# 141

# MATH ECOLE

JANVIER 1990
29e ANNÉE

# MATH-ECOLE 141

29e ANNÉE Paraît cinq fois par an JANVIER 1990

## Editorial

En décembre 1989, la revue *Science et Avenir* présentait en pleine page couverture un titre accrocheur: *A quoi servent les maths?* Cette interrogation est significative de la situation particulière de cette branche, si importante dans toute les activités humaines, mais aussi bien décriée depuis l'arrivée de la mathématique dite *moderne*, il y a plus de trente ans. La mathématique partage avec la philosophie le privilège d'être soumise à intervalle relativement régulier à ce type d'interrogation, comme s'il s'agissait d'exorciser un démon, de conjurer le mauvais sort, ou plus simplement de minimiser notre propension à refuser l'école de rigueur qu'impose la pensée rationnelle.

Et pourtant, dans l'un des articles consacrés à ce thème, Sylvestre Huet rappelle ce qu'André Lichnerowicz, professeur au Collège de France et mathématicien bien connu, écrivait en 1969: «*Le problème des mathématiques et de leur enseignement est ainsi devenu le premier peut-être des problèmes mondiaux de l'éducation. Il n'y a pas, il ne peut y avoir une conception confortable et définitive des mathématiques dites élémentaires, fin en soi, perfection fermée sur elle même; une conception qu'il suffirait d'affiner uniquement à la lumière d'expériences pédagogiques. D'autre part, apprendre aux non-mathématiciens à se servir avec efficacité de certaines techniques mathématiques disponibles est devenu un véritable service public*».

Vingt ans plus tard, les dirigeants de nombreuses entreprises continuent à tirer en vain la sonnette d'alarme et éprouvent bien des difficultés à recruter des scientifiques bien formés; les universités se vident de leurs étudiants en mathématique et les ingénieurs se font rares. Pendant ce temps, pour toutes sortes de raisons, l'enseignement de la mathématique, après l'effervescence des réformes, semble avoir doucettement repris son rythme antérieur: acquisitions isolées de règles, d'algorithmes, de théorèmes; évaluation pour sélectionner plutôt que pour favoriser les apprentissages; accumulation de savoirs au détriment de la formation du raisonnement.

Et pourtant, pour comprendre le monde actuel, pour saisir l'interdépendance des problèmes, pour avoir prise sur les faits, il faut précisément que les élèves acquièrent les bases de réflexion et les méthodes de pensée indispensables aussi bien à l'ouvrier et à l'ingénieur dans les entreprises que dans les sciences humaines ou dans les affaires politiques. Comment donner à la mathématique la place et la forme nécessaires aux jeunes du XXIe siècle?

Raymond Hutin

# La résolution de problèmes arithmétiques: bilan et perspectives

par Jean Brun, professeur à la faculté de psychologie et des sciences de l'éducation de Genève

Faire un bilan exhaustif des recherches sur la résolution de problèmes arithmétiques est une vaste entreprise. Pour les seuls problèmes additifs,ESCARABAJAL (1984) remarque que la revue de questions effectuée par CARPENTER et al. en 1982 «ne comporte pas moins de 244 références bibliographiques». Mon propos consistera à reprendre la trame de la démarche qui, depuis une dizaine d'années, m'a conduit, après avoir étudié l'article de VERGNAUD et DURAND (1976) dans un groupe de chercheurs, à prolonger la réflexion sur les questions relatives aux problèmes additifs.

S'agissant de problèmes arithmétiques **à l'école,** la première question qui vient à l'esprit est de se demander si l'on a à faire à de véritables problèmes.

Dans une perspective psychologique, en effet, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet **d'élaborer** une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple.

On peut se demander dans quelle mesure les tâches scolaires identifiées comme problèmes arithmétiques correspondent à cette définition. Il est inutile ici de revenir sur les critiques abondantes dont ces problèmes ont été l'objet; leur disparition des moyens d'enseignement issus de la réforme des années soixante est un fait. Cette mise à l'écart des problèmes arithmétiques, qualifiés de traditionnels, tenait à ce que, pour la plupart d'entre eux, ils consistaient en des problèmes d'application mécanique d'une règle ou d'une opération qui venaient d'être enseignées; rares étaient les problèmes qui demandaient une élaboration personnelle de la part de l'élève: ils étaient annoncés de la manière suivante dans la Préface d'un manuel genevois de 3e année édité en 1957: «certains, signalés par un astérisque et relativement difficiles, seront réservés aux élèves bien doués, en particulier à ceux qui ont terminé bien avant leurs camarades la tâche proposée à l'ensemble de la classe».

La réforme des mathématiques modernes se donnait d'autres buts et d'autres moyens d'enseignement. Actuellement les manuels romands les plus récents (1984, 1985) insistent beaucoup sur la notion de «situations-problèmes» afin de rapprocher les problèmes de leur dimension psychologique et de mettre l'accent sur l'activité que les élèves investissent dans leur résolution...

Dans l'Avant-Propos de ces ouvrages, la révision des manuels est présentée comme un double enjeu:

«– favoriser au mieux un apprentissage mathématique axé sur la recherche active de solutions des situations-problèmes diverses, sans négliger l'acquisition de notions et de techniques;

– tenir compte des contraintes liées à l'animation du groupe-classe: par exemple susciter une recherche active et autonome chez les élèves ne s'improvise pas, cela requiert un répertoire d'activités et de problèmes appropriés.» (p.6)

Si les moyens d'enseignement s'efforcent de revaloriser l'activité de résolution de problèmes en tenant compte d'une perspective psychologique et même épistémologique, il reste, et c'est ce que suggère le second point de l'avant-propos cité, à préciser cela dans une perspective didactique.

**Un problème arithmétique s'inscrit dans une «relation didactique» (SCHUBAUER-LEONI 1986) où fonctionnent des représentations qui organisent et délimitent les attentes réciproques des élèves et des maîtres envers ce qu'est un problème, ce qu'on fait dans ce cas.** Par exemple, un problème arithmétique c'est un énoncé qui comprend des données numériques; celles-ci devront être toutes utilisées pour trouver une solution qui s'obtient à l'aide des notions ou des algorithmes qui viennent d'être appris; c'est au maître que revient de juger de la réponse, juste ou fausse, en tenant compte éventuellement du mode de rédaction de cette réponse.

Bref, un examen attentif des travaux sur les problèmes arithmétiques mérite d'être fait pour essayer de voir si les raisons de leur rejet ne nous renvoient pas en fait à des raisons d'ordre didactique plutôt qu'à une impossibilité de nature de ces problèmes arithmétiques à solliciter une activité de résolution de problèmes qui réponde aux critères habituellement reconnus. En d'autres termes faut-il nécessairement renoncer à utiliser des problèmes arithmétiques simples pour susciter chez de jeunes élèves un comportement de recherche?

## 1. La structure des problèmes

Un ensemble de travaux (VERGNAUD et DURAND, 1976; VERGNAUD, 1981 et 1982) ont mis en évidence l'influence des différentes structures de problèmes additifs, sous forme d'énoncés, sur la résolution de ces problèmes. Il s'agit de problèmes dont la solution demande une addition ou une soustraction, et représentables sous la forme $a + b = c$ ou $a - b = c$.

Les points suivant sont à souligner:

a) **la distinction entre états (ou mesures) et transformations,** qui renvoie à celle de nombre-mesure et opérateur. Exemple, dans Pierre a 6 billes, il perd 4 billes; 6 billes mesure l'état de la collection de Pierre, et 4 billes est une transformation (négative) de cet état.

b) sur cette distinction repose **la classification de six grandes catégories de relations numériques additives.** Ces catégories ne reposent donc pas sur une simple distinction entre opérations d'addition et de soustraction mais sur des **relations numériques.**

c) à l'intérieur de chacune de ces catégories, il est nécessaire de distinguer **différentes classes de problèmes,** d'inégale difficulté selon les **«calculs relationnels»** que demande leur solution. Il est important de distinguer en effet dans la résolution de ces problèmes:

- le calcul numérique proprement dit et
- **le calcul relationnel,** c'est-à-dire **les opérations de pensée** nécessaires pour effectuer les mises en relations pertinentes et utiliser les procédures adéquates.

  Ces classes de problèmes peuvent être fonction du signe, positif ou négatif de la transformation, ou de l'élément du problème sur lequel porte la question: état initial, final, transformation...

d) une hiérarchie de complexité a été établie. Cette complexité varie doublement: en fonction des différentes catégories de relations et en fonction des différentes classes de problèmes à l'intérieur de chaque catégorie.
VERGNAUD et DURAND 1976 ont montré, sur une série de 12 problèmes, auprès d'une population d'élèves répartis sur les cinq degrés de l'école élémentaire:

- un décalage, pouvant aller jusqu'à trois ans, entre des problèmes appartenant à des catégories de relations différentes et par ailleurs entièrement comparables: catégories Etat-Transformation-Etat (ETE) d'une part, et Transformation-Transformation-Transformation (TTT) d'autre part. Ce résultat valide la distinction basée sur l'analyse des relations.
- une hiérarchie dans les réussites aux classes de problèmes à l'intérieur de TTT, sur toute la scolarité primaire. Ces niveaux de complexité renvoient aux différents «calculs relationnels» que nécessite la solution de ces problèmes.
- une variété de procédures des élèves qui nous permet de comprendre les réussites et les échecs des élèves ainsi que les niveaux de complexité.

e) la place et le rôle des représentations symboliques font partie de l'étude de l'acquisition des différentes catégories de relations additives.

f) la nécessité d'examiner d'autres facteurs de complexité que le contenu relationnel des problèmes, tels que la formulation des énoncés, la complexité du calcul numérique, les contenus, etc...

Après avoir étudié la recherche de VERGNAUD et DURAND (1976) dans le cadre d'un cours, des enseignants soumirent la série des 12 problèmes à leurs élèves, sous forme d'un travail écrit en classe. Les conditions changeaient donc par rapport à la recherche de référence puisque dans cette dernière les problèmes étaient donnés oralement aux élèves, sans écriture de la réponse. François CONNE, dans deux articles (1979 et 1984) a analysé ces données de façon approfondie.

Première constatation: les résultats de la recherche de référence sont confirmés sur cette population de cinq classes d'élèves de degrés 2 à 4.
On retrouve la hiérarchie de complexité entre catégories de relations et entre classes de problèmes.

Le point essentiel des analyses de F. CONNE a trait à l'étude transversale des procédures, son but étant de parvenir à retrouver **comment l'élève construit progressivement dans le temps ces différentes mises en relations:** «La question que je me pose, c'est comment rendre compte de ce qui se passe pour le sujet... La recherche de VERGNAUD suppose au départ l'analyse de quelques situations soustractives. Cette analyse théorique amène l'auteur à définir les notions d'état et de transformation et les schémas ETE et TTT. La recherche met en évidence que cette analyse est pertinente et que l'élève ne traite pas les nombres-états comme les nombres-transformations. Mais il ne faut pas oublier que ce sont là des notions d'adultes. Ce que VERGNAUD montre, c'est que l'élève fait la différence; reste à savoir comment il conçoit et construit ces notions. C'est ce que j'ai tenté de reconstituer à travers les réponses d'élèves.» (1984, p. 278)

CONNE (1979) rend compte de la construction des Transformations et de leur composition. Alors que pour l'adulte une transformation se représente par un nombre relatif, il faut faire une distinction, dans les représentations des élèves entre le signe de la transformation et sa quantification, du fait de l'observation d'un décalage entre les deux: «une chose qui m'a frappé dans les réponses des élèves, c'est que si le signe de la transformation est assez vite reconnu, la quantification peut être assez tardive et passe par le biais des états.» (p. 47) La description donnée des niveaux de cette construction est la suivante:

- pertes et gains sont un constat global plutôt que des transformations. D'où des réponses purement qualitatives. Exemple: Laurent a perdu dans les deux parties.
- Les transformations deviennent le signal d'une opération à effectuer.
- Les tranformations deviennent une notion en soi. On assiste alors à un début de quantification qui se fait par le biais des états. Exemple: Bertrand, il **avait** 7 billes.
- Enfin les transformations sont un élément d'une situation avec deux aspects: le signe et l'intensité.

Dans son analyse de 1984, CONNE reprend ces étapes pour proposer «un modèle synthétique» des différents calculs relationnels en rapport avec la comparaison des énoncés. Il met ainsi en évidence «l'arithmétisation des transformations» à travers la complexité graduelle des problèmes qui constitue TTT. Il la résume ainsi: «Je considère le schéma nombre/opérateur comme un analyseur, pour le sujet, des relations évoquées dans les énoncés. Il concerne à un premier plan les calculs numériques et les représentations que s'en fait le sujet. A un second plan, il peut être appliqué aux relations état/transformation mais ensuite aussi aux relations entre transformations sans qu'il soit nécessaire de passer par une reconstitution réaliste du jeu de billes. Ainsi on peut penser que, dans la situation G5 + G4 = G9, G4 transforme le gain initial G5 en l'augmentant tout comme un gain augmente un avoir. Le schéma nombre/opérateur est pris à un second niveau et, via les amplitudes, mesurées «en billes», les transformations deviennent le modèle de leurs propres variations.» (p. 311)

Un autre résultat de cette recherche a trait à la **manière dont les élèves tournent les difficultés qu'ils rencontrent** sur les calculs relationnels. Par des «glissements de sens» dus à la façon dont ils assimilent le problème à leurs cadres de pensée et dont ils traitent les relations, les élèves parviennent à entrer en matière sur la résolution et, quand les données s'y prêtent, à donner la réponse numérique correcte. Mais leurs formulations montrent quelles mises en relation ils ont effectuées. Exemple: «Laurent **avait** 7 billes avant de jouer», alors qu'au problème Laurent la question porte sur la transformation finale (il a perdu 7 billes), et non sur l'état initial. Fonctionnellement pour l'élève, les transformations demandent un état initial à partir duquel on peut les effectuer. Autre exemple: «a gagné 6 billes à la première partie» est interprété en «a six billes au départ». Les adaptations faites par les élèves sont différentes dans les problèmes où les transformations sont de signes contraires car on ne peut alors éviter de traiter des transformations; ces problèmes sont les plus difficiles pour les élèves. Les démarches suivantes ont été relevées par CONNE:

- application du schéma ETE
- inversion de l'ordre des données
- inversion de la perte
- hypothèses sur l'état initial
- impossibilité

Ces recherches (VERGNAUD et DURAND, CONNE) montrent que les structures attribuées aux différentes catégories de problèmes sont bien des structures pour l'enfant, qu'elles se développent sur une longue période de temps, et que l'examen des réponses et des procédures de résolution permet de construire l'arithmétisation progressive des relations en jeu.

De nombreuses autres recherches (voir CARPENTER et MOSER 1982, 1984, DE CORTE et VERSCHAFFEL 1987) ont étudié la résolution de problèmes additifs en distinguant des classes de problèmes. **De leur examen ressort une forte convergence sur le fait que les stratégies des enfants pour résoudre les différents problèmes d'addition et de soustraction sont très fortement influencées par la structure du problème.** Les distinctions faites a priori sur les classes de problèmes se trouvent confirmées par l'examen des réponses et des stratégies des élèves. Le bilan de ces recherches (CARPENTER 1985) offre une classification des stratégies utilisées par les élèves, en correspondance avec les problèmes.

CARPENTER et MOSER (1982) dans une étude longitudinale portant sur les degrés 1 à 3 ont distingué les stratégies additives et les stratégies soustractives en fonction de leur niveau d'intériorisation:

- stratégies avec support matériel
- stratégies avec comptage verbal
- stratégies avec sommes intériorisées

Ils ont montré une évolution vers les stratégies intériorisées en fonction des degrés scolaires, ainsi qu'une influence de la structure des problèmes de soustraction sur les stratégies de résolution (principalement pour les deux premières stratégies).

DE CORTE et VERSCHAFFEL (1987) ont confirmé les résultats de CARPENTER et MOSER, montrant eux aussi que les stratégies des élèves sont fortement influencées par la structure du problème, et ceci à tous les niveaux de stratégie, aussi bien pour l'addition que pour la soustraction.

A propos de ces recherches, je voudrais souligner la différence entre leurs cadres théoriques.

**Pour VERGNAUD la clef de voûte des catégories de relations additives est la distinction entre Etat et Transformation** qui renvoie à celle de nombre-mesure et d'opérateur. Et ce sont ces notions qui fonctionnent derrière les représentations que les élèves se donnent des problèmes. Le concept essentiel pour comprendre ce fonctionnement cognitif est celui de «calcul relationnel». Par ses opérations de pensée, le sujet structure le problème.
Pour CARPENTER et MOSER ou DE CORTE et VERSCHAFFEL, le problème **a une structure** (Separate, Join, etc...) et les sujets répondent à cette structure par des stratégies de solutionneur de problème.

**Avec le concept de calcul relationnel, on attribue au sujet en amont des stratégies de mises en relation par lesquelles il structure le problème et se le représente.** En fonction des mises en relation activées, le problème est plus ou moins assimilé, ou résiste plus ou moins. Ainsi a-t-on vu comment l'élève transformait l'énoncé à la dimension du calcul relationnel effectué. C'est un point décisif de **concevoir les stratégies comme étant sous le contrôle du calcul relationnel.**

## 2. Les variables d'énoncé dans la résolution de problèmes

Si la structure relationnelle du problème apparaît bien comme le facteur principal qui détermine sa résolution, ce n'est pas le seul facteur qui l'influence. Les variables d'ordre d'introduction des données dans l'énoncé ont par exemple été relevées dans des recherches citées ci-dessus. (DE CORTE et VERSCHAFFEL 1987).

Parmi les variables susceptibles d'influencer la résolution, une attention toute particulière doit être portée à **la formulation des énoncés.** Même s'il est difficile de dissocier cette formulation des structures relationnelles mêmes, certaines formes d'énoncés semblent rendre la structure d'un problème plus claire que d'autres, et donc plus facile à se représenter pour le sujet. CARPENTER (1985), tout en mentionnant la pertinence de ce facteur, remarquait qu'on savait peu de chose sur la façon dont les variations d'énoncés contribuaient à la difficulté d'un problème. Deux recherches de langue française fournissent un début de réponse à cette interrogation.

Dans une recherche exploratoire, BOVET (1978) fait varier les énoncés d'une même classe de problèmes (structure Etat - Transformation - Etat, avec inconnue sur l'état initial) selon deux paramètres: le temps des verbes servant à marquer la chronologie des événements et donc à repérer les états initial et final de la transformation, ainsi que l'ordre d'introduction des événements de l'énoncé:

certains énoncés respectaient l'ordre chronologique et marquaient l'ordre des événements par des temps de verbe différents,

d'autres respectaient l'ordre chronologique mais utilisaient le même temps pour tous les verbes; exemple «Marc sort des blocs de sa boîte de construction. Il utilise 26 blocs pour construire une tour. Il remet 14 blocs dans sa boîte de construction. Marc sort combien de blocs de sa boîte de construction?»

d'autres enfin brouillaient ou inversaient l'ordre chronologique mais utilisaient des temps de verbe différents pour signifier l'ordre des événements; exemple: «Françoise rapporte 13 bonbons à la maison. Elle a mangé 9 bonbons en chemin. Elle avait acheté des bonbons au marchand. Françoise avait acheté combien de bonbons au marchand?»

Les énoncés ne contiennent aucun adverbe de temps. La réponse était demandée en deux étapes: d'abord ordonner les événements de l'énoncé, puis fournir la réponse numérique. Sur un population d'élèves de troisième année, l'auteur présente les résultats suivants: «Nous observons de grandes différences dans le nombre de réponses correctes selon les formes de présentation. Lorsque l'ordre de présentation correspond à l'ordre chronologique des événements, le taux de réussite est élevé. Par contre il est inférieur pour les ordres brouillés et inverses... La variable «ordre de présentation semble donc avoir un effet décisif sur la réussite globale aux problèmes.» (p. 15)

L'examen de cette recherche montre que lorsque les temps des verbes sont les seuls éléments qui permettent de repérer et d'organiser «état initial - transformation - état final» une majorité d'élèves sont mis en difficulté; lorsque l'ordre de présentation correspond à l'ordre chronologique, la réussite est nettement plus élevée, et reste au même niveau si les verbes sont tous au même temps (présent, passé composé).

L'auteur attribue ces différences de réussite à des facteurs psycholinguistiques, plus précisément au développement de l'acquisition des formes verbales: «il est apparu avec évidence que la maîtrise des marques formelles des temps dans le langage écrit est encore loin d'être acquise chez nos enfants âgés de 8-9 ans en troisième année primaire.» (p. 30) L'ordre d'introduction des données sert alors à organiser la succession des événements dans l'énoncé.

FAYOL et ABDI (1986) ont approfondi l'étude de cette question de l'influence de la formulation des énoncés sur la résolution de problèmes additifs. Leur étude porte sur plusieurs degrés scolaires, avec des élèves de 6 à 10 ans, sur des problèmes à structure «état initial - deux transformations - état final», l'inconnue étant soit l'état initial, soit l'état final. La formulation variait quant à **la place des transformations dans l'énoncé:** elles étaient formulées soit en premier soit en second; et quant à **la place de la question,** formulée soit en position initiale soit en position finale.

Les résultats principaux sont les suivants:

a) ils confirment la hiérarchie de complexité entre les problèmes dont l'inconnue porte sur l'état initial et ceux dont l'inconnue porte sur l'état final. La réussite aux premiers est, à tous les âges considérés, inférieure à celle aux seconds, et elle évolue avec l'âge. **L'importance du calcul relationnel est à nouveau vérifiée.**

b) ils montrent **l'influence de «l'ordre d'introduction des informations»**. Les auteurs écrivent: «Tout se passe comme si la découverte de la solution se révélait plus aisée lorsque les sujets reçoivent d'abord les données relatives aux transformations» (p. 49)

c) ils montrent **l'influence de l'emplacement de la question:** «En effet, la localisation (de la question) en tête de problèmes entraîne un très important accroissement des scores» (p. 50) et ce à tout âge dans la population considérée. Cette influence se manifeste davantage lorsque le calcul relationnel est plus complexe (question portant sur l'état initial).

Les auteurs interprètent ces résultats à l'aide de modèles de traitement de l'information et concluent que les caractéristiques de leurs énoncés peuvent être considérées comme relevant de questions de «formulation» «mais l'explication de leur impact nous semble pouvoir s'effectuer en référence à un modèle de fonctionnement cognitif faisant appel à la notion de mémoire de travail (M.T.), celle-ci stockant de manière labile un nombre limité d'informations et ne pouvant accepter que très peu de traitements simultanés.» écrivent-ils (p. 55).

Ces résultats vont tous dans le sens de l'influence de diverses variables de formulation sur la résolution de problèmes. Leur intérêt s'accroît lorsqu'on les articule avec le facteur central de la complexité, **le calcul sur les relations.**

En effet le point décisif de la résolution de tels problèmes me semble être celui de **l'élaboration du calcul relationnel pertinent.** Or il est intéressant de voir que cette élaboration par l'élève peut passer par des variables de formulation. L'analyse des procédures faites dans la recherche de FAYOL et ABDI montre bien comment, selon les modalités de formulation, les choix procéduraux des élèves peuvent être différents et conduire à des réussites, ou des «semi-réussites».

La question didactique est de savoir si c'est le problème qui se «laisse faire», au sens où l'élève peut réussir avec des procédures qui renvoient en fait à des calculs relationnels plus simples (glissements de sens favorisés par la formulation), alors il y a comme une réduction de la complexité. Une alternative est que, dans le cadre d'une séquence didactique cherchant à solliciter de la part des élèves des mises en relation de complexité variée, on puisse utiliser ces variables de formulation parmi les leviers possibles pour susciter un rejet de procédures anciennes et un choix de nouvelles ainsi que des comparaisons entre procédures.

## 3. Problèmes additifs et représentations symboliques

Une question didactique importante concerne le savoir requis par l'école sur les représentations symboliques et graphiques (écritures arithmétiques, schémas) à propos de la résolution de problèmes. Cette question demande que soient précisés **les rapports entre ces représentations et le processus de résolution:** quelle place et quelles fonctions tiennent les représentations dans ce processus? Certaines ne rendraient-elles pas mieux compte que d'autres des caractéristiques relationnelles des différentes classes de problèmes? La communication didactique ne pourrait-elle pas être facilitée par un choix de ces représentations? Quelles conditions sont requises pour leur élaboration par les élèves dans une situation donnée? Quelles résistances offrent les différentes représentations dans ce travail d'élaboration?

Nous avons vu le rôle premier des mises en relation dans la résolution. Il reste à mieux connaître **comment ces mises en relation effectuées par l'élève interagissent avec le matériau symbolique enseigné.** Les procédures didactiques à mettre en œuvre à ce sujet s'avèrent complexes. Les incitations à mettre en correspondance la démarche de résolution avec la production de schémas ou d'écritures formelles sont fréquentes mais restent très générales; les observations de travaux d'élèves aboutissent souvent au constat que les élèves n'utilisent pas les schémas appris, ou bien les utilisent **après** avoir résolu le problème, pour répondre à une consigne qui leur demande explicitement d'utiliser un schéma. Si résoudre un problème c'est le rendre calculable, comment s'élabore le codage de ce calcul? Dans quel type de situation peut-on faire fonctionner une telle élaboration?

Pour avancer sur ces questions, la psychologie sociale génétique nous a semblé offrir un cadre théorique pertinent. Après qu'ait été montré le rôle de l'interaction sociale dans le développement intellectuel, PERRET-CLERMONT (1979), SCHUBAUER-LEONI et PERRET-CLERMONT (1980) ont étudié l'effet de variables d'interaction et de communication entre élèves sur les représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. Il ne s'agissait plus de problèmes à énoncés écrits, mais présentés avec différents matériels (bonbons, fleurs) et du type $a + b + c = x$. Citons un passage de leur conclusion:

«Suite à la mise en condition expérimentale la plupart des élèves de notre expérience (82% de la population expérimentale) donnent une formulation plus explicite de leur «message» lors du post-test. Les sujets qui codent en interaction et surtout s'ils bénéficient du décodage d'un pair progressent tout particulièrement entre le pré-test et le post-test quant au degré d'explicitation de leur notation. Les sujets qui codent seuls et qui sont confrontés uniquement au décodage implicite de l'adulte semblent également produire des codages significativement plus explicites au post-test qu'au pré-test, tandis que ce n'est pas le cas pour les sujets travaillant seuls et recevant le décodage d'un pair.

Si la mise en condition expérimentale semble avoir favorisé une explicitation de plus en plus grande des messages, le recours spontané au formalisme mathématique spécifiquement enseigné en classe reste sporadique.» (p. 339) Cette dernière conclusion est ensuite précisée en fonction des conditions expérimentales de la manière suivante: «Ainsi nous constatons que, cumulées, l'interaction et la communication à un autrui produisent un recours plus fréquent et meilleur au formalisme.» (p. 340)

Sur cette question du recours au formalisme appris, il est intéressant de s'arrêter sur un résultat à une épreuve du pré-test. La population était une population d'élèves de 2e année primaire (7 à 8 ans). Dans cette épreuve individuelle, le matériel consistait en un tas de bonbons et un sac de toile opaque. L'expérimentatrice montrait d'abord 2 bonbons à l'élève et les mettait dans le sac. Puis elle montrait 4 bonbons et les mettait dans le sac également. Elle ressortait ensuite un bonbon du sac et demandait à l'élève «s'il est possible de savoir combien de bonbons il y a à la fin dans le cornet.»

Une fois la réponse fournie, l'élève recevait une feuille de papier et un crayon et l'expérimentatrice lui demandait: «Il te faut expliquer tout ce qui s'est passé avec les bonbons, et combien il en reste à la fin, à un autre enfant qui n'a pas vu ce que nous avons fait avec les bonbons pour en avoir 5 à la fin dans le cornet.» (p. 311)

Seuls 25 des 89 élèves de 2e année primaire ont utilisé les signes mathématiques appris (+, –, =), et 9 de ces 25 ont utilisé ces signes correctement. Les autres ont soit fait un dessin, écrit des phrases ou des chiffres sans signes arithmétiques.

Ces résultats montrent d'une part la difficulté des élèves à utiliser au pré-test ces représentations **hors du contexte strictement scolaire,** et d'autre part l'influence positive des variables (ici sociales) de situation sur **l'explication** des données du problème et, dans une moindre mesure, sur le recours à ces représentations canoniques lors du post-test.

Parmi les questions ouvertes à la fin de cette recherche, celle-ci a plus particulièrement retenu notre attention: «les procédures utilisées par l'enfant quand il résout un problème, celles qu'il verbalise à cette occasion, et les représentations écrites qu'il en donne présentent-elles une dynamique de construction différente en fonction du contexte interpersonnel dans lequel elles sont activées?» (p. 343)

Nous nous sommes penchés sur cette question de la dynamique de la construction des représentations symboliques (SAADA et BRUN 1984) en observant comment une telle dynamique fonctionnait dans un jeu de communication avec des élèves de 3e année primaire. La situation est représentable par une écriture de type $a + b - c = x$.

Il s'agit d'un jeu à trois dés; deux font gagner, l'autre fait perdre. Avec la somme ainsi obtenue au lancer des trois dés, le joueur peut obtenir le nombre de bonbons correspondants. Pour cela, il doit formuler un message à un autre joueur qui tient le rôle de marchand de bonbons. Ce marchand, (qui connaît les règles du jeu de dés) ne peut donner les bonbons demandés que s'il trouve le message suffisamment explicite sur les raisons qui font demander un tel nombre de bonbons.

La situation de communication mise ainsi en place présente les principales caractéristiques suivantes:

a) **Le but de la communication:** les interlocuteurs ont à se mettre d'accord sur une formulation écrite pour rendre compte des opérations par lesquelles un résultat a été obtenu: «L'écrivain doit la rendre intelligible à un lecteur qui devra la comprendre, et pour cela demander d'éventuelles explications à l'écrivain, qui, à son tour, doit alors justifier son message.» (p. 146)
L'activité du lecteur du message (distribuer les bonbons) est conditionnée par la formulation de l'écrivain. On est donc en présence d'un réel problème de communication. Chacun des protagonistes est incité à résoudre ce problème de communication du fait des rôles qui leur sont attribués. Le rôle du récepteur est conçu pour l'impliquer dans le jeu tout autant que l'émetteur, du fait de la «responsabilité sociale» dont il est investi dans le jeu.

b) **La durée des échanges** n'est pas limitée. Cependant le déroulement est organisé en trois temps, avec un quatrième temps éventuel.

c) L'expérimentateur relance occasionnellement le jeu en rappelant la «responsabilité sociale» des protagonistes.

Si nous considérons maintenant les résultats, il faut mentionner deux catégories d'analyses: l'une sur les messages obtenus et l'autre sur les protocoles des déroulements des parties. (20 couples de joueurs):

a) Les analyses des **contenus** des formulations révèlent trois dimensions:
- la composition additive, plus ou moins élaborée
- l'explicitation des données et des opérations
- le registre de formulation (dessin, langue maternelle, signes arithmétiques.)

b) Les analyses de **l'évolution** des formulations:
- modifications des contenus
- facteurs de la communication en rapport avec ces modifications

Nous pouvons retenir les principaux résultats suivants:

a) L'évolution des contenus des formulations porte non seulement sur l'explicitation mais aussi sur le **degré de composition additive,** à travers un processus actif de résolution, par réorganisations successives des relations représentables.

b) Au terme des trois temps du jeu, **le recours à l'écriture équationnelle canonique n'est pas majoritaire** (8 couples de joueurs sur 20). Cependant il convient de noter qu'une évolution semble se manifester par rapport à l'utilisation du code conventionnel faite en 2e année.

c) **Les modifications des formulations concernent peu le registre** de formulation utilisé: «lorsqu'une résolution est amorcée dans un registre symbolique, elle a une très forte probabilité de s'achever dans ce même registre... Il faut souligner la résistance des registres de symbolisation malgré les échanges conflictuels entre les interlocuteurs.» (p. 180)

d) Le fonctionnement du jeu montre le caractère progressif de la démarche de résolution, et **l'importance de l'étalement du jeu dans le temps,** à la fois pour la construction de significations communes aux deux joueurs, et pour l'élaboration des représentations symboliques.
   Le fonctionnement social de la situation s'inscrit dans les limites suivantes: les conceptions des élèves sur les relations additives, la nature de la représentation de la situation chez les joueurs, et le temps nécessaire à l'élaboration des représentations pertinentes.

Il resterait à investiguer d'autres situations à même de rendre opératoires les représentations symboliques. Je pense en particulier à des situations qui demanderaient de **comparer** différentes classes de problèmes.

## 4. Perspectives

L'examen des travaux sur les problèmes additifs que nous venons de faire montre à l'évidence une activité potentielle d'élaboration, constructive, dans la résolution de problèmes arithmétiques. C'est la première réponse à apporter à notre interrogation du début.

Nous avons également maintenant des repères sur les étapes de la genèse de cette construction, et sur ses mécanismes de fonctionnement. La construction de la représentation d'un problème par l'élève repose à la fois sur ses connaissances logico-mathématiques, sur les composantes relationnelles qu'il retient (calculs relationnels) entre les objets mathématiques identifiés (Etat - Transformation), et sur les procédures qui lui font traiter ces relations.

**Les questions didactiques à propos de l'enseignement des structures additives** renvoient en particulier à **l'évolution des mises en relation** chez l'élève. L'accès à cette évolution passe par les situations, les procédures et les représentations symboliques; plus précisément la question didactique importante me semble consister dans l'organisation du «travail» des procédures et des représentations symboliques plutôt qu'en leur enseignement direct. Cela peut par exemple demander de concevoir des séquences de problèmes contrastés qui sollicitent de la part des élèves un **élargissement** de leurs conceptions des relations additives.

Nous avons vu en effet des «glissements de sens» s'opérer entre énoncés; leur fonction peut être tant de facilitation que d'impasse. Dans ses premières tentatives l'élève cherche à appliquer une procédure connue de lui; les données peuvent se prêter à sa procédure; elles peuvent aussi conduire l'élève à transformer le problème ou à le déclarer impossible; elles peuvent encore, par analyse des effets de la procédure, l'amener à un ajustement de celle-ci et à une modification de la représentation du problème. La variété des procédures et des représentations symboliques, dans le cours de résolutions, rend compte chez l'élève d'une **mobilité.** Cette mobilité est à la fois un critère de ce qui fait problème pour lui, et un moteur qui lui permet de travailler sa représentation du problème. A la structuration de la séquence des problèmes pourrait ainsi correspondre chez l'élève la construction de «classes d'équivalences» de ces problèmes.

Enfin, aborder les questions didactiques c'est articuler le bilan partiel qui vient d'être présenté avec un autre niveau d'analyse, celui des phénomènes à l'échelle de la salle de classe et non seulement d'individus apprenants. J'indiquai au début de ce texte que les problèmes arithmétiques s'inscrivent, comme toute tâche scolaire, dans une «relation didactique», me référant aux travaux de SCHUBAUER-LEONI. Un autre exposé serait nécessaire pour faire également un bilan à ce niveau d'analyse: en particulier SCHUBAUER-LEONI (1984, 1985, 1986a, 1986b, 1987), et CONNE (1986, 1987).

*Article reproduit des Actes des Journées sur les Activités numériques et leur développement à l'école élémentaire. 26-27-28 avril 1989. CRDP de Dijon et LEAD de l'université de Dijon. Nous remercions le professeur Michel Fayol de nous avoir autorisé à publier cet exposé.*

**Bibliographie**

BOVET, M. *Recherche sur quelques determinants linguistiques de la compréhension de problèmes mathématiques,* Institut Romand de Recherches et de Documentation Pédagogiques. R. 78.06. Neuchâtel, 1978

BRUN J. SCHUBAUER-LEONI M.L. Recherches sur l'activité de codage d'opérations additives en situation d'interaction sociale et de communication. *Cahiers IMAG. Université de Grenoble 1,* 1981

CARPENTER TP, MOSER JM, The development of additon and subtraction problem solving skills. In CARPENTER TP, MOSER JM, ROMBERG TA *Addition and Subtraction: A cognitive perspective,* Hillsdale, NJ, Erlbaum, 1982

Qu'apportera
le facteur ?

Recevrai-je une
belle voiture ?

Ferai-je
un voyage ?

De quoi vais-je
rêver ?

Serai-je
blessé ?

Que vais-je
trouver ?

Vais-je
provoquer
une dispute ?

Comment vais-je emprisonner Azraël ?

Vais-je rencontrer Gargamel ?

Vais-je me marier avec la Schtroumpfette ?

?...

Que vais-je manger ?

Que vais-je recevoir ?

Où vais-je dormir ?

Quelle potion Gargamel prépare-t-il ?

CONNE F., Pierre, Bertrand, Claude, Paul, Laurent, Michel et leurs billes.
In J. BRUN, F. CONNE *Approches en psychopédagogie des mathématiques. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation.* Cahier 12 p. 25-84, Université de Genève, 1979

CONNE F. Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 5.3, 269-332, 1984

CONNE F. La Transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève, 1986

CONNE F. Un canard dans les mares. *Education et Recherche* nº 3, 301-327, 1987

DE CORTE E., VERSCHAFFEL L. The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction word problems.
*Journal for Research in mathematics Education.* Vol. 18, nº 5, 363-381, 1987

ESCARABAJAL M.CL. Compréhension et résolution de problèmes additifs. *Psychologie française,* 29, 3/4, 247-252, 1984

FAYOL M, ABDI H. Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *Journal Européen de Psychologie de l'Education.* Vol. 1, nº 1, 41-58, 1986

FAYOL M, ABDI H, GOMBERT J.E. Arithmetic problems formulation and working memory load. *Cognition and Instruction* 4 (3), 183-202, 1987

FISHER JP. *La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissage de la soustraction.* Thèse de troisième Cycle IREM, Université de Nancy 1, 1979

MARTHE P. *Problèmes de type additif et appropriation par l'élève des groupes additifs.* Thèse de troisième cycle. Paris EHESS, 1982

PERRET-CLERMONT A.N. *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale.* Berne, P. Lang, 1979

SAADA E.H., BRUN J. L'élaboration des formulations dans un jeu en arithmétique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 5.2, 141-185, 1984

SCHUBAUER-LEONI M.L. Le contrat didactique: approche psycho-sociale de quelques données empiriques. *Actes de la 3e Ecole d'été de didactique des mathématiques* ed. Université 1 et CNRS, Grenoble, 1984

SCHUBAUER-LEONI M.L. Le contrat didactique dans l'élaboration d'écritures symboliques par des élèves de 8-9 ans. *Interactions didactiques.* 7, 1-130, Universités de Genève et Neuchâtel, 1986a

SCHUBAUER-LEONI M.L. Le contrat didactique: un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématique. *Journal Européen de Psychologie de l'Education.* Vol. 1 nº 2, 139-153, 1986b

SCHUBAUER-LEONI M.L. *Maître-élève-savoir: analyse psycho-sociale du jeu et des enjeux de la relation didactique.* Thèse, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève, 1986c

SCHUBAUER-LEONI M.L. PERRET-CLERMONT A.N. Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 1, nº 3, 297-350, 1980

VERGNAUD G. *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne, P. Lang, 1981

VERGNAUD G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, In TP CARPENTER, JM MOSER, T ROMBERG (Ed.) *Addition and subtraction: a cognitive perspective, Hillsdale.* NJ, Erlbaum, 1982

VERGNAUD G. DURAND C. Structures additives et complexité psycho-génétique. *Revue Française de Pédagogie,* nº 36, 28-43, 1976

# La Méchante Sorcière de l'Ouest

... activité de recherche mathématique proposée aux candidat(e)s à l'enseignement primaire de 1re année en 1988 par: Johannes Läng et Roger Délez, méthodologues de mathématique aux Etudes Pédagogiques de l'Enseignement Primaire (EPEP), Genève.

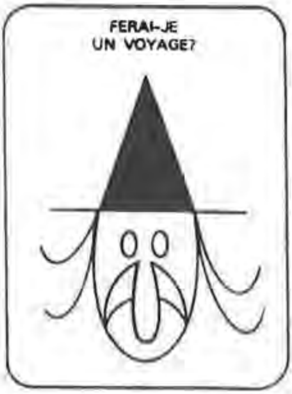
Pourquoi un tel titre?... D'où vient-il?... A quels sujets se rapporte-t-il?...

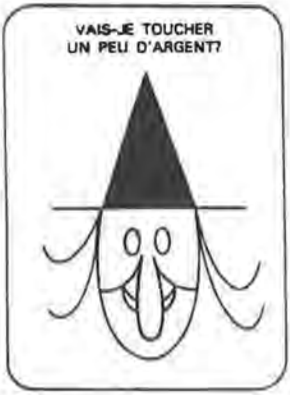
Dans un article paru dans le monde mathématique de Martin Gardner (Bibliothèque pour la science, diffusion Belin, juillet 1986), notre attention a été attirée par l'article 4 (p. 115 à 118) intitulé «Les congruences de Gauss: une théorie «in» des années 1800.»

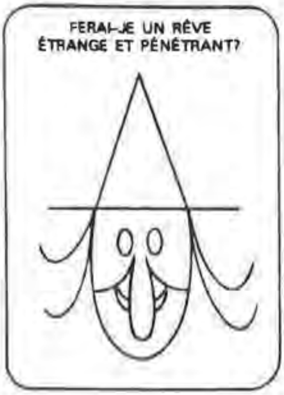
Nous citons le passage qui nous a «titillé» dans un premier temps et qui ensuite nous en a mangé... «du temps»!

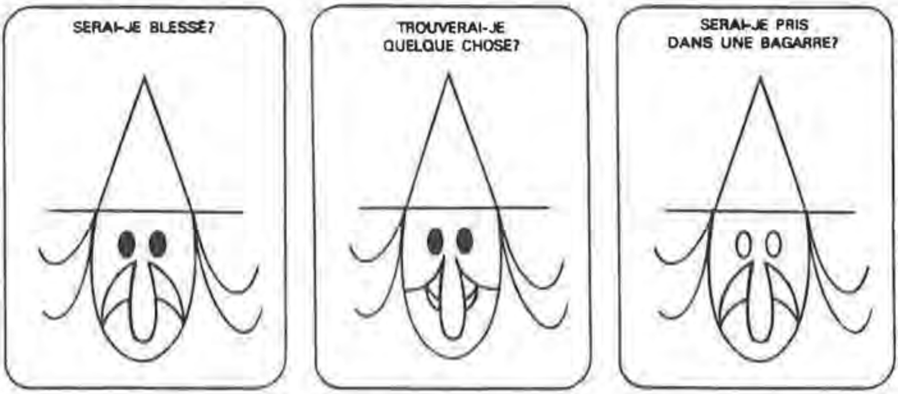
«Le magicien R. Hummer fut particulièrement productif dans l'invention de tours mathématiques, et nombre de ses créations sont fondées sur l'arithmétique modulo 2 ou sur le principe pair-impair. Je donne ici, pour la première fois un jeu de mystérieuses cartes divinatoires, l'une des idées les plus ingénieuses de R. Hummer.

Vous devez tout d'abord vous fabriquer le jeu de sept cartes représenté ci-après. Photocopiez-les et collez-les sur une feuille de carton, puis découpez-les. Maintenant apprenons à nous en servir.»



Les cartes de divination de la Méchante Sorcière de l'Ouest.

Suivaient les règles du jeu, le mode de calculation et l'ensemble des réponses suivantes:

**Les réponses de la Méchante Sorcière de l'Ouest**

000 Vous rêverez d'un parent.
001 Vous aurez une dispute au téléphone.
002 Vous rêverez d'éléphants.
003 Vous échangerez des injures avec un plombier.
010 Vous trouverez une bague perdue.
011 Vous direz quelque chose qui vous nuira.
012 Vous aurez un temps pourri.
013 Prenez garde à une blessure au pied.
020 Vous rêverez d'un vieil ami.
021 Oui, mais ce ne sera pas une bagarre que vous aurez commencée.
022 Vous rêverez d'un avion.
023 Non, si vous gardez votre sang-froid.
030 Vous trouverez de l'argent dans la rue.
031 Juste une petite écorchure lorsque vous vous raserez la figure.
032 Vous trouverez un objet perdu dans la poche d'un vieux peignoir.
033 Non, mais vous blesserez quelqu'un d'autre.
100 Non, car vous savez que la contrefaçon est illégale.
101 Vous descendrez la poubelle.
102 Juste le montant habituel.
103 Vous ferez une petite excursion dans le sud.
110 Vous tomberez amoureux d'une chatte.
111 Peut-être.
112 Vous tomberez amoureux d'une snob dans une laverie automatique.
113 Absolument pas.

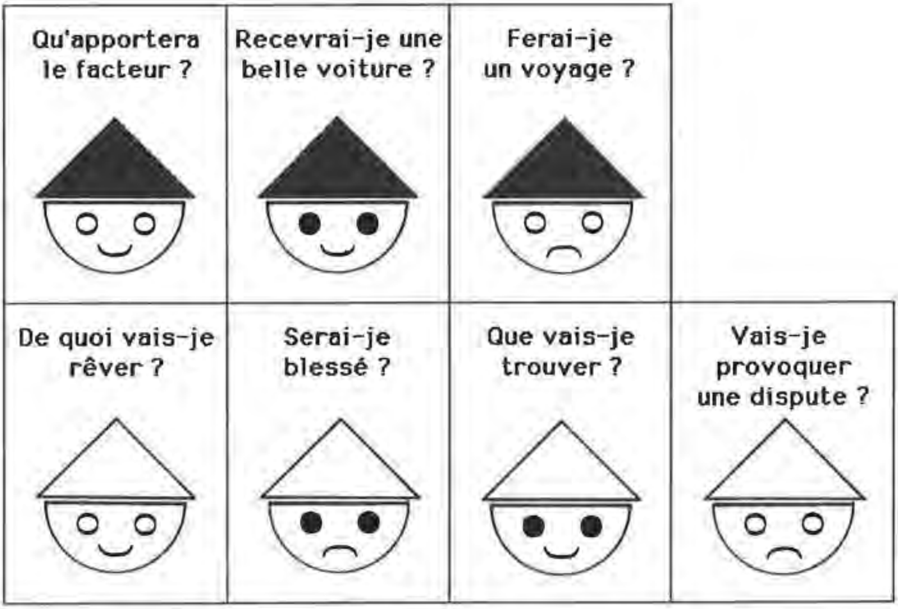
120 Un mandat inattendu vous arrivera par la poste.
121 Vous voyagerez sur un tonneau de bière.
122 Pas plus d'un million.
123 Vous rendrez visite à un ami éloigné.
130 Vous tomberez à Moureu (Indre-et-Loire).
131 Assurément oui.
132 Vous tomberez amoureux d'un agent immobilier.
133 Question idiote.
200 Vous rêverez que vous êtes un oiseau.
201 Vous n'êtes jamais pris dans une bagarre, espèce de lâche.
202 Un rêve vous éveillera au milieu de la nuit.
203 Vous vous brouillerez avec un vieil ami de votre femme.
210 Vous retrouverez la clé perdue d'une vieille malle égarée.
211 Pas de blessures d'aucune sorte pour les sept jours à venir.
212 Vous trouverez quelque chose de désagréable dans votre lit.
213 Attention à un coup de poing sur le nez.
220 Vous rêverez d'un gâteau à la noix de coco.
221 Evitez les discussions dans le bus.
222 Vous rêverez de soucoupes volantes.
223 Ne vous querellez pas avec une personne prénommée Jacques.
230 Vous trouverez ce tour déconcertant, comme tous les imbéciles.
231 C'est une semaine à ne pas monter sur un escabeau.
232 Demain vous trouverez les nouvelles fâcheuses.
233 La montée des escaliers peut être dangereuse.
300 Oui, *beaucoup* d'argent.
301 Vous ne quitterez pas votre quartier de la semaine.
302 Au contraire. Vous perdrez de l'argent.
303 Vous ferez un merveilleux voyage en rêve.
310 Vous ne tomberez amoureux de personne, pour ne pas changer.
311 *Vous* pouvez y répondre aussi bien que moi.
312 Vous tomberez amoureux d'une star.
313 Qui voulez-vous faire marcher?
320 Oui, mais la plus grosse partie ira au percepteur.
321 Oui, mais le voyage ne vous plaira pas.
322 Un peu, mais vous le dépenserez immédiatement.
323 Vous ferez un long voyage en avion.
330 Vous tomberez amoureux *deux* fois.
331 Je ne sais pas.
332 Vous allez au contraire vous désamouracher de quelqu'un.
333 Vous devriez avoir honte de poser une telle question.

L'article de Martin Gardner et ses annexes a «aiguisé» notre curiosité... Comment pourrions-nous présenter cette activité à nos candidat(e)s?...

Voici notre proposition:

# La Méchante Sorcière de l'Ouest

Vous devez d'abord fabriquer le jeu de sept cartes représenté ci-après et que vous trouverez encarté au milieu du numéro... Apprenez ensuite à vous en servir...




On a le droit de ne poser qu'une seule question par jour à la «Méchante Sorcière de l'Ouest». On peut, si on le veut, essayer de poser plusieurs questions, mais alors, la véracité des réponses n'est pas garantie.

Chaque réponse s'applique seulement à la période de sept jours qui suit le jour où la question est posée.

1. **Extraire** la carte comportant la question souhaitée.
2. **Battre** les six cartes restantes et les tenir, à l'envers, dans la main.
3. **Prononcer** quelques incantations...
4. **Au hasard, retirer** deux cartes du tas en main.
5. Si les deux chapeaux correspondent, ils forment une **paire.** S'ils sont différents, ne pas en tenir compte.
6. **Recommencer** avec la paire suivante. Agir de même.

7. La dernière paire se traite de la **même** manière.
8. **Noter** le nombre de paires ainsi formées; ce sera le premier chiffre d'un ensemble de trois.
9. **Réunir** à nouveau les six cartes, et procéder de même, en considérant les **yeux,** cette fois (pleins ou vides).
10. Même opération avec l'**expression** (sourire/grimace).
11. Il ne reste plus qu'à **chercher** la réponse dans la **liste. Bien que tout soit aléatoire, la réponse est celle à la question...**

**Propositions de réponses:**

000 Vous rêverez d'un parent.
001 Non, mais vous vous disputerez au bout du fil.
002 Un troupeau d'éléphants hantera vos nuits futures.
003 Vous aurez des mots avec votre ferblantier.
010 Une bague datant du dix-huitième siècle.
011 Un pot de peinture tombé du toit vous atteindra à l'épaule.
012 Vous trouverez le temps pourri.
013 Prenez garde à une blessure au pied droit.
020 Vous ne ferez que des cauchemars.
021 Oui, mais ce ne sera pas vous qui aurez commencé.
022 Vous rêverez de votre brevet d'enseignant(e).
023 Non, mais de grâce, gardez votre sang-froid!
030 De l'argent jonchant le sol de votre cuisine.
031 Juste une petite écorchure au visage en vous rasant.
032 Vous trouverez un objet perdu dans la poche d'un peignoir.
033 Non, mais c'est vous qui blesserez autrui.
100 Votre journal favori.
101 Vous vous contenterez de descendre la poubelle.
102 Que des factures.
103 Vous ferez une petite excursion dans le sud de la France.
110 Vous deviendrez propriétaire d'une belle «Lamborghini».
111 Peut-être.
112 Une «Ferrari Testa Rossa» vous conviendrait-elle?
113 Absolument pas.
120 Des factures et de la publicité.
121 Vous voyagerez en clandestin dans un tonneau de bière.
122 Un paquet pour votre anniversaire.
123 Vous rendrez visite à votre oncle aux Etats-Unis.
130 Vous héritez d'une vieille «2CHwox» avec roues en option.
131 Assurément oui.
132 Un beau camion vous ira à ravir.
133 Question idiote.
200 Vous rêverez que vous êtes un oiseau.

201 Vous êtes trop lâche pour être pris dans une bagarre.
202 Un songe étrange vous hantera pendant sept nuits.
203 Non, mais vous vous brouillerez avec vos amis.
210 C'est dans une vieille malle que vous trouverez la clef.
211 A peine, mon pote!
212 Que de bonnes choses dans votre cave!
213 Attention aux coups de poing qui se perdent!
220 Un énorme gâteau à la crème traversera vos songes futurs.
221 Evitez les discussions dans les bus.
222 Vous rêverez que vous êtes un cerveau lent.
223 Ne vous querellez pas avec Johann et Roger.
230 Vous trouverez ce tour déconcertant, comme tout le monde.
231 Oui, si vous grimpez sur un escabeau branlant.
232 Un chimpanzé sous votre table du salon.
233 L'ascension du coteau de Bernex pourrait s'avérer dangereuse.
300 Un commandement de payer.
301 Vous ne quitterez pas votre appartement de la semaine.
302 Les journaux du jour.
303 Vous ferez un merveilleux voyage... en rêve!
310 Une «Alfa Romeo» vous suffit-elle?
311 Vous pouvez y répondre aussi bien que moi.
312 Vous hériterez d'un tas de ferraille rouillé.
313 Qui voulez-vous faire marcher?
320 Un ours en peluche.
321 Bien sûr, mais ce déplacement ne vous plaira pas.
322 Une commande de timbres du service philatélique.
323 Oui, et cela même à dos de chameau.
330 Une «Mercedes» vous attend devant la porte. Prenez les clefs.
331 Aucune idée.
332 Une «Audi quattro» est-elle de votre goût?
333 Quelle honte de poser une telle question!

Si cette recherche vous a intéressé(e)s, si vous désirez vous «triturer l'esprit» davantage, rien ne vous empêche de poursuivre grâce à la relance suivante:

Il est bien entendu possible de poser à la «Méchante Sorcière de l'Ouest» une question ne figurant sur aucune carte; la réponse ne se fera malgré tout pas attendre:

- Procéder de la même façon avec les chapeaux, les yeux et les sourires. En revanche, il est nécessaire, cette fois-ci, de composer **deux** tas: **les paires et les non-paires.**
- Ne pas tenir compte de la dernière carte.
- Soustraire le nombre de paires du plus petit tas de celui du plus gros et noter ce nombre.
- Après trois tris, on obtiendra la réponse...

Le «défi» est lancé et il sera relevé par plusieurs groupes de candidat(e)s.

Nous avons pensé qu'il serait agréable pour nos lecteurs de commencer par une recherche de candidates de Division Elémentaire aux EPEP en 1989. A vous la suite et merci!...

## La Méchante Sorcière de l'Ouest

par Christine Vuille et Valérie Vial, candidates de 1re DE 1989
(Extraits de notre recherche)

### Description des cartes

Jeu de 7 cartes dont les critères sont les suivants:

chapeaux blancs ou noirs

yeux blancs ou noirs

bouches sourires ou grimaces

### Manipulation des cartes

Toutes les questions trouvaient des réponses exactes.

Au début, nous avons regardé sur la feuille de réponses, lesquelles correspondaient aux questions des cartes. D'après le sens des phrases, il y a plusieurs questions possibles pour chaque réponse.

*Exemple:* réponse 102 «Que des factures»

Mais certaines réponses étaient très vagues.

*Exemples:* réponses 111 «Peut-être»
113 «Absolument pas»
131 «Assurément oui»
133 «Question idiote»
311 «Vous pouvez y répondre aussi bien que moi»
313 «Qui voulez-vous faire marcher?»
331 «Aucune idée»
333 «Quelle honte de poser une telle question»

Notre but a été alors de chercher combien de réponses sur les 64 de la liste étaient possibles pour chaque question.

Nous avons trouvé 8 réponses pour chaque question.

Sur les 64 réponses possibles, seules 56 se rapportaient aux questions énoncées, nous en avons déduit qu'il restait 8 réponses sans question.

Nous nous sommes alors penchées sur la nature des 8 réponses restantes. Il s'agissait de réponses très vagues, les mêmes que constatées précédemment.

En suivant la deuxième règle du jeu qui consiste à poser une question ne figurant sur aucune carte, nous avons constaté que les réponses à cette question imaginaire, correspondaient aux réponses vagues remarquées ultérieurement.

Nous en avons conclu qu'il manquait une carte.

En comparant les cartes suivant leurs critères, nous avons pu redessiner la carte manquante:

La voici:

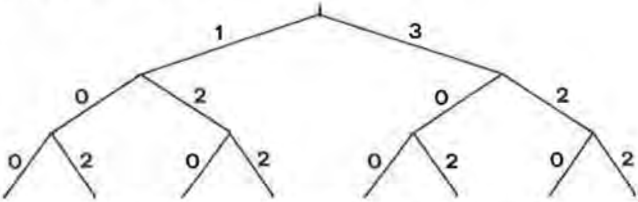

**Fonctionnement du jeu**

Pour chaque question, nous avons cherché tous les codes possibles.

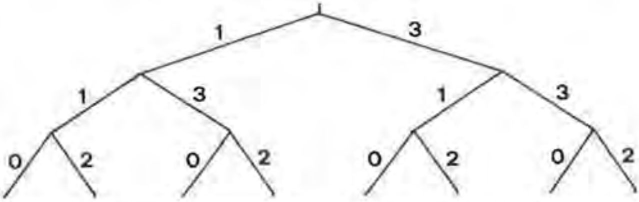
Nous avons d'abord procédé en manipulant les cartes pour trouver les solutions à chaque question.

Ensuite, pour confirmer notre démarche nous avons utilisé l'arbre de classement.

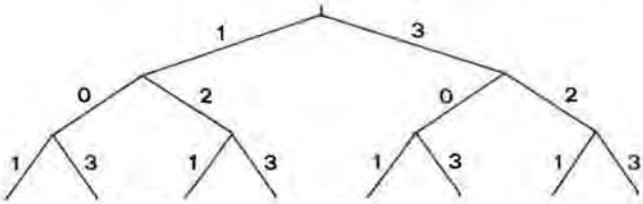
## Analyse des réponses pour chaque carte:

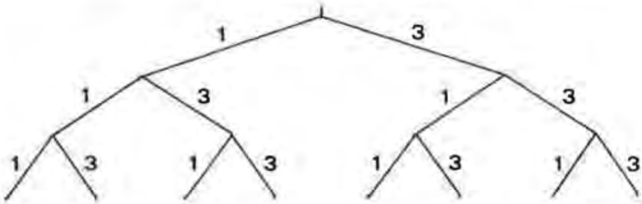

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 102 | 120 | 122 |
| 300 | 302 | 320 | 322 |


| | | | |
|---|---|---|---|
| 110 | 112 | 130 | 132 |
| 310 | 312 | 330 | 332 |

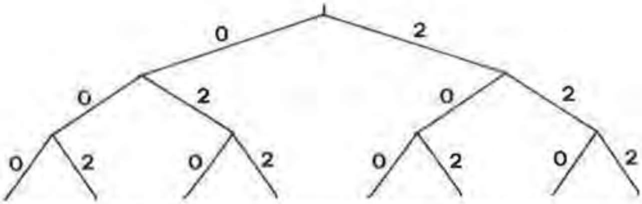




| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 103 | 121 | 123 |
| 301 | 303 | 321 | 323 |

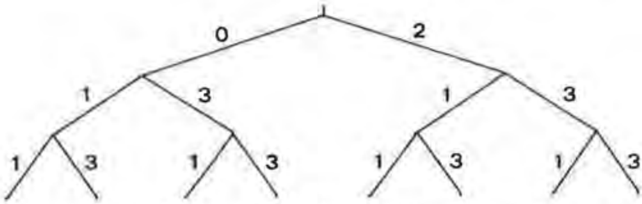

| | | | |
|---|---|---|---|
| 111 | 113 | 131 | 133 |
| 311 | 313 | 331 | 333 |

De quoi vais-je
rêver ?



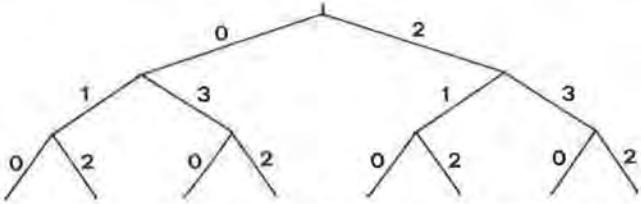

| | | | |
|---|---|---|---|
| 000 | 002 | 020 | 022 |
| 200 | 202 | 220 | 222 |

Serai-je
blessé ?



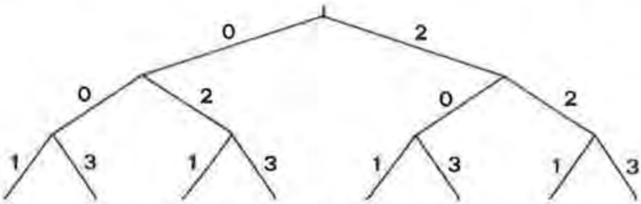

| | | | |
|---|---|---|---|
| 011 | 013 | 031 | 033 |
| 211 | 213 | 231 | 233 |

Que vais-je
trouver ?




| | | | |
|---|---|---|---|
| 010 | 012 | 030 | 032 |
| 210 | 212 | 230 | 232 |

Vais-je
provoquer
une dispute ?




| | | | |
|---|---|---|---|
| 001 | 003 | 021 | 023 |
| 201 | 203 | 221 | 223 |

**Remarque:** Codes-réponses de 000 à 333: → Analogie avec les BASES!...

**Création du jeu des Schtroumpfs**

A partir de nos démarches, nous avons créé notre propre jeu.

1) Nous avons regroupé les réponses avec chaque question.
1 question → 8 réponses → 64 rép. en tout

2) En fonction du thème choisi «les Schtroumpfs», nous avons inventé 8 questions et 64 réponses.

3) Nous avons regroupé chacune des questions avec ses réponses. Seuls les textes ont changé et les codes sont restés identiques.

4) Pour redessiner les cartes des Schtroumpfs, nous avons reconsidéré les critères:

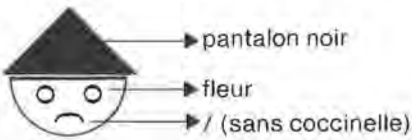
| | | |
|---|---|---|
| chapeaux | ▲ → | pantalon noir |
| | △ → | pantalon blanc |
| yeux | ● ● → | feuille |
| | ○ ○ → | fleur |
| bouches | ⌒ → | coccinelle |
| | ‿ → | / |

5) Pour placer les critères ci-dessus, nous les avons d'abord comptés.

3 pantalons noirs et 4 blancs
3 feuilles et 4 fleurs
4 coccinelles et 3 / (sans rien)

6) En mettant en relation les dessins des anciennes cartes avec nos critère, nous avons constitué notre série de cartes.

*Exemple:*




7) Nous avons vérifié nos cartes d'après le point 5).

8) Jeu. (Encart).

9) Les réponses:

000 Un bon gros gâteau à la crème, préparé par le schtroumpf pâtissier.
001 Il prépare une potion pour devenir plus petit.
002 Une feuille de salsepareille.
003 Une potion pour être invisible.
010 Au pied d'un arbre dans la forêt.
011 Un baiser de la Schtroumpfette.
012 Dans mon lit douillet.
013 Un cadeau explosif du schtroumpf farceur.
020 Une soupe de crapauds.
021 Une potion pour donner des boutons.
022 Un plat de châtaignes.
023 Une potion pour rendre gentil.
030 Dans la baignoire.
031 Un miroir du schtroumpf coquet.
032 Dans la maison du schtroumpf paresseux.
033 Une théorie du schtroumpf à lunettes.
100 Avec un grand filet à papillon.
101 Non, car elle refusera.
102 En lui ligotant les pattes.
103 Peut-être.
110 Non, si tu évites la colline où il se cache.
111 Peut-être bien.
112 Oui, certainement lors d'une promenade dans la forêt.
113 Absolument pas.
120 Le schtoumpf farceur mettra de la glue sur son chemin.
121 Elle sera sûrement d'accord, si tu lui offres des fleurs.
122 Le schtroumpf cuisinier lui préparera un gâteau avec une potion pour endormir.
123 Non, car elle aime le schtroumpf poète.
130 Tu auras l'occasion de le rencontrer si tu t'approches trop de son château.
131 Assurément oui.
132 Non, mais c'est Azraël que tu rencontreras.
133 Question idiote.
200 Rien, tu n'as pas faim.
201 Une potion pour être musclé.
202 Des petits fruits des bois.
203 Une potion pour ressembler à la Schtroumpfette.
210 Abrité, sous un champignon de la forêt.
211 Une flûte du schtroumpf musicien.
212 Dans le nid d'un oiseau.
213 Une potion magique du Grand Schtroumpf.
220 Un bol de graines.
221 Une potion pour retrouver le village des schtroumpfs.
222 Une grosse glace à la vanille.

223 Une potion pour être beau.
230 Dans la barque du schtroumpf pêcheur.
231 Un gâteau du schtroumpf gourmand.
232 Dans le laboratoire du Grand Schtroumpf.
233 Des haltères du schtroumpf costaud.
300 En creusant un trou que le schtroumpf grognon recouvrira de branches et de feuilles.
301 Non, car elle est trop coquette.
302 Le Grand Schtroumpf avalera une potion magique qui le transformera en géant, et il l'attrapera.
303 Demande-lui, tu verras.
310 Oui, tu devras le rencontrer pour délivrer la schtroumpfette.
311 Tu peux y répondre aussi bien que moi.
312 Non, si tu restes chez toi.
313 Ce serait bien possible.
320 Tu ne pourras pas l'attraper, car le schtroumpf musicien lui cassera les oreilles avec sa trompette.
321 Si le Grand Schtroumpf me le permet.
322 La schtroumpfette l'ensorcellera par son charme.
323 Oui, si elle me choisit parmi ses prétendants.
330 Oui, en allant cueillir des feuilles de salsepareille.
331 Aucune idée.
332 Non, car il est malade et au fond de son lit!
333 Quelle honte de poser une telle question!

**Remarques:**

a) En Division Elémentaire (DE), le but du travail était de comprendre le mécanisme du jeu, de le décortiquer et d'en créer un sur le même modèle, pour des enfants.

b) En Division Moyenne et Spécialisée (DM et DS), il s'agissait d'aller plus loin, c'est-à-dire de généraliser pour le jeu suivant comme nous l'a suggéré Martin Gardner à la fin de son article.

   «On peut fabriquer des ensembles de cartes plus grands pour répondre à un plus grand nombre de questions. Le nombre de cartes doit être égal à une puissance de 2 diminuée de 1. En 1980, Karl Fulves a publié *Bob Hummer's Collected Secrets,* une compilation de tous les tours connus d'Hummer. Il y décrit un jeu de 15 cartes divinatoires, portant chacune quatre symboles qui peuvent se correspondre ou non, à utiliser avec un livre de divination (non fourni!) $8^4 = 4096$ réponses. Je laisse au lecteur le soin de chercher pourquoi les réponses sont toujours appropriées.»

Ce travail a également fait l'objet d'une recherche plus spécifiquement mathématique qui fera peut-être l'objet d'un article ultérieur.

A vous de jouer, de chercher, d'analyser...

Nous vous souhaitons beaucoup de plaisir!

J. A. 1200 GENÈVE 2

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|---|
| Editorial: *R. Hutin* | 1 |
| La résolution de problèmes arithmétiques, *J. Brun* | 2 |
| La Méchante Sorcière de l'Ouest, *R. Délez et J. Läng* | 16 |

**Fondateur**: Samuel Roller

Comité de rédaction:

MM. A. Calame, M. Chastellain, R. Délez, P. Duboux, M. Ferrario, F. Jaquet, Y. Michlig, F. Oberson, D. Poncet.

**Rédacteur responsable**: R. Hutin

**Abonnements:**

Suisse: F 16.—, Etranger: F 18.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 20 bis, r. du Stand, CP 119; CH 1211 Genève 11.
(Tél. (022) 27 42 95)

**Adresse: Math-Ecole; 20 bis, rue du Stand, CH-1211 Genève 11; CP 119**

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion