court-circuiter l'investissement mathématique des élèves et donc d'éviter l'exploitation de leur potentiel mathématique. Quels sont les contenus mathématiques qui structurent les TM exploités par les enseignants ? Ces TM sont-ils en adéquation avec les connaissances ou compétences mathématiques visées par ce niveau scolaire ? L'objectif principal de cet article s'inscrit dans une perspective de reconstruction des TM et non simplement de leur utilisation et consiste à étudier les raisonnements mathématiques sous-jacents aux TM afin d'en questionner leur pertinence et leur utilité dans les classes de mathématiques au secondaire.

Analyse mathématique et didactique de trucs mathématiques

Dans cette partie, nous donnerons deux exemples de TM liés aux notions abordées en classe du secondaire[3]. Le but de cette partie n'est pas de faire un répertoire des explications plausibles de chacun des TM, car nous pourrions assurément en trouver plusieurs. Nous voulons surtout rendre explicites quelques raisonnements mathématiques qui se cachent derrière ces TM afin de les démystifier en vue de pointer leur potentiel mathématique pouvant être exploité en classe du secondaire. Pour chacun des TM, nous retrouvons sa formulation et son analyse mathématique reprenant les étapes de Mason (1994), soit l'exemplification, la généralisation, la justification et l'identification du contenu.

Truc mathématique 1

> Lorsque nous divisons deux nombres décimaux ayant une partie entière et une partie fractionnaire, nous enlevons la virgule au diviseur pour qu'il devienne un nombre entier et nous décalons la virgule du dividende en conséquence. Ensuite, nous réalisons la division avec ces nombres.

Exemplification[4]

$$12{,}345 \div 6{,}78 = \frac{12{,}345}{6{,}78} \times 1$$
$$= \frac{12{,}345}{6{,}78} \times \frac{100}{100} = \frac{12{,}345 \times 100}{6{,}78 \times 100}$$
$$= \frac{1234{,}5}{678} = 1234{,}5 \div 678$$

En multipliant par 1, l'égalité est conservée, car 1 est l'élément neutre de la multiplication. La partie fractionnaire du diviseur étant de l'ordre des centièmes, l'élément neutre 1 est remplacé par 100/100. Le recours à l'élément neutre permet ici de faire un lien avec un raisonnement proportionnel. Ce raisonnement peut être verbalisé en ces termes : je pars avec un nombre 100 fois plus grand que je divise par un nombre 100 fois plus grand que le diviseur initial; mon résultat demeure donc le même.

2 *Le potentiel mathématique de l'élève est l'ensemble des forces, des capacités, des ressources mathématiques dont dispose en puissance l'élève (Barabé, 2011).*
3 *Voir Adihou et Marchand (2010) pour des TM liés aux classes élémentaires.*

4 *Pour ne pas alourdir le texte, un seul cas de figure est considéré dans l'étape d'exemplification, mais cette étape implique nécessairement l'analyse des différents cas de figures pouvant être générés.*

Généralisation

Soit l'opération suivante :

$$N_1 \div N_2 = \frac{abc,def}{u,vw}$$

($\bar{a}, b, c, d, e, f, u, v$ et w € IN)

$$\frac{abc,def}{u,vw} = \frac{abc,def \times 100}{u,vw \times 100}$$

$$= \frac{abcde,f}{uvw} = abcde,f \div uvw$$

Justification et contenus

Les transformations qui sont généralement effectuées dans l'algorithme de division d'un nombre décimal par un nombre décimal non-nul, invitent à rendre le diviseur entier. Cet apprêt résulte aussi du sens qui est donné à la division, le sens de groupement ou de partage. En ce qui concerne les nombres entiers, l'algorithme de division est structuré autour de la numération de position et ce sens peut être poursuivi si le diviseur est entier. Pour que le diviseur soit un nombre entier, plusieurs contenus mathématiques permettent des transformations. Entre autres, celui qui nous permet d'avoir une équivalence entre les opérations est la propriété de l'élément neutre de la multiplication et le résultat d'une division d'un nombre par lui-même ou encore la proportionnalité.

Il est aussi possible d'écrire les nombres décimaux N_1 (dividende) et N_2 (diviseur), sous la forme d'une fraction, soit :

$$N_1 = abc,def = \frac{abcdef}{1000}$$

$$N_2 = u,vw = \frac{uvw}{100}$$

On pourra ensuite mettre en évidence l'équivalence des écritures, c'est-à-dire l'écriture sous forme fractionnaire et avoir recours à la multiplication de fractions :

$$N_1 \div N_2 = \frac{abcdef}{1000} \div \frac{uvw}{100} = \frac{abcdef}{1000} \times \frac{100}{uvw}$$

Nous pourrions poursuivre le raisonnement pour prouver que ce processus est vrai pour la division de deux nombres décimaux quelconques (bien entendu avec un diviseur non-nul).

Dans les deux cas, nous exploitons de manière explicite des contenus mathématiques visés au secondaire, soit une des propriétés de la division (l'élément neutre), la proportionnalité et la multiplication de fractions. Le TM devient par conséquent un moyen de traiter ces contenus avec les élèves et du même coup de leur fournir un exemple de leur utilité, ici, mathématique.

Truc mathématique 2

Pour diviser des fractions, nous multiplions la première par l'inverse de la deuxième.

Exemplification

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{3 \times 7}{4 \times 2} = \frac{21}{8}$$

Généralisation

Ce truc peut être généralisé comme suit : « Pour diviser une fraction A/B par une fraction C/D, on multiplie la fraction A/B l'inverse deC/D ».

Justification et contenus

Observons d'abord ce qui peut être fait pour justifier cette égalité. Voici une façon parmi d'autres de l'interpréter par le biais des techniques de transformation.

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{\frac{A \times D}{B \times D}}{\frac{C \times B}{D \times B}} = \frac{A \times D \times (\frac{1}{B \times D})}{C \times B \times (\frac{1}{D \times B})}$$

$$= \frac{A \times D}{C \times B} = \frac{A \times D}{B \times C} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$$

Les transformations opérées pour justifier la généralisation ont un potentiel didactique. Ici, les diverses transformations plausibles peuvent travailler l'équivalence des fractions, la proportionnalité, la simplification des fractions, le recours à l'élément neutre ou la régularité de la multiplication. Des techniques en lien avec la résolution des équations ou la relation d'égalité auraient également pu être exploitées en introduisant l'inconnue de la réponse, soit x et en réalisant des transformations sur l'égalité pour obtenir la multiplication de la fraction inverse. L'analyse du TM en classe peut ainsi permettre l'exploitation de notions mathématiques et de les lier entre elles. En ce sens, nous considérons qu'il s'agit d'une piste prometteuse à exploiter en classe.

Réflexion sur le quand et comment exploiter ces trucs mathématiques en classe

Dans cette dernière partie, nous reprenons les deux TM et nous explorons différentes avenues d'exploitation en classe du secondaire.

Truc Mathématique 1

Nous pouvons penser à effectuer un retour à la division d'un nombre décimal par un nombre entier avec les élèves. Il se fera par un jeu de transformation tout comme nous l'avons fait précédemment dans l'exemplification, avec une centration sur la transformation du diviseur. La technique de rééquilibrage sera utilisée à l'aide de la propriété de l'élément neutre de la multiplication ou de la proportionnalité.

Un retour aux fractions décimales avec les élèves peut être également une bonne piste d'intervention en classe. On pourrait aussi être amené au secondaire à travailler la technique de la réduction au même dénominateur lors de la division des fractions, mais aussi la priorité des opérations et toute une variété de transformations. Nous illustrons nos propos avec l'exemple précédent : 12,345 ÷ 6,78

$$= \frac{12345}{1000} \div \frac{678}{100} = \frac{\frac{12345}{1000}}{\frac{678}{100}} = \frac{12345 \times \frac{1}{1000}}{678 \times \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{12345}{678} \times \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{100}} = \frac{12345}{678} \times \left(\frac{1}{1000} \div \frac{1}{100}\right)$$

$$= \frac{12345}{678} \times \frac{1}{10} = \frac{12345}{6780}$$

Cet exemple met en évidence des problématiques selon lesquelles les nombres décimaux ont des représentations décimales et fractionnaires, et ce n'est pas la virgule qui définit un nombre décimal. C'est l'occasion de mentionner aux élèves qu'un nombre décimal est rationnel, mais qu'un nombre rationnel n'est pas nécessairement décimal (ex. : 1/3). L'enseignant pourra ainsi insister sur le fait que ce n'est pas la virgule qui confère à un nombre le statut de nombre décimal.

Une troisième avenue est également possible : procéder à une estimation de la réponse, réaliser ensuite le calcul comme s'il s'agissait d'entier et replacer la virgule au bon endroit dans la réponse selon l'ordre de grandeur du résultat estimée au départ.

Ces trois méthodes n'ont cependant pas la même richesse mathématique ou même didactique. La première conserve la logique qui sous-tend la division des décimaux, logique selon laquelle on veut que le diviseur reste un nombre entier (le sens du partage). La deuxième propose une méthode hybride où nous modifions les nombres tout en gardant un contrôle sur cette dernière et qui permet de faire un travail sur les fractions décimales. La troisième, en contrepartie, ne tient pas compte de la division des nombres décimaux puisqu'il y a un retour aux nombres entiers pour les deux nombres de la division, mais elle permet tout de même de conserver un certain contrôle sur la grandeur du résultat, ce que le TM ne permet pas. Alors, à vous de choisir les compromis mathématiques et didactiques que vous voulez faire dans votre classe, tout en ayant en tête les répercussions que cette perte de richesse peut entraîner chez vos élèves à court et à long termes!

Truc Mathématique 2

Nous pouvons penser à effectuer un retour à l'écriture d'une division avec les élèves en réalisant des transformations tout comme nous l'avons fait précédemment dans l'exemple : avec la transformation des fractions (dividende et diviseur) pour obtenir des fractions ayant les mêmes dénominateurs, en nous référant aux fractions équivalentes (numérateur et dénominateur) et en isolant la fraction unitaire (numérateur et dénominateur). La simplification trouve un écho dans la propriété de l'élément neutre de la multiplication ou de la proportionnalité. Reprenons l'exemple de ce TM :

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{7}}=\frac{\frac{3\times7}{4\times7}}{\frac{2\times4}{7\times4}}=\frac{3\times7\times(\frac{1}{4\times7})}{2\times4\times(\frac{1}{7\times4})}=\frac{3\times7\times(\frac{1}{28})}{2\times4\times(\frac{1}{28})}$$
$$=\frac{3\times7}{2\times4}=\frac{3\times7}{4\times2}=\frac{21}{8}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{21}{8}$$

Cette méthode est d'une grande richesse mathématique et didactique, tant sur la réécriture d'une division que sur les fractions équivalentes et l'équivalence des expressions. Elle conserve la logique qui sous-tend la division et la simplification. Elle permet une relecture de l'opération et donne un sens au terme inverse. Les diverses justifications des trucs sont d'une grande richesse mathématique, mais elles n'ont pas les mêmes valeurs didactiques. Certaines s'appuient sur des techniques, mais ici, les choix dans la simplification des fractions sont primordiaux et en même temps pas évidents pour les élèves. Ce facteur vient d'ailleurs alimenter le côté « magique » de ce TM et le fait qu'il faille le démystifier avec les élèves.

Synthèse

L'enseignement articule les expériences et savoirs des apprenants en contexte, qui sont appelés à être décontextualisés (dualité contextualisation/décontextualisation). Ceci permet d'institutionnaliser les savoirs. Par ailleurs, plusieurs recherches ont montré que l'apprentissage des mathématiques passe par le développement de raisonnements mathématiques et devra s'articuler autour de la recherche de sens afin d'élargir la vision des apprenants qui habituellement se limitent à l'application des règles et de faits mémorisés (Adihou, Arsenault et Marchand, 2006; Charnay, 1999). Or, tels qu'ils sont définis, les TM sont des procédés qui permettent d'appliquer des règles. Nous constatons que dans la formation initiale et continue plusieurs enseignants utilisent des TM, sans en connaître la construction. Conne (1997, 1999) a mis en évidence les rapports dialectiques entre la construction des connaissances et le contenu de savoir en insistant sur l'expérience. Si les TM sont construits ou analysés par les élèves, alors ils peuvent être considérés comme un moyen pouvant générer un apprentissage riche de sens. Dans le cas contraire, les TM participeraient à renforcer la perception selon laquelle les mathématiques représentent une série de règles à apprendre par cœur (Charnay, 1999). Ainsi, les TM ne devraient pas être des recettes à appliquer dans le but de contourner des difficultés ou des apprentissages mathématiques. Dans ce cas, les élèves ne seraient pas conscientisés aux contenus mathématiques sous-jacents et donc passeraient à côté de la richesse des mathématiques en termes de système interne structuré et cohérent.

D'autres pistes didactiques pourraient être envisagées pour valoriser une exploitation riche de sens pour ces TM, tout en s'assurant que les élèves possèdent les connaissances mathématiques nécessaires à la justification de ces derniers : 1) amener les élèves à la découverte de régularités dans les opérations ou formules ou encore 2) provoquer des moments déclencheurs en explorant le TM et en recherchant le sens caché.

Notons que dans le cadre d'un projet (Chantier 7[5]) de formation d'enseignants et d'orthopédagogues (Adihou et Marchand, 2012-2014), nous avons analysé le concept de TM et leur exploitation en classe sous différents points de vue. Cinq catégories de TM ont émergé : le TM en lien avec 1) le vocabulaire et les conventions (trucs mnémotechniques) ; 2) les algorithmes ou formules ; 3) les propriétés des objets mathématiques ; 4) le concept en soi et 5) des faits mathématiques. Lorsque nous avons envisagé leur exploitation en classe, trois types d'activités ont été identifiés, reflétant les pistes envisagées précédemment dans l'article : 1) faire autrement ; 2) à la recherche de régularités et 3) pourquoi ça marche ?

5 *Projet de formation d'enseignants et d'orthopédagogues. En cours.*

Conclusion

Étant donné qu'il est irréaliste d'envisager un enseignement sans l'utilisation des TM[6], surtout dans l'optique où les mathématiques sont par leur nature même à la recherche de régularités et de méthodes plus efficace pour résoudre des problèmes, nous voyons un intérêt certain pour une exploitation judicieuse de ces derniers en classe de mathématiques. Mais, il s'agit d'un couteau à double tranchant. Une exploitation réfléchie des TM en classe du secondaire peut être une excellente occasion d'alimenter les concepts mathématiques et d'élargir la vision mathématique, mais le danger de tomber dans une utilisation technique est très grand tant de la part des enseignants que des élèves. Un retour centré sur la reconstruction et l'analyse des TM amène les apprenants à une meilleure compréhension mathématique, à un développement des raisonnements mathématiques et à une intégration des liens entre les divers concepts entourant les TM.

Références

Adihou, A. (2003). *Étude des phénomènes didactiques liés à la méthode de résolution de problèmes arithmétiques par la mise en équations en 9ème secondaire*, Thèse de doctorat, Université de Genève.

Adihou, A. et Arsenault, C. (2012). Dispositif de formation mathématique pour les enseignants du primaire : choix, caractéristiques, résultats et impacts. In J. Proulx, C. Corriveau, & H. Squalli. (éd.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques, Québec :* Les Presses universitaires du Québec

Adihou A., Arsenault C., Marchand P. (2012) Dispositif de formation mathématique pour les futurs maîtres. In J.-L. Dorier, S. Coutat (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21esiècle – Actes du colloque EMF2012*. (pp. 260 -279). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Adihou, A., Arsenault, C., Marchand, P. (2006). Réflexion sur un dispositif de formation pour le développement de compétences en mathématiques chez les futurs maîtres. *In N. Bednarz, C. Mary (Eds.) Acte du 3e colloque international Espace mathématique francophone, « L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés »*(pp. 1-11). [Cédérom]. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Adihou, A., Marchand, P. (2012-2014). Regard didactique et pratique sur les activités de classe mettant en jeu les trucs mathématiques. *Chantier 7 : Projet de formation d'enseignants et d'orthopédagogues.* En cours.

Adihou, A., Marchand P. (2010). Trucs mathématiques. *Bulletin de l'association mathématique du Québec (AMQ) 50*(3), 37-51.

Barabé, G. (2011). *Une étude du développement professionnel par l'intégration dans la pratique d'enseignement d'une approche visant le développement du potentiel mathématique des élèves.* Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke.

Charnay, R. (1999). À la recherche du sens... *Grand N, 64*, 59-63

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne,. In G. Lemoyne & F. Conne (Éd.). *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Montréal : Presses de l'Université de Montréal, (pp. 31-69).

Conne, F. (1997). L'activité dans le couple enseignant/enseigné, In M Bailleul (Éd.) *Actes de la 9e École d'été de didactique des mathématiques à Houlgate,* Grenoble : La pensée sauvage.

Loock, M.-F. (2006). *L'encyclopédie des trucs – Des milliers d'astuces de A à Z.* Paris : Édition J'ai lu, Vie quotidienne.

Marchand, P., Adihou, A., Lajoie, C., Maheux, J.-F. et Bisson, C. (2012). Les jeux de rôles en formation initiale : Mettre les compétences professionnelles en action dans la formation didactique, *Actes du 27e Congrès de l'Association internationale de pédagogie universitaire (AIPU)*, 198-208.

Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Collection La Spirale. Éditions Modulo.

6 Au delà de la définition donnée dans cet article, la question de savoir ce qu'est un TM demeure entière. Cet aspect fait l'objet d'une réflexion et nous espérons le clarifier dans un autre article.